BURHAN

Résumé : Statistique

2ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/statistique/resume

Chapitre	Semestre
Statistique	Semestre 2

Série statistique et fréquence

À retenir : Rappel de l'an dernier : le vocabulaire

On étudie une **population** : un ensemble de personnes ou d'objets. Chaque membre de la population est un **individu**.

Le **caractère** est ce que l'on observe sur chaque individu, ici un nombre.

L'**effectif** d'une valeur est le nombre d'individus qui ont cette valeur. L'**effectif total** N est la somme de tous les effectifs.

Définition : Fréquence d'une valeur

Dans une série statistique d'effectif total N, la **fréquence** d'une valeur est le quotient de son effectif par l'effectif total :

$$\text{fréquence} = \frac{\text{effectif de la valeur}}{N}.$$

Une fréquence est un nombre compris entre 0 et 1. On l'écrit sous la forme d'une fraction, d'un nombre décimal ou en pour cent : la fréquence $\frac{1}{4}$ s'écrit aussi $0{,}25$, ou 25 pour cent.

Exemple

Série fictive. Une équipe imaginaire a joué 20 matchs. Voici le nombre de buts marqués à chaque match.

Buts marqués	0	1	2	3	4
Effectif	3	8	5	3	1

Fréquence de la valeur 1. On divise son effectif par 20 :

$$\frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

Cela fait 40 pour cent. L'équipe a marqué un seul but dans 40 pour cent de ses matchs.

Remarque : Contrôle : les fréquences ont pour somme 1

Pour la série des buts, les fréquences sont $0{,}15$; $0{,}4$; $0{,}25$; $0{,}15$ et $0{,}05$. Leur somme vaut 1 :

$$0{,}15 + 0{,}4 + 0{,}25 + 0{,}15 + 0{,}05 = 1$$

C'est vrai pour toute série : chaque individu est compté une fois.

Attention : Une fréquence ne dépasse jamais 1

Une fréquence plus grande que 1 trahit une division à l'envers. Par exemple, $\frac{20}{8} = 2{,}5$ est faux.

La bonne fréquence est $\frac{8}{20} = 0{,}4$. On divise toujours l'effectif de la valeur par l'effectif total.

Effectifs cumulés : « au plus » et « au moins »

À retenir : Une question « au plus »

Combien de matchs avec au plus 2 buts ? On ajoute les effectifs des valeurs 0, 1 et 2.

Cette somme porte un nom : c'est un effectif cumulé.

Définition : Effectif cumulé

Les valeurs d'un caractère quantitatif sont rangées dans l'ordre croissant. L'**effectif cumulé** d'une valeur est la somme de l'effectif de cette valeur et des effectifs de toutes les valeurs plus petites qu'elle.

L'effectif cumulé de la plus petite valeur est son effectif. L'effectif cumulé de la plus grande valeur est l'effectif total N.

Méthode : remplir la ligne des effectifs cumulés

1. **Range** les valeurs de la plus petite à la plus grande.
2. **Écris** sous la première valeur son propre effectif.
3. **Avance** d'une case : ajoute l'effectif de la nouvelle valeur au cumul de la case précédente.
4. **Vérifie** la dernière case : elle contient N.

Exemple

Série fictive des buts.

Buts marqués	0	1	2	3	4
Effectif	3	8	5	3	1
Effectif cumulé	3	11	16	19	20

Lecture. L'effectif cumulé de 2 est 16. L'équipe a donc marqué au plus 2 buts dans 16 matchs.

Contrôle. La dernière case vaut 20, l'effectif total.

Remarque : « Au moins » se calcule par une différence

Pour « au moins 3 buts », on retire de N les matchs à au plus 2 buts. On calcule $20 - 16 = 4$.

L'équipe a marqué au moins 3 buts dans 4 matchs. Vérification : $3 + 1 = 4$.

Attention : Range avant de cumuler

Un tableau peut arriver dans le désordre, par exemple avec les valeurs 2, 0 puis 1. Si tu cumules dans cet ordre, la case de 0 compte aussi des matchs à 2 buts.

Le cumul perd alors son sens. Range d'abord les valeurs dans l'ordre croissant.

Fréquences cumulées

À retenir : Une part « au plus »

Une fréquence cumulée donne une part. C'est la part des individus qui ont au plus cette valeur. On l'écrit volontiers en pour cent.

Définition : Fréquence cumulée

Les valeurs d'un caractère quantitatif sont rangées dans l'ordre croissant. La **fréquence cumulée** d'une valeur est le quotient de son effectif cumulé par l'effectif total N :

$$\text{fréquence cumulée} = \frac{\text{effectif cumulé de la valeur}}{N}.$$

La fréquence cumulée de la plus grande valeur est égale à 1, c'est-à-dire 100 pour cent.

Méthode : fréquences et fréquences cumulées

1. **Trouve** l'effectif total N.
2. **Divise** par N : un effectif donne une fréquence, un effectif cumulé donne une fréquence cumulée.

3. **Choisis** l'écriture demandée : fraction, nombre décimal, ou pour cent. Pour le pour cent, multiplie le décimal par 100.
4. **Vérifie** : les fréquences ont pour somme 1, et la dernière fréquence cumulée vaut 1.

Exemple

Série fictive des buts. On divise chaque effectif cumulé par 20.

Buts marqués	0	1	2	3	4
Effectif cumulé	3	11	16	19	20
Fréquence cumulée	$0{,}15$	$0{,}55$	$0{,}8$	$0{,}95$	1

Lecture. La fréquence cumulée de 2 est $0{,}8$, soit 80 pour cent. Dans 80 pour cent des matchs, l'équipe a marqué au plus 2 buts.

Attention **: Des fréquences arrondies**

Six amis imaginaires comptent leurs stylos. Un ami en a 1, un ami en a 2, quatre amis en ont 3.

Les fréquences sont $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$ et $\frac{4}{6}$. Arrondies au centième, elles valent $0{,}17$, $0{,}17$ et $0{,}67$. Leur somme affichée est $1{,}01$.

Ce n'est pas une faute : précise que les valeurs sont arrondies, par exemple $\frac{1}{6} \approx 0{,}17$.

Moyenne arithmétique

À retenir **: La moyenne, un partage équitable**

La moyenne répond à une question. Quelle valeur aurait chaque individu si on partageait le total à parts égales ?

On additionne toutes les valeurs, chacune autant de fois que son effectif. Puis on divise par N.

Définition **: Moyenne arithmétique**

Une série statistique a pour valeurs x_1, x_2, ..., x_p, d'effectifs respectifs n_1, n_2, ..., n_p. Son effectif total est $N = n_1 + n_2 + \cdots + n_p$. La **moyenne arithmétique** de la série est le nombre

$$m = \frac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + \cdots + n_p \times x_p}{N}.$$

Lorsque chaque valeur a pour effectif 1, la moyenne est la somme des valeurs divisée par le nombre de valeurs.

Méthode : calculer une moyenne avec un tableau

1. **Complète** le tableau par une ligne : pour chaque valeur, le produit de l'effectif par la valeur.
2. **Fais la somme** de cette ligne.
3. **Divise** cette somme par N.
4. **Vérifie** : la moyenne se situe entre la plus petite et la plus grande valeur.

Exemple

Série fictive. On relève la température à midi pendant 10 jours, en degrés.

Température	18	20	21	25
Effectif	2	3	4	1
Produit	36	60	84	25

Calcul. La somme des produits vaut 205. On la divise par l'effectif total :

$$m = \frac{205}{10} = 20{,}5$$

La moyenne est de $20{,}5$ degrés.

Contrôle. $20{,}5$ est entre 18 et 25. Ce n'est pas une valeur de la série : c'est normal pour une moyenne.

Attention : Chaque valeur compte autant de fois que son effectif

Trois jours à 16 degrés et un jour à 24 degrés donnent la moyenne :

$$\frac{3 \times 16 + 1 \times 24}{4} = \frac{72}{4} = 18$$

Le calcul $\frac{16 + 24}{2} = 20$ est faux. Il oublie que la valeur 16 compte trois fois.

Propriété : Moyenne et fréquences

Avec les notations de la moyenne arithmétique, on note f_1, f_2, …, f_p les fréquences des valeurs x_1, x_2, …, x_p. Alors

$$m = f_1 \times x_1 + f_2 \times x_2 + \cdots + f_p \times x_p.$$

Remarque : Un résultat admis, vérifié sur un exemple

Ce résultat est admis. Vérifions-le sur la série des températures, de fréquences $0{,}2$; $0{,}3$; $0{,}4$ et $0{,}1$.

$$\begin{aligned} &0{,}2 \times 18 + 0{,}3 \times 20 \\ &\quad + 0{,}4 \times 21 + 0{,}1 \times 25 \\ &= 3{,}6 + 6 + 8{,}4 + 2{,}5 \\ &= 20{,}5 \end{aligned}$$

C'est bien la moyenne trouvée avec les effectifs.

Diagramme en bâtons et polygone des effectifs cumulés

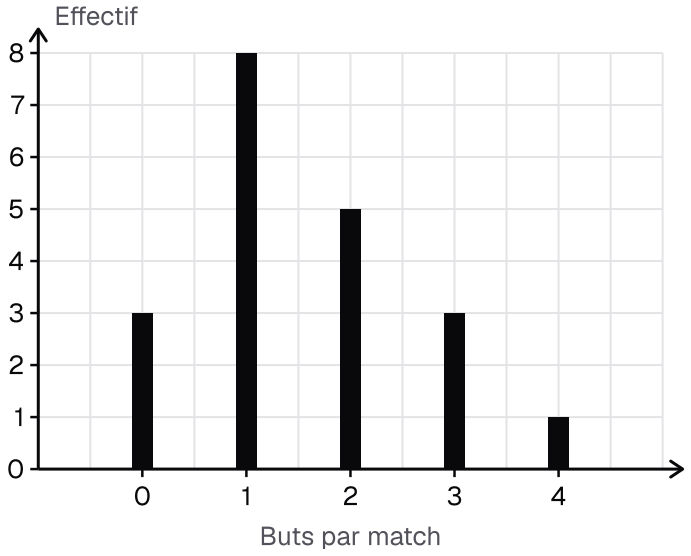
Méthode : tracer sur ton cahier

1. **Trace** deux axes : les valeurs à l'horizontale ; à la verticale, les effectifs, ou les effectifs cumulés pour le polygone. Choisis une unité simple, par exemple 1 carreau pour 1 match.
2. **Diagramme en bâtons** : au-dessus de chaque valeur, un segment vertical. Sa hauteur est l'effectif de la valeur.
3. **Polygone des effectifs cumulés** : au-dessus de chaque valeur, un point. Sa hauteur est l'effectif cumulé. Relie ensuite les points voisins par des segments.
4. **Termine** par un titre et le nom de chaque axe.

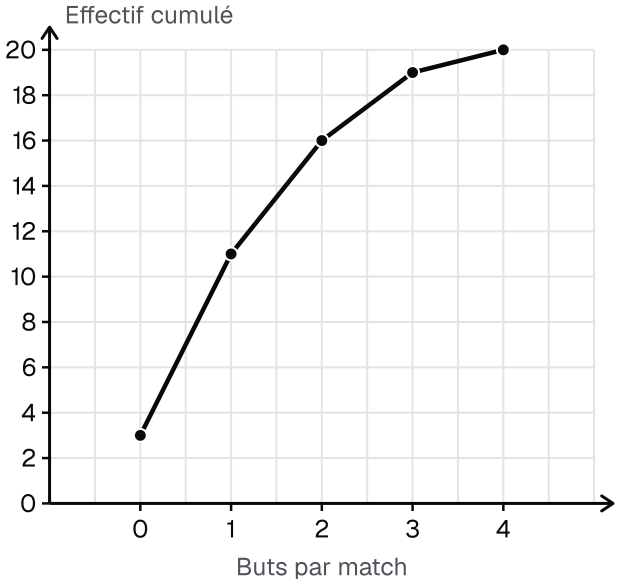
Exemple

Série fictive des buts. Sur le diagramme en bâtons, les bâtons au-dessus de 0, 1, 2, 3 et 4 ont pour hauteurs 3, 8, 5, 3 et 1.

Le polygone des effectifs cumulés passe par les points $(0;3)$, $(1;11)$, $(2;16)$, $(3;19)$ et $(4;20)$.



Les buts de la série fictive en bâtons : un bâton par nombre de buts, de hauteur l'effectif.



La même série en polygone des effectifs cumulés : la ligne monte toujours et finit à 20.

Remarque : Le polygone ne descend jamais

Chaque effectif cumulé ajoute un effectif au précédent. Le polygone ne descend donc jamais. Son dernier point est à la hauteur N, ici 20.

Il se lit comme le tableau : au-dessus de 2, la hauteur 16 signifie « 16 matchs avec au plus 2 buts ».

Attention : Ne mélange pas les deux hauteurs

Le bâton de la valeur 2 mesure 5 : c'est son effectif.

Le point du polygone au-dessus de 2 est à 16 : c'est son effectif cumulé.

Avant de tracer, demande-toi quelle ligne du tableau tu utilises.

Quelle technique pour quelle question ?

Méthode : Quelle technique pour quelle question ?

- **Combien d'individus en tout ?** Additionne les effectifs : tu obtiens N.
- **Quelle part pour une valeur ?** La fréquence : l'effectif divisé par N.
- **En pour cent ?** Multiplie la fréquence décimale par 100.
- **Combien ont au plus une valeur ?** Lis l'effectif cumulé de cette valeur.
- **Combien ont au moins une valeur ?** Retire de N l'effectif cumulé de la valeur juste avant. Pour la plus petite valeur, c'est N.
- **Quelle part au plus ?** La fréquence cumulée.
- **Quel nombre résume la série ?** La moyenne, avec les produits ou avec les fréquences.
- **Un effectif manque ?** Pars de N et retire les effectifs connus.
- **Un dessin ?** Les bâtons pour les effectifs, le polygone pour les effectifs cumulés.

Fréquence d'une valeur

$$f_1 = \frac{n_1}{N}$$

Fréquence en pour cent

$$f_1 \times 100$$

Somme des fréquences

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_p = 1$$

Effectif cumulé de la deuxième valeur

$$n_1 + n_2$$

Effectif des valeurs plus grandes que la deuxième

$$N - (n_1 + n_2)$$

Moyenne avec les effectifs

$$m = \frac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + \cdots + n_p \times x_p}{N}$$

Moyenne avec les fréquences

$$m = f_1 \times x_1 + f_2 \times x_2 + \cdots + f_p \times x_p$$

Exemple

Série fictive. Les 25 membres d'un conseil de classe imaginaire notent un projet de 1 à 4. Les notes 1, 3 et 4 ont pour effectifs 6, 8 et 4. L'effectif de la note 2 manque.

Calcul. On retire de 25 les effectifs connus :

$$25 - (6 + 8 + 4)$$
$$= 25 - 18 = 7$$

Donc 7 membres ont donné la note 2.

À retenir : Rédiger en devoir

Recopie le tableau et ajoute une ligne par calcul. Écris l'opération avant le résultat, par exemple $\frac{8}{20} = 0{,}4$.

Annonce un arrondi quand tu en fais un. Termine par une phrase qui répond à la question, avec l'unité.