BURHAN

Statistique

2ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/statistique/cours

Chapitre	Semestre
Statistique	Semestre 2

Combien de livres pendant les vacances ?

Dans une classe imaginaire de 25 élèves, chacun dit combien de livres il a lus pendant les vacances. Voici les réponses (série fictive).

Nombre de livres lus	0	1	2	3	4
Nombre d'élèves	3	6	8	5	3

La bibliothécaire de la classe se pose une question. Combien d'élèves ont lu au plus deux livres ?

Devine : Une prédiction

Combien d'élèves de cette classe ont lu **au plus** 2 livres, c'est-à-dire 0, 1 ou 2 livres ?

A. 8 élèves.

Faux.

Tu as compté seulement les élèves qui ont lu exactement 2 livres.

B. 14 élèves.

Faux.

Tu as oublié les 3 élèves qui n'ont lu aucun livre.

C. 17 élèves.

Juste.

Juste : $3 + 6 + 8 = 17$.

D. 25 élèves.

Faux.

25 est le nombre total d'élèves. Certains ont lu 3 ou 4 livres.

Correction

On additionne les élèves qui ont lu 0, 1 ou 2 livres :

$$3 + 6 + 8 = 17$$

Donc 17 élèves ont lu au plus 2 livres.

Ce total porte un nom : c'est un **effectif cumulé**.

Autre question : combien de livres un élève de cette classe a-t-il lus « en moyenne » ?

Pour répondre, il faut un calcul précis. Tu vas l'apprendre.

Dans ce chapitre, tu reprends d'abord le vocabulaire de 1re année. Puis tu calcules des fréquences, des effectifs cumulés et des fréquences cumulées.

Tu apprends ensuite à calculer une moyenne. Enfin, tu lis et tu prépares deux graphiques.

Série statistique et fréquence

Le vocabulaire, puis une part

Rappel de 1re année. Une **population** est l'ensemble étudié, par exemple une classe de 2e année. Chaque élève de cette classe est un **individu**.

On observe sur chaque individu un **caractère** : ici, le nombre de frères et sœurs. Le caractère est **quantitatif** quand ses **valeurs** sont des nombres.

L'**effectif** d'une valeur compte les individus qui ont cette valeur. L'**effectif total** N est la somme de tous les effectifs.

Devine : Quelle part de la classe ?

Dans une classe imaginaire de 2e année, chaque élève a donné son nombre de frères et sœurs (série fictive).

Nombre de frères et sœurs	0	1	2	3	4
Effectif	4	7	5	3	1

Quelle part de la classe n'a ni frère ni sœur ?

A. 4 élèves sur 20, soit $\frac{4}{20}$.

Juste.

Juste : l'effectif total est $4 + 7 + 5 + 3 + 1 = 20$.

B. 4 élèves sur 5, soit $\frac{4}{5}$.

Faux.

Le nombre 5 est le nombre de valeurs du tableau, pas le nombre d'élèves.

C. $\frac{20}{4}$, soit 5.

Faux.

Une part de la classe ne dépasse pas la classe entière. Tu as divisé dans le mauvais sens.

D. 4 pour cent de la classe.

Faux.

Il y a 4 élèves, mais la classe n'a pas 100 élèves.

Correction

On calcule d'abord l'effectif total :

$$N = 4 + 7 + 5 + 3 + 1 = 20$$

Sur 20 élèves, 4 n'ont ni frère ni sœur. La part cherchée est $\frac{4}{20}$, c'est-à-dire $\frac{1}{5}$.

Cette part s'appelle une **fréquence**.

En clair. Une fréquence compare un effectif à l'effectif total. Elle répond à la question « quelle part de la population ? ». Voici sa définition.

Définition : Fréquence d'une valeur

Dans une série statistique d'effectif total N, la **fréquence** d'une valeur est le quotient de son effectif par l'effectif total :

$$\text{fréquence} = \frac{\text{effectif de la valeur}}{N}.$$

Une fréquence est un nombre compris entre 0 et 1. On l'écrit sous la forme d'une fraction, d'un nombre décimal ou en pour cent : la fréquence $\frac{1}{4}$ s'écrit aussi $0{,}25$, ou 25 pour cent.

Trois écritures d'une fréquence

Exemple : trois écritures d'une même fréquence

Dans la classe des frères et sœurs, 7 élèves sur 20 ont exactement un frère ou une sœur.

- **En fraction** : la fréquence de la valeur 1 est $\frac{7}{20}$.
- **En nombre décimal** : $7 \div 20 = 0{,}35$.
- **En pour cent** : $0{,}35 = \frac{35}{100}$, c'est-à-dire 35 pour cent.

Rappel de 1re année : « 35 pour cent » veut dire « 35 sur 100 ».

Voici toutes les fréquences de la classe, en nombre décimal et en pour cent.

Nombre de frères et sœurs	0	1	2	3	4
Effectif	4	7	5	3	1
Fréquence	$0{,}2$	$0{,}35$	$0{,}25$	$0{,}15$	$0{,}05$
En pour cent	20	35	25	15	5

Contrôle. On additionne les cinq fréquences :

$$0{,}2 + 0{,}35 + 0{,}25 + 0{,}15 + 0{,}05 = 1$$

C'est normal : chaque élève est compté une fois, et une seule.

À l'envers. La fréquence et l'effectif total redonnent l'effectif. Pour la valeur 1 : $0{,}35 \times 20 = 7$ élèves.

Exemple : un effectif effacé

Dans une autre classe imaginaire de 25 élèves, une tache cache un effectif du tableau (série fictive).

Nombre de frères et sœurs	0	1	2	3	4
Effectif	6	?	8	4	2

Les effectifs connus font :

$$6 + 8 + 4 + 2 = 20$$

L'effectif total est 25. L'effectif caché vaut donc :

$$25 - 20 = 5$$

Vérifie : Une fréquence possible ?

Dans une autre classe imaginaire de 25 élèves, Nadia calcule quatre fréquences. Laquelle est forcément fausse ?

A. $0{,}2$

Faux.

Elle est possible : c'est la fréquence d'une valeur d'effectif 5, car $\frac{5}{25} = 0{,}2$.

B. 0

Faux.

Elle est possible : si une valeur du tableau a pour effectif 0, sa fréquence est $\frac{0}{25} = 0$.

C. $1{,}2$

Juste.

Juste : elle dépasse 1. Un effectif ne dépasse jamais l'effectif total.

D. 1

Faux.

Elle est possible : si tous les élèves ont la même valeur, sa fréquence est $\frac{25}{25} = 1$.

Correction

Une fréquence est le quotient d'un effectif par l'effectif total. Ici, l'effectif est compris entre 0 et 25.

La fréquence est donc comprise entre 0 et 1, et seule $1{,}2$ sort de ces bornes.

Un piège, puis à toi

Attention : le sens de la division

✗ « 5 élèves sur 20 ont deux frères et sœurs. La fréquence vaut $\frac{20}{5} = 4$. »

✓ On divise l'effectif par l'effectif total : $\frac{5}{20} = 0{,}25$, soit 25 pour cent.

Une fréquence plus grande que 1 est un signal d'alarme. Vérifie alors le sens de ta division.

À toi : Calculer des fréquences

Reprends la classe imaginaire des 25 lecteurs du début du chapitre : 3, 6, 8, 5 et 3 élèves ont lu 0, 1, 2, 3 et 4 livres. Calcule la fréquence de chaque valeur, en nombre décimal puis en pour cent. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Commence par l'effectif total : c'est la somme des effectifs.

Indice 2

Divise chaque effectif par 25. Par exemple, $\frac{3}{25} = \frac{12}{100}$.

Indice 3

Point délicat : contrôle que la somme des fréquences vaut 1.

Réponse

On calcule d'abord l'effectif total :

$$\begin{aligned} N &= 3 + 6 + 8 + 5 + 3 \\ &= 25 \end{aligned}$$

Nombre de livres	0	1	2	3	4
Fréquence	$0{,}12$	$0{,}24$	$0{,}32$	$0{,}2$	$0{,}12$
En pour cent	12	24	32	20	12

Contrôle : la somme des fréquences vaut bien 1.

$$\begin{aligned} &0{,}12 + 0{,}24 + 0{,}32 \\ &\quad + 0{,}2 + 0{,}12 = 1 \end{aligned}$$

Le mot du prof. Tu sais maintenant écrire une fréquence de trois façons. Garde le réflexe du contrôle : la somme des fréquences vaut 1.

Effectifs cumulés

Compter « au plus »

Devine : Au plus un

Reprends la classe imaginaire des frères et sœurs.

Nombre de frères et sœurs	0	1	2	3	4
Effectif	4	7	5	3	1

Combien d'élèves ont **au plus** 1 frère ou sœur ?

A. 7 élèves.

Faux.

Ce sont les élèves qui ont exactement 1 frère ou sœur. « Au plus 1 » compte aussi 0.

B. 4 élèves.

Faux.

Ce sont seulement les élèves qui n'ont ni frère ni sœur. Il faut ajouter ceux qui en ont 1.

C. 20 élèves.

Faux.

20 est l'effectif total. Certains élèves ont 2 frères et sœurs ou plus.

D. 11 élèves.

Juste.

Juste : $4 + 7 = 11$.

Correction

« Au plus 1 » veut dire 0 ou 1. On additionne les effectifs de ces deux valeurs : $4 + 7 = 11$.

Donc 11 élèves ont au plus 1 frère ou sœur.

En clair. « Au plus 2 » signifie « 2 ou moins ». « Au moins 3 » signifie « 3 ou plus ».

Pour compter « au plus », on additionne les effectifs depuis la plus petite valeur : on les **cumule**.

Définition : Effectif cumulé

Les valeurs d'un caractère quantitatif sont rangées dans l'ordre croissant. L'**effectif cumulé** d'une valeur est la somme de l'effectif de cette valeur et des effectifs de toutes les valeurs plus petites qu'elle.

L'effectif cumulé de la plus petite valeur est son effectif. L'effectif cumulé de la plus grande valeur est l'effectif total N.

Exemple : les effectifs cumulés de la classe

On range les valeurs dans l'ordre croissant, puis on cumule.

Nombre de frères et sœurs	0	1	2	3	4
Effectif	4	7	5	3	1
Effectif cumulé	4	11	16	19	20

On lit : « 16 élèves ont au plus 2 frères et sœurs ».

Le dernier effectif cumulé, 20, est l'effectif total.

La méthode, puis « au moins »

Méthode : dresser le tableau des effectifs cumulés

1. **Ranger.** Écris les valeurs dans l'ordre croissant, avec leurs effectifs.
2. **Recopier.** L'effectif cumulé de la plus petite valeur est son effectif.
3. **Ajouter.** Pour la valeur suivante, ajoute son effectif à l'effectif cumulé précédent. Recommence jusqu'à la dernière valeur.
4. **Contrôler.** Le dernier effectif cumulé doit être égal à l'effectif total N.

Exemple : les passagers d'un bus imaginaire

Pendant 30 jours, le chauffeur d'un bus imaginaire compte les passagers qui montent au premier arrêt (série fictive).

Nombre de passagers	0	1	2	3	4
Nombre de jours	5	9	8	6	2
Effectif cumulé	5	14	22	28	30

Calculs : $5 + 9 = 14$, puis $14 + 8 = 22$, puis $22 + 6 = 28$, puis $28 + 2 = 30$.

Contrôle : 30 est bien le nombre total de jours.

Et « au moins » ? On part de l'effectif total et on retire ce qui ne convient pas. Par exemple, combien de jours le bus a-t-il eu au moins 3 passagers ?

Les autres jours, le bus a eu au plus 2 passagers. Il y a 22 jours de ce type. Donc le bus a eu au moins 3 passagers pendant $30 - 22 = 8$ jours.

Vérification directe : $6 + 2 = 8$.

> **Vérifie : Lire le tableau**

Avec le tableau du bus, combien de jours le bus a-t-il eu **au moins** 2 passagers ?

A. 16 jours.

Juste.

Juste : $30 - 14 = 16$, ou directement $8 + 6 + 2 = 16$.

B. 22 jours.

Faux.

22 compte les jours avec au plus 2 passagers.

C. 14 jours.

Faux.

14 compte les jours avec au plus 1 passager. Il faut le retirer de 30.

D. 8 jours.

Faux.

8 compte seulement les jours avec exactement 2 passagers.

Correction

« Au moins 2 » veut dire 2, 3 ou 4. Les autres jours, le bus a eu au plus 1 passager : l'effectif cumulé de 1 vaut 14.

Donc $30 - 14 = 16$ jours conviennent.

Contrôle : $8 + 6 + 2 = 16$.

Un piège, la rédaction, puis à toi

Attention : ranger avant de cumuler

✗ Un tableau de frères et sœurs (série fictive) est écrit dans le désordre : valeurs 3, 0, 2, 1, d'effectifs 2, 5, 4, 1. Sami cumule dans cet ordre. Il lit « 7 élèves ont au plus 0 frère ou sœur ».

✓ On range d'abord : valeurs 0, 1, 2, 3, d'effectifs 5, 1, 4, 2. Les effectifs cumulés sont 5, 6, 10 et 12. Seuls 5 élèves ont au plus 0 frère ou sœur.

Remarque : Coin devoir : rédiger une lecture d'effectif cumulé

En devoir, on cite le nombre lu dans le tableau, puis on conclut par une phrase. Par exemple, pour le bus : « L'effectif cumulé de la valeur 2 est 22. Donc le bus a eu au plus 2 passagers pendant 22 jours. »

Pour « au moins », on écrit aussi le calcul : « $30 - 22 = 8$. Donc le bus a eu au moins 3 passagers pendant 8 jours. »

À toi : Les livres des vacances

Reprends la classe imaginaire des 25 lecteurs : 3, 6, 8, 5 et 3 élèves ont lu 0, 1, 2, 3 et 4 livres. Dresse le tableau des effectifs cumulés. Combien d'élèves ont lu au plus 3 livres ? Combien en ont lu au moins 2 ? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Range les valeurs, recopie le premier effectif, puis ajoute les effectifs un par un.
Indice 2
Les effectifs cumulés commencent par 3, puis $3 + 6 = 9$.
Indice 3
Point délicat : « au moins 2 » se calcule avec l'effectif cumulé de 1, pas avec celui de 2.

Réponse
Effectifs cumulés : 3, 9, 17, 22 et 25. Contrôle : le dernier vaut bien $N = 25$.

- Au plus 3 livres : on lit l'effectif cumulé de 3, donc 22 élèves.
- Au moins 2 livres : les autres élèves ont lu au plus 1 livre, et ils sont 9. Donc $25 - 9 = 16$ élèves. Contrôle : $8 + 5 + 3 = 16$.

Le mot du prof. Un effectif cumulé répond à une question « au plus ». Avec l'effectif total, il répond aussi à une question « au moins ».

Fréquences cumulées

Une part « au plus »

Devine : Quelle part ?

Dans la classe imaginaire des frères et sœurs, 16 élèves sur 20 ont au plus 2 frères et sœurs. Quelle part de la classe cela représente-t-il ?

A. 16 pour cent.
Faux.
Il y a 16 élèves, mais la classe n'a pas 100 élèves.

B. $0{,}25$, soit 25 pour cent.
Faux.
C'est la fréquence de la seule valeur 2 : $\dfrac{5}{20}$.

C. $0{,}8$, soit 80 pour cent.
Juste.
Juste : $\dfrac{16}{20} = 0{,}8$.

D. $1{,}25$, soit 125 pour cent.
Faux.

Tu as calculé $\frac{20}{16}$. Une part ne dépasse jamais 1.

Correction

On divise l'effectif cumulé par l'effectif total :

$$\frac{16}{20} = \frac{80}{100} = 0{,}8$$

Donc 80 pour cent des élèves ont au plus 2 frères et sœurs.

Ce quotient s'appelle une **fréquence cumulée**.

En clair. Une fréquence cumulée est une fréquence « au plus ». Elle se calcule comme une fréquence, avec l'effectif cumulé à la place de l'effectif.

Définition : Fréquence cumulée

Les valeurs d'un caractère quantitatif sont rangées dans l'ordre croissant. La **fréquence cumulée** d'une valeur est le quotient de son effectif cumulé par l'effectif total N :

$$\text{fréquence cumulée} = \frac{\text{effectif cumulé de la valeur}}{N}.$$

La fréquence cumulée de la plus grande valeur est égale à 1, c'est-à-dire 100 pour cent.

Exemple : les fréquences cumulées de la classe

Nombre de frères et sœurs	0	1	2	3	4
Effectif cumulé	4	11	16	19	20
Fréquence cumulée	$0{,}2$	$0{,}55$	$0{,}8$	$0{,}95$	1
En pour cent	20	55	80	95	100

On lit : « 55 pour cent des élèves ont au plus 1 frère ou sœur ».

La dernière fréquence cumulée vaut 1, soit 100 pour cent.

Un autre chemin. On peut aussi cumuler les fréquences elles-mêmes. Dans la classe des frères et sœurs, $0{,}2 + 0{,}35 = 0{,}55$, puis $0{,}55 + 0{,}25 = 0{,}8$. On retrouve les fréquences cumulées du tableau.

La méthode

Méthode : calculer des fréquences et des fréquences cumulées

1. **Calculer** l'effectif total N.

2. **Diviser.** Divise chaque effectif par N : tu obtiens les fréquences. Divise chaque effectif cumulé par N : tu obtiens les fréquences cumulées.
3. **Écrire** le résultat en fraction, en nombre décimal ou en pour cent. Pour passer en pour cent, multiplie le nombre décimal par 100.
4. **Contrôler.** La somme des fréquences vaut 1. La dernière fréquence cumulée vaut aussi 1.

Exemple : les livres des vacances

Reprends les 25 lecteurs de la classe imaginaire.

Nombre de livres	0	1	2	3	4
Effectif cumulé	3	9	17	22	25
Fréquence cumulée	$0{,}12$	$0{,}36$	$0{,}68$	$0{,}88$	1

Par exemple, pour la valeur 2 :

$$\frac{17}{25} = \frac{68}{100} = 0{,}68$$

Donc 68 pour cent des élèves ont lu au plus 2 livres. Les autres, soit $100 - 68 = 32$ pour cent, ont lu au moins 3 livres.

Vérifie : Au moins deux livres

Avec ce tableau, quelle part des 25 élèves a lu **au moins** 2 livres ?

A. 36 pour cent.

Faux.

C'est la part des élèves qui ont lu au plus 1 livre.

B. 68 pour cent.

Faux.

C'est la part des élèves qui ont lu au plus 2 livres.

C. 88 pour cent.

Faux.

C'est la part des élèves qui ont lu au plus 3 livres.

D. 64 pour cent.

Juste.

Juste : $100 - 36 = 64$.

Correction

« Au moins 2 » veut dire 2, 3 ou 4 livres. Les autres élèves ont lu au plus 1 livre : ils représentent 36 pour cent.

Donc $100 - 36 = 64$ pour cent des élèves ont lu au moins 2 livres.

Contrôle avec les effectifs :

$$\frac{8 + 5 + 3}{25} = \frac{16}{25} = 0{,}64$$

Vérifier, arrondir, puis à toi

Vérifie : Une liste possible

Voici quatre listes. Laquelle peut être la liste des fréquences cumulées d'une série, dans l'ordre croissant des valeurs ?

A. $0{,}3$; $0{,}2$; $0{,}7$; 1

Faux.
Une fréquence cumulée ne diminue jamais : on ajoute toujours une fréquence positive ou nulle.

B. $0{,}1$; $0{,}4$; $0{,}9$; 1

Juste.
Juste : la liste augmente et se termine par 1.

C. $0{,}4$; $0{,}8$; $1{,}2$; $1{,}5$

Faux.
Une fréquence cumulée ne dépasse jamais 1.

D. $0{,}2$; $0{,}5$; $0{,}6$; $0{,}9$

Faux.
La dernière fréquence cumulée doit valoir 1 : elle compte toute la population.

Correction
D'une valeur à la suivante, une fréquence cumulée augmente ou reste égale. La dernière vaut 1, soit 100 pour cent. Seule la liste $0{,}1$; $0{,}4$; $0{,}9$; 1 remplit ces deux conditions.

Attention : des fréquences arrondies

Reprends le bus imaginaire : 5, 9, 8, 6 et 2 jours sur 30.

Deux fréquences sont exactes : $\frac{9}{30} = 0{,}3$ et $\frac{6}{30} = 0{,}2$.

Arrondies au centième, les trois autres valent $\frac{5}{30} \approx 0{,}17$; $\frac{8}{30} \approx 0{,}27$ et $\frac{2}{30} \approx 0{,}07$.

✗ « La somme fait $1{,}01$: j'ai fait une erreur. »

✓ Il n'y a pas d'erreur de calcul. Ce sont les arrondis qui décalent la somme. Écris alors « valeurs arrondies au centième ».

À toi : Cinquante lecteurs

Dans un collège imaginaire, 50 élèves disent combien de livres ils ont lus pendant les vacances (série fictive).

Nombre de livres	0	1	2	3	4
Effectif	6	14	15	10	5

Calcule les fréquences cumulées. Quelle part des élèves a lu au plus 2 livres ? Quelle part en a lu au moins 3 ? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Commence par les effectifs cumulés.
Indice 2
Divise chaque effectif cumulé par 50. Par exemple, $\frac{6}{50} = \frac{12}{100}$.
Indice 3
Point délicat : « au moins 3 » complète « au plus 2 » jusqu'à 100 pour cent.

Réponse
Effectifs cumulés : 6, 20, 35, 45 et 50. Fréquences cumulées : $0{,}12$; $0{,}4$; $0{,}7$; $0{,}9$; 1.

Au plus 2 livres : $\frac{35}{50} = 0{,}7$, soit 70 pour cent des élèves.

Au moins 3 livres : $100 - 70 = 30$ pour cent. Contrôle : $\frac{10 + 5}{50} = 0{,}3$.

Le mot du prof. Une fréquence cumulée dit « quelle part, au plus ». Avec elle, tu compares des groupes d'effectifs différents.

Moyenne arithmétique

Partager équitablement

Devine : Un partage équitable

Trois amis imaginaires ont lu 2, 3 et 7 livres pendant les vacances. Ils mettent tous leurs livres en commun. Puis ils se les partagent en parts égales. Combien de livres chacun reçoit-il ?

A. 3 livres.
Faux.
3 est la valeur du milieu. Le partage dépend de toutes les valeurs.

B. 4 livres.
Juste.
Juste : $2 + 3 + 7 = 12$ et $12 \div 3 = 4$.

C. 5 livres.

Faux.
Tu as calculé $\dfrac{3+7}{2}$: le premier ami est oublié.

D. 12 livres.

Faux.
12 est le total des livres, avant le partage.

Correction
On réunit les livres : $2+3+7=12$. On partage en 3 parts égales : $12 \div 3 = 4$.

Chacun reçoit 4 livres. Ce nombre est la **moyenne** des trois valeurs.

En clair. La moyenne est la part de chacun après un partage égal.

Pour une liste de nombres, on additionne les nombres. Puis on divise la somme par le nombre de valeurs.

Exemple : la moyenne de quatre notes

Aux quatre contrôles du trimestre, Salma, une élève imaginaire, a obtenu 12, 15, 9 et 14 sur 20. On ajoute ses notes, puis on divise par 4 :

$$\frac{12+15+9+14}{4} = \frac{50}{4} = 12{,}5$$

Sa moyenne est $12{,}5$ sur 20. Ce n'est aucune de ses quatre notes.

Définition : Moyenne arithmétique

Une série statistique a pour valeurs x_1, x_2, ..., x_p, d'effectifs respectifs n_1, n_2, ..., n_p. Son effectif total est $N = n_1 + n_2 + \cdots + n_p$. La **moyenne arithmétique** de la série est le nombre

$$m = \frac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + \cdots + n_p \times x_p}{N}.$$

Lorsque chaque valeur a pour effectif 1, la moyenne est la somme des valeurs divisée par le nombre de valeurs.

Exemple : une note qui revient plusieurs fois

Voici les notes d'un contrôle sur 20, dans une classe imaginaire de 20 élèves (série fictive).

Note	8	10	12	14	16
Effectif	2	5	6	4	3
Effectif $\times$ note	16	50	72	56	48

Chaque note compte autant de fois que son effectif. On additionne les produits :

$$16 + 50 + 72 + 56 + 48 = 242$$

L'effectif total est $N = 20$, donc :

$$m = \frac{242}{20} = 12{,}1$$

La méthode et son contrôle

Méthode : calculer une moyenne arithmétique

1. **Multiplier.** Ajoute au tableau une ligne « effectif $\times$ valeur ».
2. **Additionner** tous ces produits.
3. **Diviser** la somme par l'effectif total N.
4. **Contrôler.** La moyenne est comprise entre la plus petite et la plus grande valeur.

Exemple : les passagers du bus

Reprends le bus imaginaire, observé pendant 30 jours.

Nombre de passagers	0	1	2	3	4
Nombre de jours	5	9	8	6	2
Produit	0	9	16	18	8

Somme des produits :

$$0 + 9 + 16 + 18 + 8 = 51$$

On divise par les 30 jours :

$$m = \frac{51}{30} = 1{,}7$$

Le bus a eu en moyenne $1{,}7$ passager par jour. Contrôle : $1{,}7$ est bien compris entre 0 et 4.

Une moyenne de $1{,}7$ passager ? Aucun jour, le bus n'a eu $1{,}7$ passager : on compte des personnes entières.

Une moyenne n'est donc pas forcément une valeur de la série. Elle résume toute la série par un seul nombre.

> **Trouve l'erreur : Un résultat surprenant**

Pour la série des notes du contrôle (de 8 à 16 sur 20), Omar trouve une moyenne de $48{,}4$. Quelle erreur a-t-il faite ?

A. Il a oublié une note dans la somme.

Faux.

Oublier un produit rend la somme plus petite. La moyenne serait plus petite, jamais $48{,}4$.

B. Il a additionné les effectifs au lieu des produits.

Faux.

La somme des effectifs vaut 20. Divisée par 20, elle donne 1, pas $48{,}4$.

C. Aucune : une moyenne peut dépasser la plus grande note.

Faux.

Faux : une moyenne est toujours comprise entre la plus petite et la plus grande valeur.

D. Il a divisé par 5, le nombre de notes différentes.

Juste.

Juste : $\dfrac{242}{5} = 48{,}4$. Il fallait diviser par $N = 20$.

Correction

La moyenne doit être comprise entre 8 et 16 : $48{,}4$ est impossible.

Omar a divisé la somme des produits par 5 : $\dfrac{242}{5} = 48{,}4$.

Le bon diviseur est l'effectif total $N = 20$, d'où $m = 12{,}1$.

Attention : chaque valeur compte autant de fois que son effectif

✗ « 4 élèves ont 9 et 1 élève a 19. La moyenne vaut $\dfrac{9+19}{2} = 14$. »

✓ Il y a 5 élèves, pas 2. On multiplie chaque note par son effectif :

$$\frac{4 \times 9 + 1 \times 19}{5}$$
$$= \frac{55}{5} = 11$$

La moyenne est plus proche de 9, la note la plus fréquente.

La moyenne avec les fréquences

Devine : Avec les fréquences

Dans la classe imaginaire du contrôle, les fréquences des notes 8, 10, 12, 14 et 16 sont $0{,}1$; $0{,}25$; $0{,}3$; $0{,}2$ et $0{,}15$.

Calcule d'abord les cinq produits, puis leur somme :

$$\begin{aligned} &0{,}1 \times 8 + 0{,}25 \times 10 \\ &\quad + 0{,}3 \times 12 + 0{,}2 \times 14 \\ &\quad + 0{,}15 \times 16 \end{aligned}$$

Que trouves-tu ?

A. $1{,}21$

Faux.

Ton résultat est dix fois trop petit. Vérifie la place de la virgule dans tes produits. Par exemple, $0{,}3 \times 12 = 3{,}6$.

B. $12{,}1$

Juste.

Juste : c'est exactement la moyenne m de la classe.

C. 60

Faux.

60 est la somme $8 + 10 + 12 + 14 + 16$, sans les fréquences.

D. 12

Faux.

12 est la note du milieu. Le calcul donne un peu plus.

Correction

Les cinq produits valent $0{,}8$; $2{,}5$; $3{,}6$; $2{,}8$ et $2{,}4$. On les additionne :

$$\begin{aligned} &0{,}8 + 2{,}5 + 3{,}6 + 2{,}8 + 2{,}4 \\ &= 12{,}1 \end{aligned}$$

On retrouve la moyenne $m = 12{,}1$ calculée avec les effectifs. Ce n'est pas un hasard : c'est la propriété suivante.

Propriété : Moyenne et fréquences

Avec les notations de la moyenne arithmétique, on note f_1, f_2, ..., f_p les fréquences des valeurs x_1, x_2, ..., x_p. Alors

$$m = f_1 \times x_1 + f_2 \times x_2 + \cdots + f_p \times x_p.$$

Remarque : Admis

Ce résultat est admis. Tu peux l'utiliser dès que tu connais les fréquences d'une série.

L'exemple suivant le contrôle sur une autre série. Un exemple ne prouve pas une propriété : il l'illustre seulement.

Exemple : deux calculs, une même moyenne

Reprends la classe imaginaire des frères et sœurs, d'effectif total $N = 20$.

Avec les effectifs.

$$\begin{aligned} m &= \frac{\begin{aligned}4 \times 0 + 7 \times 1 + 5 \times 2 \\ + 3 \times 3 + 1 \times 4\end{aligned}}{20} \\ &= \frac{30}{20} = 1{,}5 \end{aligned}$$

Avec les fréquences.

$$\begin{aligned} m &= 0{,}2 \times 0 + 0{,}35 \times 1 \\ &\quad + 0{,}25 \times 2 + 0{,}15 \times 3 \\ &\quad + 0{,}05 \times 4 \\ &= 1{,}5 \end{aligned}$$

Les deux calculs donnent la même moyenne : $1{,}5$ frère ou sœur par élève.

La rédaction, puis à toi

Remarque : Coin devoir : rédiger le calcul d'une moyenne

En devoir, on écrit la formule avec les nombres, puis le résultat avec son unité. Par exemple, pour le bus imaginaire :

$$\begin{aligned} m &= \frac{\begin{aligned}5 \times 0 + 9 \times 1 + 8 \times 2 \\ + 6 \times 3 + 2 \times 4\end{aligned}}{30} \\ &= \frac{51}{30} = 1{,}7 \end{aligned}$$

Puis on conclut : « La moyenne est de $1{,}7$ passager par jour. »

Termine par le contrôle : la moyenne est comprise entre la plus petite et la plus grande valeur.

À toi : Cinquante lecteurs, en moyenne

Reprends les 50 élèves du collège imaginaire : 6, 14, 15, 10 et 5 élèves ont lu 0, 1, 2, 3 et 4 livres. Calcule la moyenne avec les effectifs. Vérifie-la ensuite avec les fréquences. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Ajoute la ligne des produits « effectif $\times$ valeur ».

Indice 2
Calcule chaque produit. Par exemple, pour la valeur 2 : $15 \times 2 = 30$.
Indice 3
Point délicat : divise par l'effectif total 50, pas par le nombre de valeurs 5.

Réponse
Avec les effectifs. La somme des produits vaut :

$$\begin{aligned} &0 + 14 + 30 + 30 + 20 \\ &= 94 \end{aligned}$$

On divise par l'effectif total :

$$m = \frac{94}{50} = 1{,}88$$

La moyenne est de $1{,}88$ livre par élève.

Avec les fréquences. Les fréquences sont $0{,}12$; $0{,}28$; $0{,}3$; $0{,}2$ et $0{,}1$.

$$\begin{aligned} &0{,}12 \times 0 + 0{,}28 \times 1 \\ &\quad + 0{,}3 \times 2 + 0{,}2 \times 3 \\ &\quad + 0{,}1 \times 4 = 1{,}88 \end{aligned}$$

Contrôle : $1{,}88$ est compris entre 0 et 4.

Le mot du prof. Tu peux maintenant répondre à la question du début. Pour les 25 lecteurs :

$$\begin{aligned} m &= \frac{\begin{aligned} &0 \times 3 + 1 \times 6 + 2 \times 8 \\ &+ 3 \times 5 + 4 \times 3 \end{aligned}}{25} \\ &= \frac{49}{25} = 1{,}96 \end{aligned}$$

Ils ont lu en moyenne $1{,}96$ livre par élève.

Tu sais calculer une moyenne de deux façons : avec les effectifs ou avec les fréquences. Le contrôle final t'aide à repérer une erreur de division.

Diagramme en bâtons et polygone des effectifs cumulés

Le diagramme en bâtons

Rappel de 1re année. Dans un **diagramme en bâtons**, chaque valeur reçoit un segment vertical, appelé bâton. Sa hauteur est l'effectif de cette valeur.

Devine : Le bâton le plus haut

Dans une classe imaginaire de 24 élèves, on a relevé les pointures de chaussures (série fictive).

Pointure	36	37	38	39	40	41
Effectif	2	4	7	6	3	2

Sur un diagramme en bâtons de cette série, quel bâton sera le plus haut ?

A. Celui de la pointure 41.

Faux.

41 est la plus grande pointure, mais seulement 2 élèves la portent.

B. Celui de la pointure 39.

Faux.

Son effectif est 6 : un autre bâton est plus haut.

C. Celui de la pointure 36.

Faux.

Son effectif est 2 : c'est l'un des plus petits bâtons.

D. Celui de la pointure 38.

Juste.

Juste : son effectif, 7, est le plus grand.

Correction

La hauteur d'un bâton est l'effectif de la valeur. Le plus grand effectif est 7, celui de la pointure 38.

C'est donc le bâton de la pointure 38 qui est le plus haut.

Méthode : construire un diagramme en bâtons

1. **Tracer les axes.** Les valeurs vont sur l'axe horizontal. Les effectifs vont sur l'axe vertical. Choisis une graduation régulière, par exemple 1 carreau pour 1 élève.
2. **Placer les valeurs.** Écris chaque valeur sous l'axe horizontal, dans l'ordre croissant.
3. **Tracer les bâtons.** Pour chaque valeur, trace un segment vertical dont la hauteur est son effectif.
4. **Donner un titre** et nommer les deux axes.

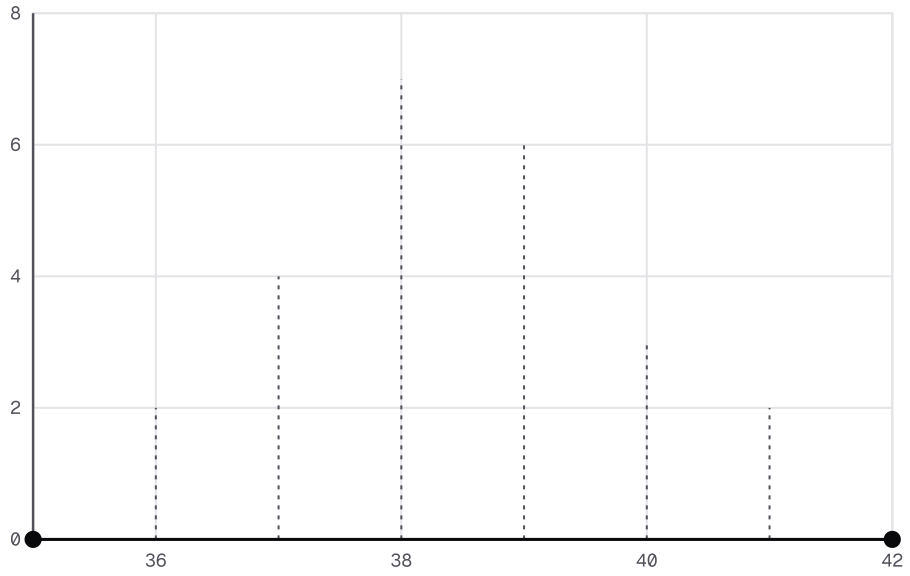


Diagramme en bâtons des pointures d'une classe imaginaire de 24 élèves (série fictive).

Lire le diagramme

Exemple : lire le diagramme

- Le bâton de la pointure 39 a pour hauteur 6 : 6 élèves chaussent du 39.
- La somme des hauteurs est $2+4+7+6+3+2=24$: c'est l'effectif total.
- La fréquence de la pointure 38 est $\frac{7}{24}$. Arrondie au centième, elle vaut environ $0{,}29$, soit environ 29 pour cent.

Vérifie : Les grandes pointures

D'après le diagramme, combien d'élèves chaussent du 40 **ou plus** ?

A. 5 élèves.
Juste.
Juste : $3+2=5$.

B. 3 élèves.
Faux.
Tu as oublié les élèves qui chaussent du 41.

C. 2 élèves.
Faux.
Ce sont seulement les élèves qui chaussent du 41.

D. 22 élèves.

Faux.
22 élèves chaussent au plus du 40 : ce n'est pas la question.

Correction
« 40 ou plus » veut dire 40 ou 41. On additionne les hauteurs des deux bâtons : $3 + 2 = 5$. Donc 5 élèves chaussent du 40 ou plus.

Le polygone des effectifs cumulés

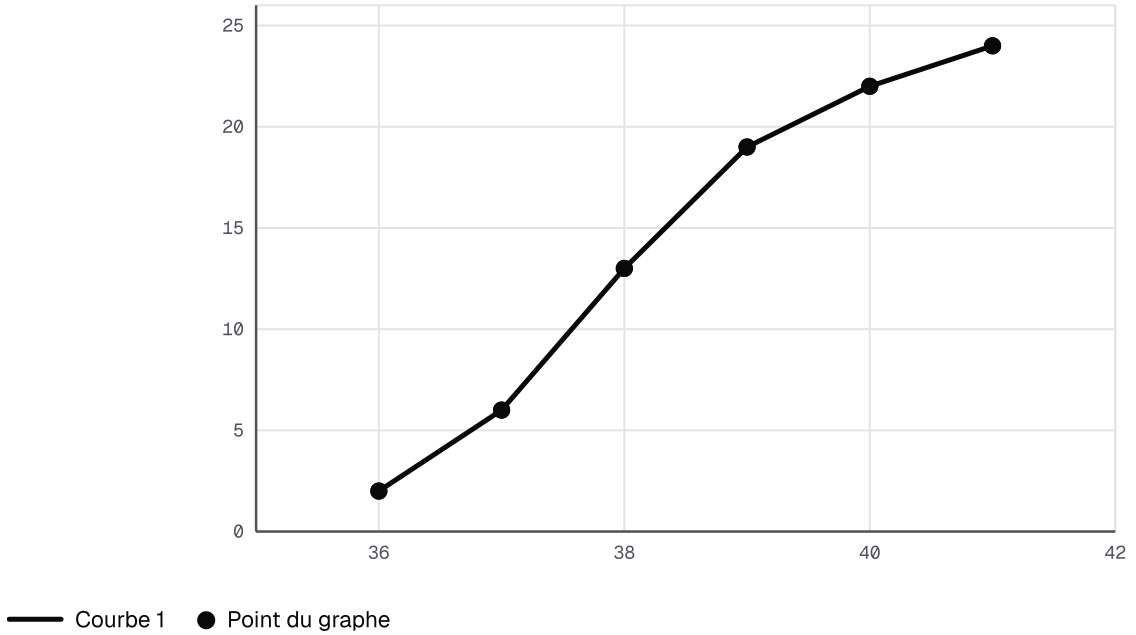
On cumule les effectifs des pointures dans l'ordre croissant.

Pointure	36	37	38	39	40	41
Effectif cumulé	2	6	13	19	22	24

Chaque colonne donne un point : la pointure sur l'axe horizontal, l'effectif cumulé sur l'axe vertical.

On relie ces points dans l'ordre par des segments, mis bout à bout. On obtient le **polygone des effectifs cumulés**.

Pour le tracer sur ton cahier, garde les axes et la graduation de la méthode des bâtons. Seule la hauteur change : c'est l'effectif cumulé.



Polygone des effectifs cumulés des pointures de la même classe imaginaire (série fictive).

Exemple : lire le polygone

- Le point de la pointure 39 est à la hauteur 19 : 19 élèves chaussent au plus du 39.
- Le dernier point est à la hauteur 24 : c'est l'effectif total.

- Une pointure entre 38 et 39 n'existe pas dans cette série. On lit donc les effectifs cumulés seulement aux points marqués.

Attention : un point du polygone n'est pas un bâton

✗ « Le point de la pointure 39 est à la hauteur 19. Donc 19 élèves chaussent du 39. »

✓ La hauteur 19 compte les élèves qui chaussent **au plus** du 39.

Pour la pointure 39 seule, on retire l'effectif cumulé de 38 : $19 - 13 = 6$ élèves. C'est bien la hauteur du bâton de 39.

Vérifie : Lire « au moins »

D'après le polygone, combien d'élèves chaussent **au moins** du 39 ?

A. 19 élèves.

Faux.
19 élèves chaussent au plus du 39.

B. 11 élèves.

Juste.
Juste : $24 - 13 = 11$.

C. 13 élèves.

Faux.
13 élèves chaussent au plus du 38 : il faut les retirer de 24.

D. 6 élèves.

Faux.
6 élèves chaussent exactement du 39. Il manque le 40 et le 41.

Correction
Les élèves qui ne conviennent pas chaussent au plus du 38 : le point de 38 est à la hauteur 13.

Donc $24 - 13 = 11$ élèves chaussent au moins du 39.

Contrôle avec les bâtons : $6 + 3 + 2 = 11$.

Une série plus longue

Quand la série a beaucoup de valeurs, on la garde en tableau. Tu traceras ses graphiques sur ton cahier, avec la même méthode. Voici les passagers qui montent au premier arrêt d'un autre bus imaginaire, pendant 40 jours (série fictive).

Nombre de passagers	0	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de jours	3	5	8	9	6	4	3	2

À toi : Préparer les deux graphiques

Pour la série de ce second bus, calcule les effectifs cumulés. Donne ensuite la hauteur de chaque bâton, puis la hauteur de chaque point du polygone des effectifs cumulés. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Les hauteurs des bâtons sont les effectifs du tableau.
Indice 2
Effectifs cumulés : 3, puis $3 + 5 = 8$, puis $8 + 8 = 16$, et ainsi de suite.
Indice 3
Point délicat : le dernier point du polygone doit être à la hauteur 40, l'effectif total.

Réponse
Hauteurs des bâtons, de 0 à 7 passagers : 3, 5, 8, 9, 6, 4, 3 et 2.

Effectifs cumulés : 3, 8, 16, 25, 31, 35, 38 et 40. Ce sont les hauteurs des points du polygone, placés au-dessus de 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7. Contrôle : le dernier effectif cumulé vaut bien 40.

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir : la carte du chapitre

- **Fréquence** d'une valeur : son effectif divisé par N. Elle s'écrit en fraction, en nombre décimal ou en pour cent. La somme des fréquences vaut 1.
- **Effectif cumulé** : on range les valeurs, puis on additionne les effectifs. Il répond à « au plus ». Pour « au moins », on part de N.
- **Fréquence cumulée** : l'effectif cumulé divisé par N. La dernière vaut 1.
- **Moyenne** m : la somme des produits « effectif $\times$ valeur », divisée par N. C'est aussi la somme des produits « fréquence $\times$ valeur ».
- **Graphiques** : des bâtons de hauteur l'effectif ; un polygone qui relie les points de hauteur l'effectif cumulé.

Exercice-bilan guidé. Dix amis imaginaires disent combien de livres ils ont lus pendant les vacances (série fictive). Réponds aux trois questions, une par une.

Nombre de livres	1	2	3	4
Effectif	1	3	4	2

Vérifie : Question 1 : effectif total et fréquences

Calcule l'effectif total, puis la fréquence de chaque valeur, en nombre décimal et en pour cent.

Indice 1
Additionne les effectifs.
Indice 2
Divise chaque effectif par l'effectif total.
Indice 3
Point délicat : contrôle que la somme des fréquences vaut 1.

Réponse
L'effectif total vaut :

$$N = 1 + 3 + 4 + 2 = 10$$

Fréquences : $0{,}1$; $0{,}3$; $0{,}4$; $0{,}2$, soit 10, 30, 40 et 20 pour cent.

Contrôle : $0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}4 + 0{,}2 = 1$.

Vérifie : Question 2 : effectifs et fréquences cumulés

Calcule les effectifs cumulés et les fréquences cumulées. Combien d'amis ont lu au plus 3 livres ? Quelle part a lu au moins 2 livres ?

Indice 1
Range les valeurs et cumule les effectifs.
Indice 2
Divise chaque effectif cumulé par 10.
Indice 3
Point délicat : « au moins 2 » se calcule avec l'effectif cumulé de 1.

Réponse
Effectifs cumulés : 1, 4, 8 et 10. Fréquences cumulées : $0{,}1$; $0{,}4$; $0{,}8$; 1.

Donc 8 amis ont lu au plus 3 livres.

Au moins 2 livres : $10 - 1 = 9$ amis, soit 90 pour cent.

Vérifie : Question 3 : la moyenne

Calcule la moyenne des livres lus, avec les effectifs puis avec les fréquences.

Indice 1

Ajoute la ligne des produits « effectif $\times$ valeur ».

Indice 2

Calcule chaque produit. Par exemple, pour la valeur 3 : $4 \times 3 = 12$.

Indice 3

Point délicat : divise par 10, l'effectif total.

Réponse

Avec les effectifs.

$$\begin{aligned} m &= \frac{\begin{aligned}&1 \times 1 + 3 \times 2 \\ &+ 4 \times 3 + 2 \times 4\end{aligned}}{10} \\ &= \frac{27}{10} = 2{,}7 \end{aligned}$$

Avec les fréquences.

$$\begin{aligned} &0{,}1 \times 1 + 0{,}3 \times 2 \\ &\quad + 0{,}4 \times 3 + 0{,}2 \times 4 \\ &= 0{,}1 + 0{,}6 + 1{,}2 + 0{,}8 \\ &= 2{,}7 \end{aligned}$$

Contrôle : $2{,}7$ est compris entre 1 et 4.

Vérifie : Question flash : une fréquence

Dans une série d'effectif total 40, une valeur a pour effectif 10. Quelle est sa fréquence ?

A. 4

Faux.

Tu as divisé 40 par 10 : c'est le sens inverse.

B. 10 pour cent

Faux.

10 est l'effectif, pas une part sur 100.

C. $0{,}25$

Juste.

Juste : $\frac{10}{40} = 0{,}25$, soit 25 pour cent.

Correction

On divise l'effectif par l'effectif total : $\frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 0{,}25$, soit 25 pour cent.

Vérifie : Question flash : le dernier effectif cumulé

Que vaut toujours le dernier effectif cumulé d'une série ?

A. L'effectif total N.

Juste.

Juste : il compte tous les individus.

B. Le plus grand effectif.

Faux.

Le plus grand effectif ne compte qu'une seule valeur.

C. Le nombre 1.

Faux.

C'est la dernière fréquence cumulée qui vaut 1.

D. Le nombre de valeurs.

Faux.

Un effectif cumulé compte des individus, pas des valeurs.

Correction

Le dernier effectif cumulé additionne les effectifs de toutes les valeurs. Il est donc égal à l'effectif total N.

Vérifie : Question flash : une moyenne

Quelle est la moyenne de la liste 2, 2 et 8 ?

A. 5

Faux.

Tu as calculé $\dfrac{2+8}{2}$: la valeur 2 compte deux fois.

B. 2

Faux.

2 est la valeur la plus fréquente, pas la moyenne.

C. 12

Faux.

12 est la somme. Il faut encore la diviser par 3.

D. 4

Juste.

Juste : $\dfrac{2+2+8}{3} = \dfrac{12}{3} = 4$.

Correction

$\dfrac{2+2+8}{3} = \dfrac{12}{3} = 4$. Chaque valeur compte autant de fois qu'elle apparaît.

Le mot du prof. Tu sais maintenant lire une série, la cumuler et la résumer par sa moyenne. Ces outils te serviront aussi dans les autres disciplines, chaque fois qu'un tableau de nombres apparaît.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Statistique » (2ac · general · mathematiques)