BURHAN

Pyramide et cône de révolution

2ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/pyramide-et-cone-de-revolution/resume

Chapitre	Semestre
Pyramide et cône de révolution	Semestre 2

La pyramide

Ce Résumé rassemble l'essentiel du chapitre. Une **pyramide** a pour base un polygone ; son sommet S est un point situé au-dessus de la base.

Pour chaque solide, tu retrouves ici les mots, les méthodes, les formules et les pièges.

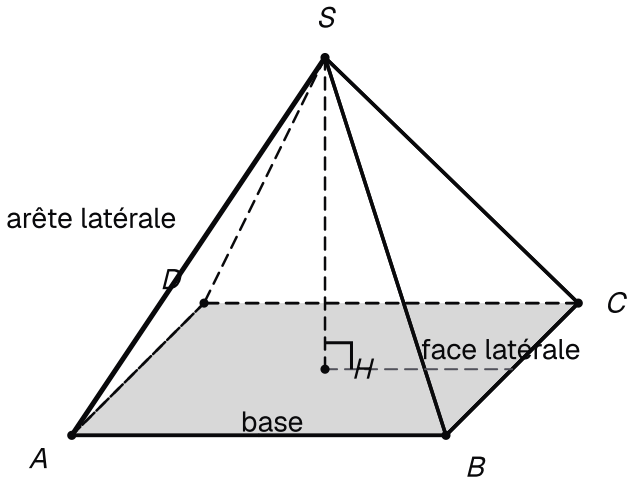
Définition : Pyramide

Une **pyramide** est un solide formé :

- d'une **base**, qui est un polygone (triangle, carré, rectangle…) ;
- d'un point S situé hors du plan de la base, appelé le **sommet** de la pyramide ;
- de **faces latérales** : ce sont des triangles qui ont tous le sommet S pour sommet commun, et dont le troisième côté est un côté de la base.

Les côtés des faces latérales qui passent par S sont les **arêtes latérales**. Une pyramide se nomme par son sommet puis sa base : $SABCD$ a pour sommet S et pour base $ABCD$.

La **hauteur** de la pyramide est le segment $[SH]$ qui va du sommet S au point H du plan de la base situé à la verticale de S. Le segment $[SH]$ fait un angle droit avec chaque droite de la base qui passe par H. Le point H s'appelle le **pied** de la hauteur, et la longueur SH s'appelle aussi la hauteur.



Vocabulaire de la pyramide : base ABCD, sommet S, arête latérale [SA], face latérale SBC et hauteur [SH].

Définition : Pyramide régulière

Une pyramide est **régulière** lorsque :

- sa base est un **polygone régulier** : tous ses côtés ont la même longueur et tous ses sommets sont sur un même cercle (triangle équilatéral, carré…) ;
- le pied H de sa hauteur est le **centre** de ce cercle. Pour une base carrée, c'est le point d'intersection des diagonales.

Exemple : une pyramide à base hexagonale

La pyramide $SABCDEF$ a pour base l'hexagone $ABCDEF$. Un hexagone a 6 côtés.

- Faces : 6 faces latérales et 1 base, soit 7 faces.
- Arêtes : 6 arêtes latérales et 6 côtés de base, soit 12 arêtes.
- Sommets : les 6 sommets de la base et le sommet S, soit 7 sommets.

Méthode : Décrire une pyramide ou un cône

1. **Trouver la base** : un polygone pour une pyramide, un disque pour un cône.
2. **Trouver le sommet** : le point où se rejoignent toutes les arêtes latérales, ou toutes les génératrices.
3. **Nommer chaque élément** : faces et arêtes latérales, hauteur ; apothème si la pyramide est régulière ; rayon et génératrice pour un cône.

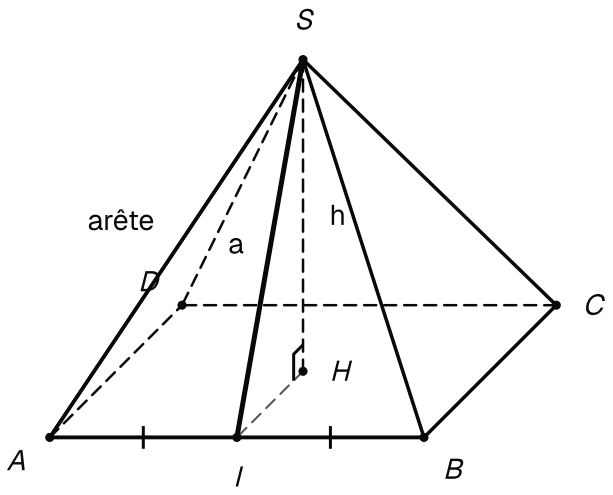
4. **Compter** : si la base a n côtés, la pyramide a n faces latérales, n arêtes latérales et $n+1$ sommets.

Propriété : Arêtes et faces d'une pyramide régulière

Dans une pyramide régulière de sommet S :

- toutes les arêtes latérales ont la **même longueur** ;
- les faces latérales sont donc des triangles **isocèles** en S, et leurs hauteurs issues de S ont toutes la même longueur.

Cette longueur commune s'appelle l'**apothème** de la pyramide régulière.



Pyramide régulière : la hauteur [SH], l'apothème [SI] et l'arête [SA] partent tous du sommet S.

Exemple : calculer un apothème

$SABCD$ est une pyramide régulière à base carrée de côté $16\ \text{cm}$, de hauteur $SH = 15\ \text{cm}$. Le point I est le milieu de $[AB]$.

Le segment qui joint les milieux de $[AB]$ et de $[CD]$ passe par le centre H du carré. Il mesure un côté, et H est son milieu. Donc $HI = 16 \div 2 = 8\ \text{cm}$.

Par définition de la hauteur, le triangle SHI est rectangle en H. D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} SI^2 &= 15^2 + 8^2 \\ &= 225 + 64 \\ &= 289 \end{aligned}$$

Donc $SI = \sqrt{289} = 17$. L'apothème mesure $17\ \text{cm}$.

Attention : Hauteur, arête latérale, apothème

✗ Prendre l'apothème ou une arête latérale pour la hauteur.

✓ Dans une pyramide régulière, il faut distinguer trois segments issus de S.

- La hauteur $[SH]$ descend du sommet jusqu'au pied H, le centre de la base.
- L'apothème $[SI]$ va jusqu'au milieu I d'un côté de la base.
- L'arête latérale $[SA]$ va jusqu'à un sommet A de la base.

Dans l'exemple, $SH = 15\ \text{cm}$ et $SI = 17\ \text{cm}$. Le triangle SIA est rectangle en I, car $[SI]$ est la hauteur de la face SAB ; et $IA = 8\ \text{cm}$. D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} SA^2 &= 17^2 + 8^2 \\ &= 289 + 64 = 353 \end{aligned}$$

Donc $SA = \sqrt{353} \approx 18{,}8\ \text{cm}$ au dixième, à la calculatrice.

La hauteur est la plus courte des trois. $SH < SI$, car $[SI]$ est l'hypoténuse du triangle SHI. $SI < SA$, car $[SA]$ est l'hypoténuse du triangle SIA.

Perspective cavalière et patrons

Un solide se dessine sur une feuille plate. La **perspective cavalière** est une manière de le dessiner où les arêtes cachées sont en pointillés.

Le **patron**, lui, sert à fabriquer le solide en carton.

Méthode : Représenter un solide en perspective cavalière

1. **Tracer le côté de devant** de la base : il est horizontal et garde sa vraie longueur.
2. **Tracer les fuyantes**, les côtés qui partent vers l'arrière : vers la droite et vers le haut, à $45°$ de l'horizontale, avec la moitié de leur longueur. C'est une convention choisie, suivie dans tout le chapitre. Un carré devient ainsi un parallélogramme ; le disque d'un cône devient un ovale.
3. **Placer le sommet** juste au-dessus du pied de la hauteur : la hauteur, verticale, garde sa vraie longueur.
4. **Tracer les arêtes** : en traits pleins celles qui se voient, en pointillés celles que le solide cache.
5. **Contrôler** : pour une base carrée $ABCD$, $[AB]$ et $[DC]$ sont parallèles sur le dessin, tout comme $[AD]$ et $[BC]$.

Exemple : les arêtes cachées d'une pyramide

Tu dessines la pyramide $SABCD$ à base carrée, avec la convention de la méthode. Le côté $[AB]$ est devant. Le sommet D de la base est au fond, à gauche.

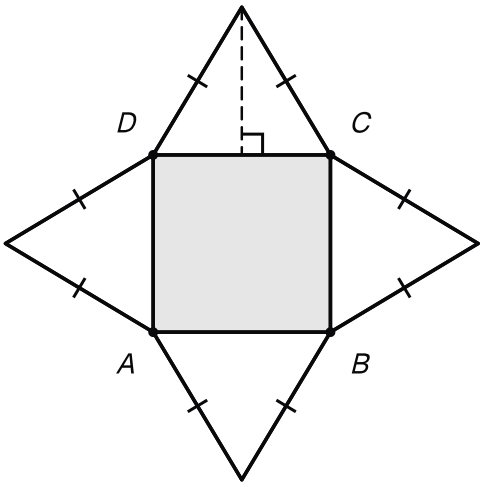
- Le solide cache le point D : les arêtes $[DA]$, $[DC]$ et $[SD]$ sont en pointillés.
- Les 5 autres arêtes, $[AB]$, $[BC]$, $[SA]$, $[SB]$ et $[SC]$, sont en traits pleins.

Refais ce dessin sur ton cahier.

Définition : Patron d'un solide

Un **patron** d'un solide est une figure plane, d'un seul morceau, qui permet de fabriquer ce solide par pliage, sans que deux faces se recouvrent.

Le patron d'une pyramide est formé de sa base et de toutes ses faces latérales : chaque face latérale est accolée par un côté à la base ou à une autre face latérale.



Un patron de pyramide à base carrée, d'un seul morceau : le carré et quatre triangles isocèles accolés à ses côtés.

Méthode : Construire le patron d'une pyramide

1. **Tracer la base** avec ses vraies mesures.
2. **Accoler une face latérale à chaque côté** de la base : un triangle dont les deux autres côtés se tracent au compas, avec la longueur des arêtes latérales.
3. **Contrôler** : deux côtés qui se colleront au pliage ont la même longueur.

Exemple : le patron d'une petite pyramide

Une pyramide régulière a une base carrée de côté $4\ \text{cm}$. Ses arêtes latérales mesurent $5\ \text{cm}$. Son patron, d'un seul morceau, est formé de 5 faces.

Face	Nombre	Mesures
carré (la base)	1	côté $4\ \text{cm}$
triangle isocèle (face latérale)	4	côtés $5\ \text{cm}$, $5\ \text{cm}$ et $4\ \text{cm}$

Chaque triangle touche un côté du carré par son côté de $4\ \text{cm}$. Trace ce patron sur ton cahier, découpe-le, puis plie-le.

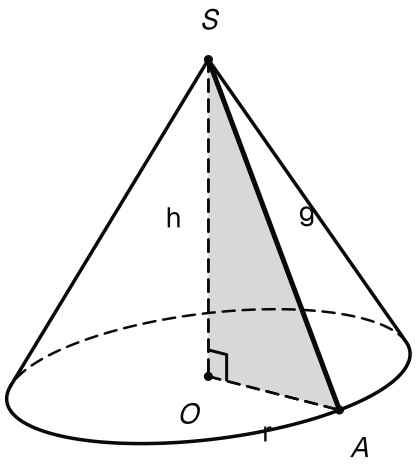
Le cône de révolution

Un **cône de révolution** naît d'un triangle rectangle qui tourne autour d'un côté de l'angle droit. Trois longueurs le décrivent : le rayon r, la hauteur h et la génératrice g. Le théorème de Pythagore les relie.

Définition : Cône de révolution

On fait tourner un triangle SOA rectangle en O autour de la droite (SO). Le solide obtenu est un **cône de révolution**.

- Le point S est le **sommet** du cône.
- La **base** est le disque de centre O et de rayon $r = OA$.
- La **hauteur** du cône est le segment $[SO]$; sa longueur $h = SO$ s'appelle aussi la hauteur.
- Le segment $[SA]$, dans chacune de ses positions pendant la rotation, est une **génératrice** du cône. Sa longueur est notée $g = SA$.



Cône de révolution de sommet S et de base de centre O : rayon r, hauteur h, génératrice g, et l'angle droit en O.

Propriété : Génératrice, rayon et hauteur d'un cône

Dans un cône de révolution de rayon r, de hauteur h et de génératrice g :

$$g^2 = r^2 + h^2.$$

Exemple : calculer une génératrice

Un cône a pour rayon $r = 5\ \text{cm}$ et pour hauteur $h = 12\ \text{cm}$. Par définition du cône de révolution, le triangle SOA est rectangle en O ; son hypoténuse est $[SA]$. D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} g^2 &= 5^2 + 12^2 \\ &= 25 + 144 \\ &= 169 \end{aligned}$$

Donc $g = \sqrt{169} = 13$. La génératrice mesure $13\ \text{cm}$.

Méthode : Calculer une longueur dans un solide par Pythagore

1. **Chercher un triangle rectangle** dans le solide : SHI (hauteur, demi-côté, apothème), SHA (hauteur, demi-diagonale, arête latérale) ou SOA (hauteur, rayon, génératrice).
2. **Repérer l'hypoténuse** : le côté en face de l'angle droit, le plus long des trois.
3. **Écrire l'égalité de Pythagore**, puis calculer : on additionne pour trouver l'hypoténuse, on soustrait pour trouver un autre côté.
4. **Donner la longueur** exacte. Si la racine carrée n'est pas entière, donner une valeur approchée à la calculatrice, en le disant.

Attention : Rayon et diamètre ; génératrice et hauteur

✗ Mettre le diamètre à la place du rayon, ou la génératrice à la place de la hauteur.

✓ Si un énoncé donne un diamètre de $10\ \text{cm}$, le rayon vaut $r = 10 \div 2 = 5\ \text{cm}$.

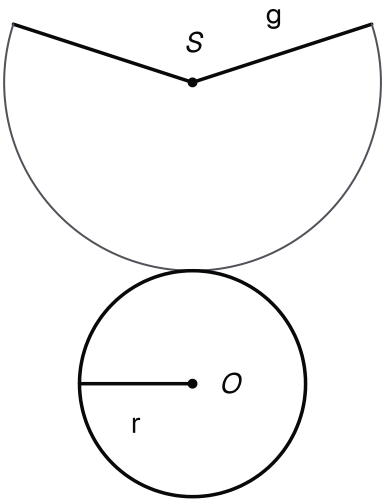
La hauteur joint le sommet au centre O du disque ; la génératrice le joint à un point du cercle de la base. Dans l'exemple, $g = 13\ \text{cm}$ est plus longue que $h = 12\ \text{cm}$.

Propriété : Patron d'un cône de révolution

Le patron d'un cône de révolution de rayon r et de génératrice g est formé :

- d'un **disque** de rayon r, la base ;
- d'un **secteur circulaire** de rayon g, la surface latérale.

L'arc du secteur s'enroule exactement autour du cercle de la base : sa longueur est égale au périmètre de la base, $2\pi r$.



Patron d'un cône : le secteur de centre S et de rayon g, puis le disque de base de rayon r, collé contre l'arc.

Remarque : Résultat admis

Ce résultat est admis. Tu peux le constater en coupant un cône de papier le long d'une génératrice, puis en l'aplatissant.

Méthode : Calculer l'angle du secteur du patron d'un cône

1. **Poser la proportionnalité** : la longueur de l'arc et l'angle du secteur sont proportionnels, et ce fait est admis. Le cercle entier de rayon g mesure $2\pi g$ pour $360°$; l'arc du secteur mesure $2\pi r$.
2. **Calculer l'angle** du secteur : $\alpha = \dfrac{360 \times r}{g}$, en degrés.
3. **Contrôler** : r est plus petit que g, donc l'angle reste plus petit que $360°$.

Exemple : un secteur en quart de disque

Un cône a pour rayon $r = 5\ \text{cm}$ et pour génératrice $g = 20\ \text{cm}$. L'angle du secteur vaut :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{360 \times 5}{20} \\ &= \frac{1\,800}{20} \\ &= 90 \end{aligned}$$

L'angle mesure $90°$: le secteur est un quart de disque de rayon $20\ \text{cm}$. Son arc mesure $2\pi \times 5 = 10\pi\ \text{cm}$, le quart de $2\pi \times 20 = 40\pi\ \text{cm}$.

Dans le patron, dessine ensuite le disque de la base, de rayon $5\ \text{cm}$: il touche l'arc du secteur en un seul point. Ainsi le patron est d'un seul morceau.

Attention : Le secteur du patron d'un cône

✗ Tracer le secteur avec le rayon r de la base.

✓ Le secteur a pour rayon la génératrice g. Son arc a la longueur du cercle de la base, $2\pi r$, et non $2\pi g$.

Aire latérale et aire totale

L'**aire latérale** mesure la surface des côtés d'un solide, sans sa base. Elle dit, par exemple, combien de carton ou de toile il faut. Avec la base en plus, on obtient l'**aire totale**.

Les deux formules de cette section, pour la pyramide régulière et pour le cône, sont admises : on ne les démontre pas.

Définition : Aire latérale et aire totale

- L'**aire latérale** d'une pyramide est la somme des aires de ses faces latérales.
- L'**aire latérale** d'un cône de révolution est l'aire du secteur circulaire de son patron.
- L'**aire totale** d'une pyramide ou d'un cône est la somme de son aire latérale et de l'aire de sa base.

Propriété : Aire latérale d'une pyramide régulière

L'aire latérale d'une pyramide régulière est égale à la moitié du produit du périmètre p de sa base par son apothème a :

$$\mathcal{A} = \frac{p \times a}{2}.$$

Exemple : aires d'une pyramide régulière

Reprends la pyramide à base carrée de côté $16\ \text{cm}$ et d'apothème $a = 17\ \text{cm}$. Le périmètre de la base est $p = 4 \times 16 = 64\ \text{cm}$.

Aire latérale. D'après la formule de la pyramide régulière :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{64 \times 17}{2} \\ &= \frac{1\,088}{2} = 544\end{aligned}$$

L'aire latérale vaut $544\ \text{cm}^2$.

Aire totale. La base a pour aire $\mathcal{B} = 16 \times 16 = 256\ \text{cm}^2$. L'aire totale est $544 + 256 = 800\ \text{cm}^2$.

Propriété : Aire latérale d'un cône de révolution

L'aire latérale d'un cône de révolution de rayon r et de génératrice g est :

$$\mathcal{A} = \pi \times r \times g.$$

Remarque : Formules admises

Ces deux formules d'aire latérale sont admises. Sur un exemple, tu peux contrôler celle de la pyramide régulière en additionnant les aires des faces : ce contrôle n'est pas une preuve.

Exemple : aires d'un cône

Prends le cône de rayon $r = 5\ \text{cm}$ et de génératrice $g = 13\ \text{cm}$.

- Aire latérale : $\mathcal{A} = \pi \times 5 \times 13 = 65\pi\ \text{cm}^2$, et $65\pi \approx 204{,}2\ \text{cm}^2$ au dixième.
- Aire de la base : $\mathcal{B} = \pi \times 5^2 = 25\pi\ \text{cm}^2$.
- Aire totale : $65\pi + 25\pi = 90\pi\ \text{cm}^2$, et $90\pi \approx 282{,}7\ \text{cm}^2$ au dixième.

Méthode : Calculer une aire latérale et une aire totale

1. **Choisir l'outil** : additionner les aires des faces, ou appliquer la formule de la pyramide régulière, ou celle du cône.
2. **Trouver les longueurs qui manquent** : un apothème ou une génératrice, par Pythagore si besoin.
3. **Ajouter l'aire de la base** quand on demande l'aire totale.
4. **Écrire l'unité d'aire** : cm^2, dm^2 ou m^2.

Volumes

Le **volume** d'un solide mesure la place qu'il occupe. Une pyramide ou un cône occupe le tiers du prisme ou du cylindre de même base et de même hauteur.

Les deux formules de volume de cette section sont admises. Rappel de 1AC : $1\ \text{dm}^3 = 1\ \text{L}$.

Propriété : Volume d'une pyramide

Le volume d'une pyramide est égal au tiers du produit de l'aire $\mathcal{B}$ de sa base par sa hauteur h :

$$V = \frac{\mathcal{B} \times h}{3}.$$

Exemple : volume d'une pyramide

La pyramide à base carrée de côté $16\ \text{cm}$ a pour hauteur $h = 15\ \text{cm}$. L'aire de sa base est $\mathcal{B} = 16 \times 16 = 256\ \text{cm}^2$.

$$\begin{aligned} V &= \frac{256 \times 15}{3} \\ &= \frac{3\,840}{3} = 1\,280 \end{aligned}$$

Le volume vaut $1\,280\ \text{cm}^3$, soit $1{,}28\ \text{L}$.

Propriété : Volume d'un cône de révolution

Le volume d'un cône de révolution de rayon r et de hauteur h est :

$$V = \frac{\pi \times r^2 \times h}{3}.$$

Remarque : Formules admises

Ces deux formules de volume sont admises. Une expérience de remplissage confirme celle de la pyramide sur un exemple, sans la prouver.

Exemple : volume d'un cône

Le cône de rayon $r = 5\ \text{cm}$ a pour hauteur $h = 12\ \text{cm}$.

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi \times 5^2 \times 12}{3} \\ &= \frac{300\pi}{3} \\ &= 100\pi \end{aligned}$$

Le volume exact est $100\pi\ \text{cm}^3$. Au dixième, $100\pi \approx 314{,}2\ \text{cm}^3$, soit $V \approx 0{,}3\ \text{L}$ au dixième de litre.

Méthode : Calculer un volume

1. **Calculer l'aire de la base** : aire du polygone, ou $\pi \times r^2$ pour un disque.
2. **Obtenir la hauteur** : elle est donnée, ou elle se calcule par Pythagore.
3. **Appliquer la formule** sans oublier la division par 3.
4. **Écrire l'unité de volume**, puis convertir si on le demande : $1\,000\ \text{cm}^3 = 1\ \text{dm}^3 = 1\ \text{L}$.

Attention : Ne pas oublier le tiers

✗ Écrire $V = 256 \times 15 = 3\,840\ \text{cm}^3$ pour la pyramide de l'exemple.

✓ $3\,840\ \text{cm}^3$ est le volume du prisme droit de même base et de même hauteur. La pyramide n'en occupe que le tiers : $V = 1\,280\ \text{cm}^3$.

Attention : Unités de longueur, d'aire et de volume

✗ Calculer avec un rayon de $5\ \text{cm}$ et une hauteur de $2\ \text{dm}$ sans convertir.

✓ On écrit d'abord toutes les longueurs dans la même unité : $2\ \text{dm} = 20\ \text{cm}$. L'aire s'écrit alors en cm^2 et le volume en cm^3. Pour passer des cm^3 aux litres, on divise par $1\,000$.

Attention : Valeur exacte et valeur approchée

✗ Remplacer π par $3{,}14$ dès le début, puis présenter le résultat comme exact.

✓ On garde π jusqu'au bout : $100\pi\ \text{cm}^3$ est la valeur exacte. La calculatrice donne ensuite $100\pi \approx 314{,}2\ \text{cm}^3$ au dixième.

Avec $3{,}14$, on trouverait $314\ \text{cm}^3$: le chiffre des dixièmes serait faux.

Fiche : quelle technique ?

Génératrice d'un cône

$$g^2 = r^2 + h^2$$

Angle du secteur du patron d'un cône

$$\alpha = \frac{360 \times r}{g}$$

Aire latérale d'une pyramide régulière

$$\mathcal{A} = \frac{p \times a}{2}$$

Aire latérale d'un cône

$$\mathcal{A} = \pi \times r \times g$$

Volume d'une pyramide

$$V = \frac{\mathcal{B} \times h}{3}$$

Volume d'un cône

$$V = \frac{\pi \times r^2 \times h}{3}$$

Capacité

$$1\ \text{L} = 1\ \text{dm}^3 = 1\,000\ \text{cm}^3$$

Méthode : Quelle technique pour quelle question ?

1. **Une hauteur** : repère un triangle rectangle qui la contient (SHI, SHA ou SOA), puis applique le théorème de Pythagore ; pour un cône, $h^2 = g^2 - r^2$.
2. **Une génératrice** : dans le triangle SOA rectangle en O, $g^2 = r^2 + h^2$.
3. **Un apothème** : dans le triangle SHI rectangle en H, $SI^2 = SH^2 + HI^2$; pour une base carrée, HI est la moitié du côté.

4. **Une aire latérale** : $\dfrac{p \times a}{2}$ pour une pyramide régulière, $\pi \times r \times g$ pour un cône ; sinon, la somme des aires des faces latérales.
5. **Une aire totale** : l'aire latérale plus l'aire de la base.
6. **Un volume** : $\dfrac{\mathcal{B} \times h}{3}$ pour une pyramide, $\dfrac{\pi \times r^2 \times h}{3}$ pour un cône.
7. **Un angle de secteur** : $\alpha = \dfrac{360 \times r}{g}$, en degrés.
8. **Une conversion** : $1\ \text{L} = 1\ \text{dm}^3 = 1\,000\ \text{cm}^3$; des cm^3 aux litres, on divise par $1\,000$.