BURHAN

Pyramide et cône de révolution : exercices, niveau examen

2ème Année Collège · Mathématiques

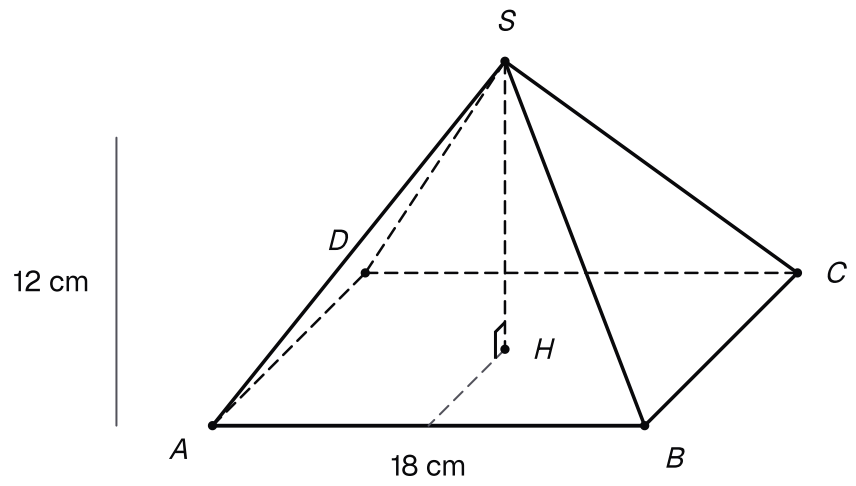
Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/pyramide-et-cone-de-revolution/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Pyramide et cône de révolution	Niveau examen	5

Exercice 1 — 6 pts

Une lanterne pyramidale

Une lanterne en papier a la forme d'une pyramide régulière $SABCD$ à base carrée. Le côté de la base mesure $18\ \text{cm}$. Le pied de la hauteur est le centre H de la base, et $SH = 12\ \text{cm}$.



La lanterne SABCD : base carrée de 18 cm de côté, centre H, hauteur SH = 12 cm.

1 — 1 pts

Quelle est la nature des faces latérales de la lanterne ? Justifie.

INDICE

Compare les arêtes latérales : sont-elles toutes égales ?

CORRIGÉ

La pyramide $SABCD$ est régulière. D'après la propriété des arêtes d'une pyramide régulière, ses arêtes latérales ont la même longueur : $SA = SB = SC = SD$.

Chaque face latérale, par exemple SAB, a donc deux côtés égaux qui partent de S.

Conclusion. Les faces latérales de la lanterne sont des triangles isocèles en S.

2 — 2,5 pts

On note I le milieu de $[BC]$. Calcule l'apothème SI de la lanterne.

INDICE

HI vaut la moitié du côté de la base. Travaille ensuite dans le triangle SHI.

CORRIGÉ

La demi-base. I est le milieu de $[BC]$ et H le centre du carré. La longueur HI est la moitié du côté : $HI = 18 \div 2 = 9\ \text{cm}$.

Pythagore. Par définition de la hauteur, le triangle SHI est rectangle en H ; son hypoténuse est $[SI]$. D'après le théorème de Pythagore, $SI^2 = SH^2 + HI^2$:

$$\begin{aligned} SI^2 &= 12^2 + 9^2 \\ &= 144 + 81 \\ &= 225 \end{aligned}$$

Donc $SI = \sqrt{225} = 15$.

Conclusion. L'apothème SI de la lanterne mesure $15\ \text{cm}$.

3 — 2,5 pts

En déduire l'aire latérale de la lanterne.

INDICE

Utilise la formule de l'aire latérale d'une pyramide régulière, avec le périmètre de la base et l'apothème.

CORRIGÉ

Périmètre. La base est un carré de côté $18\ \text{cm}$: $p = 4 \times 18 = 72\ \text{cm}$.

Aire latérale. D'après la formule de l'aire latérale d'une pyramide régulière, avec l'apothème de $15\ \text{cm}$ trouvé à la question 2 :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{72 \times 15}{2} \\ &= \frac{1\,080}{2} \\ &= 540 \end{aligned}$$

Conclusion. L'aire latérale de la lanterne est $540\ \text{cm}^2$.

Exercice 2 — 6 pts

Un sachet de friandises conique

Un sachet de friandises a la forme d'un cône de révolution de sommet S. Sa base est le disque de centre O et de rayon $OA = 8\ \text{cm}$. Sa hauteur mesure $SO = 15\ \text{cm}$.

1 — 2 pts

Calcule la génératrice SA du sachet.

INDICE

Cherche le triangle rectangle formé par la hauteur, un rayon et la génératrice. Repère son hypoténuse avant d'écrire l'égalité de Pythagore.

CORRIGÉ

La hauteur $[SO]$ et le rayon $[OA]$ forment un angle droit : le triangle SOA est rectangle en O, et son hypoténuse est $[SA]$. D'après le théorème de Pythagore :

$$SA^2 = OA^2 + SO^2$$

On remplace par les longueurs données :

$$\begin{aligned} SA^2 &= 8^2 + 15^2 \\ &= 64 + 225 \\ &= 289 \end{aligned}$$

Donc $SA = \sqrt{289} = 17$.

Conclusion. La génératrice SA du sachet mesure $17\ \text{cm}$.

2 — 2 pts

Calcule l'aire de papier du sachet, c'est-à-dire son aire latérale : valeur exacte, puis au dixième.

INDICE

Utilise la formule de l'aire latérale d'un cône, avec le rayon et la génératrice.

CORRIGÉ

D'après la formule de l'aire latérale d'un cône de révolution, $\mathcal{A} = \pi \times r \times g$, avec $r = 8$ et $g = 17$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \pi \times 8 \times 17 \\ &= 136\pi \end{aligned}$$

La calculatrice affiche $427{,}25\ldots$ pour $136 \times \pi$.

Conclusion. L'aire de papier du sachet est $136\pi\ \text{cm}^2$. Au dixième, $136\pi \approx 427{,}3\ \text{cm}^2$.

3 2 pts

Calcule le volume du sachet : valeur exacte, puis au dixième.

INDICE

Utilise la formule du volume d'un cône. Attention : c'est la hauteur SO qui sert, pas la génératrice.

CORRIGÉ

D'après la formule du volume d'un cône de révolution, on utilise le rayon $8\ \text{cm}$ et la hauteur $SO = 15\ \text{cm}$, pas la génératrice :

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi \times 8^2 \times 15}{3} \\ &= \frac{960\pi}{3} \\ &= 320\pi \end{aligned}$$

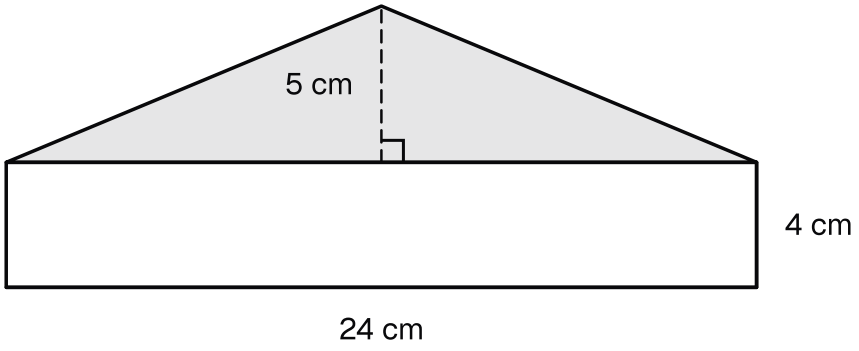
La calculatrice affiche $1\,005{,}30\ldots$ pour $320 \times \pi$.

Conclusion. Le volume du sachet est $320\pi\ \text{cm}^3$. Au dixième, $320\pi \approx 1\,005{,}3\ \text{cm}^3$.

Exercice 3 — 8 pts

Une boîte à bijoux

Une boîte à bijoux est formée d'un pavé droit à base carrée, surmonté d'un couvercle en forme de pyramide régulière de même base. Le côté de la base mesure $24\ \text{cm}$. Le pavé a une hauteur de $4\ \text{cm}$, et la pyramide une hauteur de $5\ \text{cm}$.



La boîte à bijoux vue de face : le pavé de 24 cm de large et 4 cm de haut, et le couvercle en pyramide de 5 cm de haut.

1 — 2,5 pts

Calcule le volume du couvercle.

INDICE

Calcule d'abord l'aire de la base carrée. Applique ensuite la formule du volume d'une pyramide, avec la hauteur du couvercle.

CORRIGÉ

Aire de la base. La base est un carré de côté $24\ \text{cm}$: $\mathcal{B} = 24 \times 24 = 576\ \text{cm}^2$.

Volume. D'après la formule du volume d'une pyramide, avec la hauteur du couvercle, $5\ \text{cm}$:

$$\begin{aligned} V &= \frac{576 \times 5}{3} \\ &= \frac{2\,880}{3} \\ &= 960 \end{aligned}$$

Conclusion. Le volume du couvercle est $960\ \text{cm}^3$.

2 — 2,5 pts

En déduire le volume total de la boîte, en cm^3 puis en litres.

INDICE

Rappel de 1AC : le volume d'un pavé droit est l'aire de sa base multipliée par sa hauteur. Ajoute ensuite le volume du couvercle.

CORRIGÉ

Le pavé. C'est un prisme droit, de base $576\ \mathrm{cm}^2$ et de hauteur $4\ \mathrm{cm}$: son volume est $576 \times 4 = 2\,304\ \mathrm{cm}^3$.

La boîte. On ajoute le volume du couvercle trouvé à la question 1 :

$$2\,304 + 960 = 3\,264$$

En litres. Comme $1\ \mathrm{L} = 1\,000\ \mathrm{cm}^3$, on divise par $1\,000$: $3\,264\ \mathrm{cm}^3 = 3{,}264\ \mathrm{L}$.

Conclusion. La boîte a un volume total de $3\,264\ \mathrm{cm}^3$, soit $3{,}264\ \mathrm{L}$.

3 — 3 pts

On note S le sommet du couvercle, H le centre de sa base et I le milieu d'un côté de cette base. Calcule l'apothème SI du couvercle.

INDICE

HI vaut la moitié du côté de la base, et $SH = 5\ \mathrm{cm}$. Point délicat : repère l'hypoténuse du triangle SHI.

CORRIGÉ

La demi-base. HI est la moitié du côté de la base : $HI = 24 \div 2 = 12\ \mathrm{cm}$.

Pythagore. Par définition de la hauteur, le triangle SHI est rectangle en H. Son hypoténuse est $[SI]$, et non $[SH]$. D'après le théorème de Pythagore, $SI^2 = SH^2 + HI^2$:

$$\begin{aligned} SI^2 &= 5^2 + 12^2 \\ &= 25 + 144 \\ &= 169 \end{aligned}$$

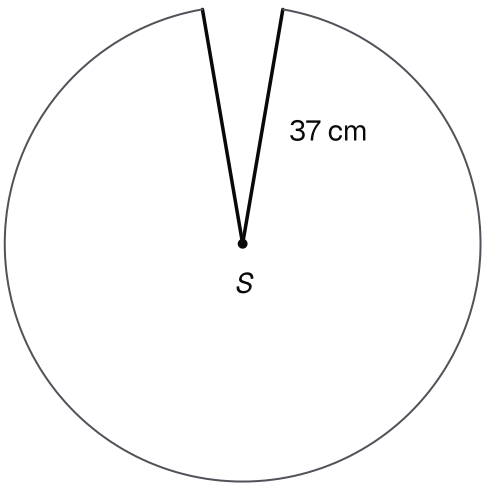
Donc $SI = \sqrt{169} = 13$.

Conclusion. L'apothème SI du couvercle mesure $13\ \mathrm{cm}$.

Exercice 4 — 6 pts

La maquette d'un volcan

Pour un exposé, Yasmine fabrique la maquette d'un volcan en forme de cône de révolution sans base. Elle découpe dans du carton un secteur circulaire de rayon $37\ \text{cm}$, dont l'arc mesure $70\pi\ \text{cm}$. Elle colle ensuite ses deux bords droits : le centre du secteur devient le sommet S du cône.



Le secteur découpé par Yasmine : centre S, rayon de 37 cm ; son arc, long de 70π cm, fait presque un tour complet.

1 — 1 pts

Quelle est la génératrice de la maquette ? Justifie.

INDICE

Au pliage, que devient un rayon du secteur ?

CORRIGÉ

Quand Yasmine colle les bords, le centre du secteur devient le sommet S. Chaque rayon du secteur relie alors S à un point du bord de la base : il devient une génératrice du cône.

Conclusion. La génératrice de la maquette mesure $g = 37\ \text{cm}$, le rayon du secteur.

2 — 1,5 pts

En déduire le rayon r de la base de la maquette.

INDICE

Au pliage, l'arc du secteur fait exactement le tour de la base. Écris le périmètre de la base avec r.

CORRIGÉ

D'après la propriété du patron d'un cône, la longueur de l'arc est égale au périmètre de la base, $2\pi \times r$. On obtient l'équation :

$$2\pi \times r = 70\pi$$

On divise les deux membres par 2π : $r = 70\pi \div 2\pi$, soit $r = 35$.

Conclusion. Le rayon r de la base de la maquette mesure $35\ \text{cm}$.

3 — 1,5 pts

On note O le centre de la base et A un point du cercle de la base. Calcule la hauteur $h = SO$ de la maquette.

INDICE

Le triangle SOA est rectangle. Repère son hypoténuse : est-ce la hauteur ou la génératrice ?

CORRIGÉ

Le triangle rectangle. Le triangle SOA est rectangle en O, et son hypoténuse est la génératrice $[SA]$. On connaît $SA = 37$ et $OA = 35$.

Pythagore. D'après le théorème de Pythagore, $SA^2 = OA^2 + SO^2$. La longueur cherchée $h = SO$ est un côté de l'angle droit. On isole h^2 : $h^2 = SA^2 - OA^2$.

$$\begin{aligned} h^2 &= 37^2 - 35^2 \\ &= 1\,369 - 1\,225 \\ &= 144 \end{aligned}$$

Racine. La hauteur est positive, donc $h = \sqrt{144} = 12$.

Conclusion. La hauteur $h = SO$ de la maquette mesure $12\ \text{cm}$.

4 2 pts

Yasmine pose la maquette sur une planche et veut la remplir de sable. Calcule le volume de sable nécessaire : valeur exacte, puis au dixième.

INDICE

Utilise la formule du volume d'un cône avec le rayon de la question 2 et la hauteur de la question 3, pas la génératrice.

CORRIGÉ

Le sable remplit tout le cône. On utilise la formule du volume d'un cône de révolution, avec $r = 35$ (question 2) et $h = 12$ (question 3), pas la génératrice. Comme $35^2 = 1\,225$:

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi \times 1\,225 \times 12}{3} \\ &= \frac{14\,700\pi}{3} \\ &= 4\,900\pi \end{aligned}$$

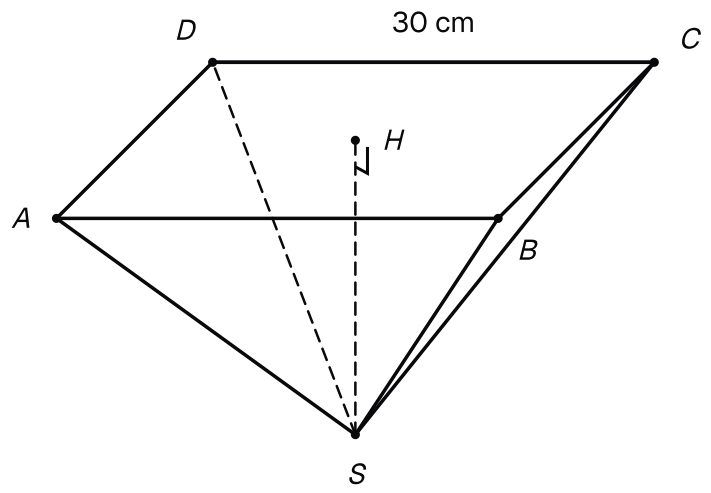
La calculatrice affiche $15\,393{,}804\ldots$ pour $4\,900 \times \pi$.

Conclusion. Il faut $4\,900\pi\ \text{cm}^3$ de sable. Au dixième, $4\,900\pi \approx 15\,393{,}8\ \text{cm}^3$.

Exercice 5 — 6 pts

Un distributeur de croquettes

Le réservoir d'un distributeur de croquettes pour chat a la forme d'une pyramide régulière $SABCD$ à base carrée, posée la pointe en bas. Le côté de la base mesure $30\ \text{cm}$ et H est le centre de la base. Plein, le réservoir contient $6\ \text{L}$ de croquettes.



Le réservoir SABCD posé la pointe en bas : la base carrée ABCD, en haut, a 30 cm de côté, H est son centre et S la pointe.

1 — 2 pts

Calcule la hauteur SH du réservoir.

INDICE

Convertis d'abord $6\ \text{L}$ en cm^3. Écris ensuite la formule du volume d'une pyramide : seule la hauteur est inconnue.

CORRIGÉ

Conversion. On sait que $1\ \text{L} = 1\,000\ \text{cm}^3$. Le volume du réservoir est donc $V = 6 \times 1\,000 = 6\,000\ \text{cm}^3$.

Aire de la base. La base est un carré de côté $30\ \text{cm}$: $\mathcal{B} = 30 \times 30 = 900\ \text{cm}^2$.

Équation. D'après la formule du volume d'une pyramide, $V = \dfrac{\mathcal{B} \times h}{3}$. Ici, la hauteur est SH :

$$\frac{900 \times SH}{3} = 6\,000$$

Comme $900 \div 3 = 300$, cela s'écrit $300 \times SH = 6\,000$. Donc $SH = 6\,000 \div 300 = 20$.

Vérification. $\dfrac{900 \times 20}{3} = \dfrac{18\,000}{3} = 6\,000$.

Conclusion. La hauteur SH du réservoir mesure $20\ \text{cm}$.

2 — 2 pts

On note I le milieu de $[AB]$. En déduire l'apothème SI du réservoir.

INDICE

HI vaut la moitié du côté de la base. Utilise la hauteur trouvée à la question 1 dans le triangle SHI.

CORRIGÉ

La demi-base. HI est la moitié du côté de la base : $HI = 30 \div 2 = 15\ \text{cm}$.

Pythagore. Par définition de la hauteur, le triangle SHI est rectangle en H ; son hypoténuse est $[SI]$. D'après le théorème de Pythagore, $SI^2 = SH^2 + HI^2$, avec $SH = 20$ trouvé à la question 1 :

$$\begin{aligned} SI^2 &= 20^2 + 15^2 \\ &= 400 + 225 \\ &= 625 \end{aligned}$$

Donc $SI = \sqrt{625} = 25$.

Conclusion. L'apothème SI du réservoir mesure $25\ \text{cm}$.

3 — 2 pts

Le réservoir est fermé par un couvercle carré qui couvre exactement sa base. En déduire l'aire totale de plastique du réservoir, couvercle compris.

INDICE

Calcule l'aire latérale avec le périmètre de la base et l'apothème, puis ajoute l'aire du couvercle.

CORRIGÉ

Aire latérale. Le périmètre de la base est $p = 4 \times 30 = 120\ \text{cm}$. D'après la formule de l'aire latérale d'une pyramide régulière, avec l'apothème $25\ \text{cm}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{120 \times 25}{2} \\ &= \frac{3\,000}{2} \\ &= 1\,500 \end{aligned}$$

Aire totale. On ajoute l'aire de la base, c'est-à-dire du couvercle :

$$1\,500 + 900 = 2\,400$$

Conclusion. L'aire totale de plastique du réservoir, couvercle compris, est $2\,400\ \text{cm}^2$.