BURHAN

Pyramide et cône de révolution : exercices, entraînement

2ème Année Collège · Mathématiques

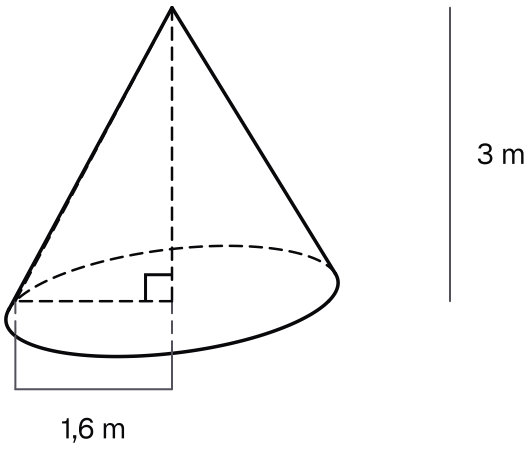
Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/pyramide-et-cone-de-revolution/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Pyramide et cône de révolution	Entraînement	7

Exercice 1

La toile d'un tipi

Un tipi est une tente en forme de cône de révolution. Son rayon mesure $1{,}6\ \text{m}$ et sa hauteur $3\ \text{m}$. On cherche d'abord la surface de toile qui le recouvre, sans le sol.



Le tipi : un cône de rayon 1,6 m et de hauteur 3 m.

1

Calcule la génératrice g du tipi.

INDICE

La hauteur, un rayon et une génératrice forment un triangle rectangle. Calcule $1{,}6^2$ avec soin. Pour la racine, utilise la calculatrice, puis vérifie en multipliant.

CORRIGÉ

Le triangle rectangle. Dans le tipi, la hauteur, un rayon de la base et une génératrice forment un triangle rectangle au centre de la base. Son hypoténuse est la génératrice.

Pythagore. D'après le théorème de Pythagore, $g^2 = r^2 + h^2$, avec $r = 1{,}6$ et $h = 3$:

$$\begin{aligned} g^2 &= 1{,}6^2 + 3^2 \\ &= 2{,}56 + 9 \\ &= 11{,}56 \end{aligned}$$

Racine. La calculatrice donne $3{,}4$ pour la racine carrée de $11{,}56$. On vérifie : $3{,}4 \times 3{,}4 = 11{,}56$. Donc $g = 3{,}4$.

Conclusion. La génératrice du tipi mesure $3{,}4\ \text{m}$.

2

Calcule l'aire de la toile : d'abord avec π, puis au dixième.

INDICE

La toile couvre la surface latérale du cône. Utilise la génératrice trouvée à la question 1.

CORRIGÉ

La toile couvre la surface latérale du cône. D'après la formule de l'aire latérale d'un cône de révolution, $\mathcal{A} = \pi \times r \times g$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \pi \times 1{,}6 \times 3{,}4 \\ &= 5{,}44\pi \end{aligned}$$

La calculatrice affiche $17{,}09\ldots$ pour $5{,}44 \times \pi$.

Conclusion. L'aire de la toile est $5{,}44\pi\ \text{m}^2$. Au dixième, $5{,}44\pi \approx 17{,}1\ \text{m}^2$.

3

On ajoute un tapis de sol qui couvre exactement la base du tipi. Calcule l'aire totale de toile et de tapis : d'abord avec π, puis au dixième.

INDICE

Le tapis est un disque de rayon $1{,}6\ \text{m}$. Garde π dans les deux aires avant de les additionner.

CORRIGÉ

Aire du tapis. Le tapis est un disque de rayon $1{,}6\ \text{m}$. Son aire est $\mathcal{B} = \pi \times 1{,}6^2 = 2{,}56\pi\ \text{m}^2$.

Aire totale. On ajoute l'aire latérale et l'aire de la base, en gardant π :

$$5{,}44\pi + 2{,}56\pi = 8\pi$$

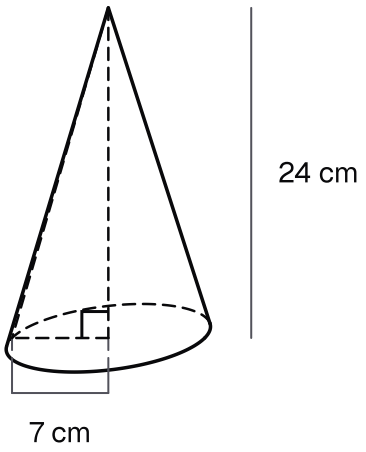
La calculatrice affiche $25{,}13\ldots$ pour $8 \times \pi$.

Conclusion. L'aire totale de toile et de tapis est $8\pi\ \text{m}^2$. Au dixième, $8\pi \approx 25{,}1\ \text{m}^2$.

Exercice 2

Le patron d'un chapeau de fête

Un chapeau de fête est un cône de révolution sans base. Son rayon mesure $7\ \text{cm}$ et sa hauteur $24\ \text{cm}$. Leïla veut tracer son patron sur du carton : un secteur circulaire.



Le chapeau de fête : un cône de rayon 7 cm et de hauteur 24 cm.

1

Calcule la génératrice du chapeau.

INDICE

Pense au théorème de Pythagore, dans le triangle rectangle formé par la hauteur, un rayon et une génératrice.

CORRIGÉ

Soit S le sommet du chapeau, O le centre de sa base et A un point du cercle de la base. Le triangle SOA est rectangle en O, et son hypoténuse est la génératrice $[SA]$. On note $g = SA$.

D'après le théorème de Pythagore, $g^2 = OA^2 + SO^2$:

$$\begin{aligned} g^2 &= 7^2 + 24^2 \\ &= 49 + 576 \\ &= 625 \end{aligned}$$

Donc $g = \sqrt{625} = 25$.

Conclusion. La génératrice du chapeau mesure $25\ \text{cm}$. C'est aussi le rayon du secteur.

2

Quelle est la longueur de l'arc du secteur ? Donne la valeur exacte, puis une valeur approchée au dixième.

INDICE

L'arc du secteur s'enroule autour du bord du chapeau : il a la longueur du cercle de rayon $7\ \text{cm}$.

CORRIGÉ

Une fois le patron refermé, l'arc du secteur fait le tour du bord du chapeau. D'après la propriété du patron d'un cône, sa longueur est égale au périmètre du cercle de base, de rayon $7\ \text{cm}$:

$$2\pi \times 7 = 14\pi$$

La calculatrice affiche $43{,}98\ldots$ pour $14 \times \pi$.

Conclusion. L'arc du secteur mesure $14\pi\ \text{cm}$. Au dixième, $14\pi \approx 44{,}0\ \text{cm}$.

3

Calcule l'angle du secteur.

INDICE

Point délicat : le secteur a pour rayon la génératrice, pas le rayon du chapeau. Utilise $\alpha = \dfrac{360 \times r}{g}$.

CORRIGÉ

Le rayon du secteur est la génératrice, $25\ \text{cm}$. Le cercle complet de rayon $25\ \text{cm}$ mesure $2\pi \times 25 = 50\pi\ \text{cm}$ et correspond à $360°$.

On admet que l'angle du secteur est proportionnel à la longueur de son arc. L'arc mesure $14\pi\ \text{cm}$, soit $\dfrac{14\pi}{50\pi} = \dfrac{7}{25}$ du cercle. L'angle vaut donc les $\dfrac{7}{25}$ de $360°$:

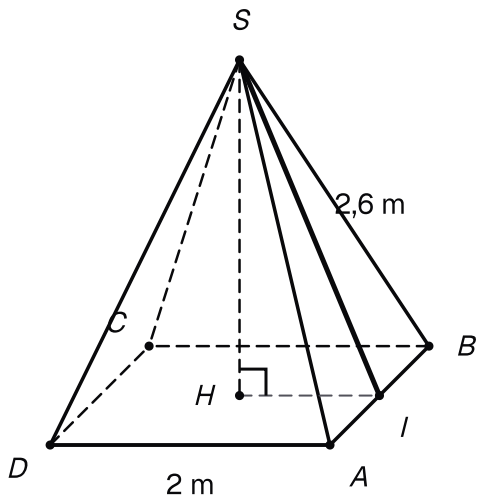
$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{360 \times 7}{25} \\ &= \frac{2\,520}{25} \\ &= 100{,}8 \end{aligned}$$

Conclusion. L'angle du secteur mesure $100{,}8°$. Leïla trace donc un secteur de rayon $25\ \text{cm}$ et d'angle $100{,}8°$.

Exercice 3

Le volume d'une tente

Une tente a la forme d'une pyramide régulière $SABCD$ à base carrée, de côté $2\ \mathrm{m}$. On note H le centre de la base et I le milieu de $[AB]$. L'apothème de la tente mesure $SI = 2{,}6\ \mathrm{m}$.



La tente SABCD : base carrée de 2 m, centre H, milieu I de [AB] et apothème SI = 2,6 m.

1

Quelle est la longueur HI ? Justifie.

INDICE

H est le centre du carré et I le milieu d'un côté. Compare HI au côté du carré.

CORRIGÉ

Le carré $ABCD$ a pour centre H. Le segment qui joint I, milieu de $[AB]$, au milieu de $[CD]$ passe par H. Il a la longueur d'un côté, $2\ \mathrm{m}$, et H est son milieu.

La longueur HI est donc la moitié du côté : $HI = 2 \div 2 = 1$.

Conclusion. $HI = 1\ \mathrm{m}$.

2

Calcule la hauteur SH de la tente.

INDICE

Travaille dans le triangle SHI. Point délicat : ici, l'hypoténuse est l'apothème $[SI]$, donc on soustrait.

CORRIGÉ

Le triangle rectangle. Par définition de la hauteur, le triangle SHI est rectangle en H. Son hypoténuse est l'apothème $[SI]$.

Pythagore. D'après le théorème de Pythagore, $SI^2 = SH^2 + HI^2$. Comme SH est un côté de l'angle droit, on isole SH^2 : $SH^2 = SI^2 - HI^2$.

$$\begin{aligned} SH^2 &= 2{,}6^2 - 1^2 \\ &= 6{,}76 - 1 \\ &= 5{,}76 \end{aligned}$$

Racine. On a $2{,}4 \times 2{,}4 = 5{,}76$, donc $SH = 2{,}4$.

Conclusion. La hauteur de la tente mesure $2{,}4\ \text{m}$.

3

Calcule le volume de la tente.

INDICE

Calcule l'aire du carré de base, puis utilise la formule du volume d'une pyramide avec la hauteur trouvée.

CORRIGÉ

Aire de la base. La base est un carré de côté $2\ \text{m}$: $\mathcal{B} = 2 \times 2 = 4\ \text{m}^2$.

Volume. D'après la formule du volume d'une pyramide, $V = \dfrac{\mathcal{B} \times h}{3}$, avec $h = SH = 2{,}4$:

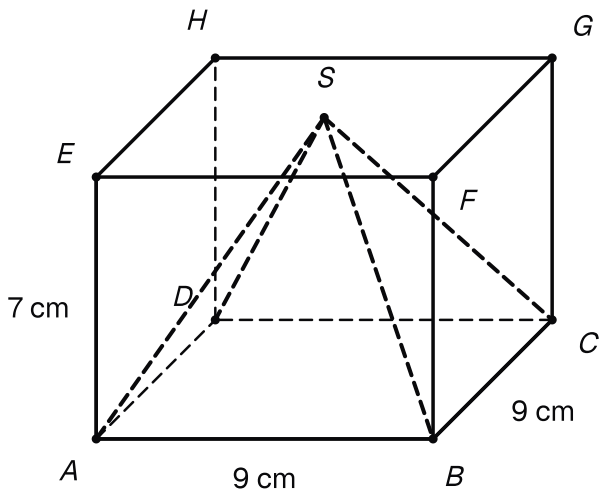
$$\begin{aligned} V &= \frac{4 \times 2{,}4}{3} \\ &= \frac{9{,}6}{3} \\ &= 3{,}2 \end{aligned}$$

Conclusion. Le volume de la tente est $3{,}2\ \text{m}^3$.

Exercice 4

Un presse-papier taillé dans un pavé

Un artisan taille un presse-papier dans un pavé droit en bois. Le pavé a une base carrée de côté $9\ \text{cm}$ et une hauteur de $7\ \text{cm}$. Le presse-papier est une pyramide qui a la même base et la même hauteur que le pavé.



Le pavé de bois et le presse-papier : même base carrée de 9 cm, même hauteur de 7 cm, le sommet S au centre de la face du haut.

1

Calcule le volume du pavé.

INDICE

Rappel de 1AC : pour un prisme droit, on multiplie l'aire de la base par la hauteur.

CORRIGÉ

La base du pavé est un carré de côté $9\ \text{cm}$. Son aire est $9 \times 9 = 81\ \text{cm}^2$.

Le pavé est un prisme droit : pour son volume, on multiplie l'aire de la base par la hauteur, soit $81 \times 7 = 567\ \text{cm}^3$.

Conclusion. Le volume du pavé est $567\ \text{cm}^3$.

2

Calcule le volume du presse-papier.

INDICE

Même base et même hauteur : la formule du volume d'une pyramide ne change qu'une chose par rapport au pavé.

CORRIGÉ

Le presse-papier est une pyramide dont la base a une aire de $81\ \text{cm}^2$ et dont la hauteur mesure $7\ \text{cm}$. D'après la formule du volume d'une pyramide :

$$\begin{aligned} V &= \frac{81 \times 7}{3} \\ &= \frac{567}{3} \\ &= 189 \end{aligned}$$

On retrouve le tiers du volume du pavé.

Conclusion. Le presse-papier a un volume de $189\ \text{cm}^3$.

3

Quel volume de bois l'artisan enlève-t-il ? Quelle fraction du pavé cela représente-t-il ?

INDICE

Soustrais le volume du presse-papier de celui du pavé. Compare ensuite les deux résultats à 189.

CORRIGÉ

Bois enlevé. C'est le volume du pavé moins celui du presse-papier : $567 - 189 = 378\ \text{cm}^3$.

Fraction. On compare les deux volumes à 189 : $378 = 2 \times 189$ et $567 = 3 \times 189$. Donc :

$$\frac{378}{567} = \frac{2}{3}$$

Conclusion. L'artisan enlève $378\ \text{cm}^3$ de bois, soit les $\frac{2}{3}$ du pavé. Le presse-papier en garde $\frac{1}{3}$.

Exercice 5

Un verre conique et un verre cylindrique

Un verre cylindrique et un verre conique ont la même base, un disque de rayon $4\ \text{cm}$. Ils ont aussi la même hauteur, $9\ \text{cm}$.

1

Calcule le volume exact du verre cylindrique, puis une valeur approchée au dixième.

INDICE

Rappel de 1AC : pour un cylindre, on multiplie l'aire du disque de base par la hauteur.

CORRIGÉ

La base est un disque de rayon $4\ \text{cm}$. Son aire est $\pi \times 4^2 = 16\pi\ \text{cm}^2$.

Le volume d'un cylindre est l'aire de sa base multipliée par sa hauteur : $16\pi \times 9 = 144\pi\ \text{cm}^3$. La calculatrice affiche $452{,}38\ldots$ pour $144 \times \pi$.

Conclusion. Le volume du verre cylindrique est $144\pi\ \text{cm}^3$. Au dixième, $144\pi \approx 452{,}4\ \text{cm}^3$.

2

Calcule le volume exact du verre conique, puis une valeur approchée au dixième.

INDICE

La formule du volume d'un cône reprend le produit du cylindre, puis le divise par 3.

CORRIGÉ

D'après la formule du volume d'un cône de révolution, $V = \dfrac{\pi \times r^2 \times h}{3}$, avec $r = 4$ et $h = 9$:

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi \times 4^2 \times 9}{3} \\ &= \frac{144\pi}{3} \\ &= 48\pi \end{aligned}$$

La calculatrice affiche $150{,}79\ldots$ pour $48 \times \pi$.

Conclusion. Le volume du verre conique est $48\pi\ \text{cm}^3$. Au dixième, $48\pi \approx 150{,}8\ \text{cm}^3$.

3

Combien de verres coniques pleins faut-il verser pour remplir le verre cylindrique ?

INDICE

Divise le volume du cylindre par celui du cône, en gardant π.

CORRIGÉ

On cherche combien de fois le volume du verre conique est contenu dans celui du verre cylindrique.

On divise, en gardant π :

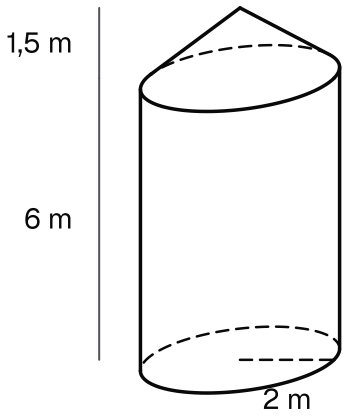
$$\frac{144\pi}{48\pi} = 3$$

Conclusion. Il faut verser 3 verres coniques pleins pour remplir le verre cylindrique.

Exercice 6

Le silo à grains

Un silo à grains est formé d'un cylindre surmonté d'un toit conique de même rayon. Ce rayon mesure $2\ \mathrm{m}$. Le cylindre a une hauteur de $6\ \mathrm{m}$; le cône a une hauteur de $1{,}5\ \mathrm{m}$.



Le silo à grains : un cylindre de rayon 2 m et de 6 m de haut, coiffé d'un toit conique de même rayon, haut de 1,5 m.

1

Calcule le volume exact de la partie cylindrique.

INDICE

Rappel de 1AC : volume d'un cylindre $=$ aire de la base $\times$ hauteur.

CORRIGÉ

La base est un disque de rayon $2\ \mathrm{m}$. Son aire est $\pi \times 2^2 = 4\pi\ \mathrm{m}^2$.

Le volume du cylindre est l'aire de la base multipliée par la hauteur : $4\pi \times 6 = 24\pi\ \mathrm{m}^3$.

Conclusion. La partie cylindrique a un volume exact de $24\pi\ \mathrm{m}^3$.

2

Calcule le volume exact du toit conique.

INDICE

La base est la même que celle du cylindre. Dans la formule du volume d'un cône, prends la hauteur du cône seulement.

CORRIGÉ

Le toit a la même base que le cylindre, mais sa hauteur est celle du cône, $1{,}5\ \mathrm{m}$. D'après la formule du volume d'un cône de révolution :

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi \times 2^2 \times 1{,}5}{3} \\ &= \frac{6\pi}{3} \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

Conclusion. Le toit conique a un volume exact de $2\pi\ \mathrm{m}^3$.

3

Calcule le volume total du silo : valeur exacte, puis valeur arrondie au mètre cube.

INDICE

Ajoute les deux volumes en gardant π. Utilise la calculatrice seulement à la fin.

CORRIGÉ

Valeur exacte. Le volume du silo est la somme des volumes des questions 1 et 2 :

$$24\pi + 2\pi = 26\pi$$

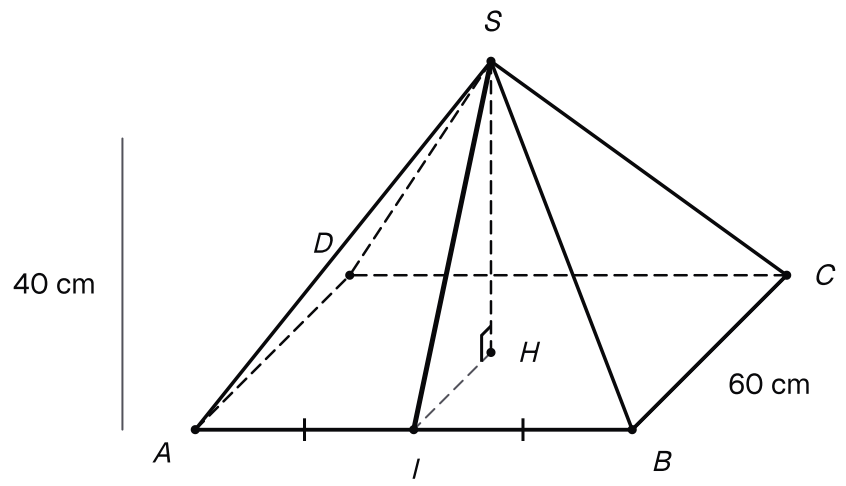
Arrondi. La calculatrice affiche $81{,}68\ldots$ pour $26 \times \pi$. Le chiffre des dixièmes est 6, qui vaut au moins 5 : on arrondit à 82.

Conclusion. Le volume du silo vaut exactement $26\pi\ \mathrm{m}^3$, soit environ $82\ \mathrm{m}^3$ au mètre cube près.

Exercice 7

Le chapeau d'une cheminée

Le chapeau d'une cheminée est une pyramide régulière $SABCD$ à base carrée, en tôle. Le côté de la base mesure $60\ \text{cm}$. La hauteur mesure $SH = 40\ \text{cm}$, où H est le centre de la base.



Le chapeau de cheminée SABCD : base carrée de 60 cm, hauteur SH = 40 cm, I milieu de [AB].

1

Calcule l'apothème SI du chapeau, où I est le milieu de $[AB]$.

INDICE

Commence par HI, la moitié du côté. Travaille ensuite dans le triangle SHI.

CORRIGÉ

La demi-base. H est le centre du carré de base et I le milieu de $[AB]$. Le segment qui joint I au milieu de $[CD]$ passe par H, mesure un côté et a pour milieu H. Donc $HI = 60 \div 2 = 30\ \text{cm}$.

Le triangle rectangle. Par définition de la hauteur, le triangle SHI est rectangle en H. Son hypoténuse est l'apothème $[SI]$.

Pythagore. D'après le théorème de Pythagore, $SI^2 = SH^2 + HI^2$:

$$\begin{aligned} SI^2 &= 40^2 + 30^2 \\ &= 1\,600 + 900 \\ &= 2\,500 \end{aligned}$$

Donc $SI = \sqrt{2\,500} = 50$.

Conclusion. L'apothème SI du chapeau mesure $50\ \text{cm}$.

2

La base n'est pas couverte de tôle. Calcule l'aire de tôle nécessaire, en cm^2.

INDICE

La tôle couvre les quatre faces latérales : c'est l'aire latérale. Calcule d'abord le périmètre de la base.

CORRIGÉ

La tôle couvre les quatre faces latérales : son aire est l'aire latérale de la pyramide.

Périmètre. La base est un carré de côté $60\ \mathrm{cm}$: $p = 4 \times 60 = 240\ \mathrm{cm}$.

Aire latérale. D'après la formule de l'aire latérale d'une pyramide régulière, avec l'apothème $a = 50$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{240 \times 50}{2} \\ &= \frac{12\,000}{2} \\ &= 6\,000 \end{aligned}$$

Conclusion. Il faut $6\,000\ \mathrm{cm}^2$ de tôle.

3

Convertis cette aire en m^2.

INDICE

Un mètre carré contient $10\,000$ centimètres carrés.

CORRIGÉ

Un mètre carré est l'aire d'un carré de $100\ \mathrm{cm}$ de côté : $1\ \mathrm{m}^2 = 100 \times 100 = 10\,000\ \mathrm{cm}^2$. Pour passer des cm^2 aux m^2, on divise donc par $10\,000$:

$$6\,000 \div 10\,000 = 0{,}6$$

Conclusion. L'aire de tôle vaut $6\,000\ \mathrm{cm}^2 = 0{,}6\ \mathrm{m}^2$.