BURHAN

Pyramide et cône de révolution : exercices, application

2ème Année Collège · Mathématiques

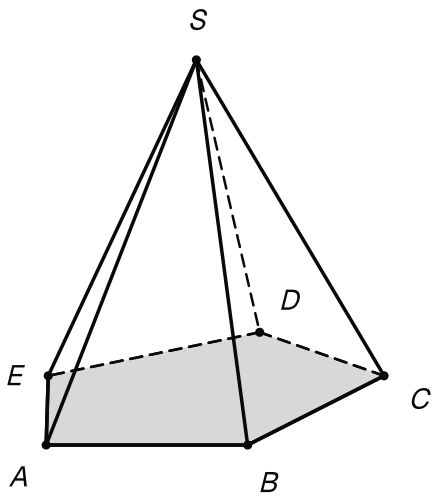
Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/pyramide-et-cone-de-revolution/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Pyramide et cône de révolution	Application	8

Exercice 1

Un bijou en forme de pyramide

Un bijou en cristal a la forme d'une pyramide $SABCDE$. Sa base $ABCDE$ est un pentagone : un polygone à cinq côtés.



Le bijou SABCDE : une base à cinq côtés, ABCDE, et le sommet S au-dessus.

1

Nomme le sommet et la base de ce bijou, puis cite ses arêtes latérales.

INDICE

Une pyramide se nomme par son sommet, puis par sa base. Une arête latérale relie le sommet à un sommet de la base.

CORRIGÉ

Une pyramide se nomme par son sommet, suivi des sommets de sa base. Dans $SABCDE$, le sommet est donc S et la base est le pentagone $ABCDE$.

Une arête latérale joint S à un sommet de la base. La base a cinq sommets, donc on trouve cinq arêtes latérales : $[SA]$, $[SB]$, $[SC]$, $[SD]$ et $[SE]$.

Conclusion. Le bijou a pour sommet S et pour base le pentagone $ABCDE$. Ses arêtes latérales sont $[SA]$, $[SB]$, $[SC]$, $[SD]$ et $[SE]$.

2

Combien ce bijou a-t-il de faces, d'arêtes et de sommets ?

INDICE

Il y a une face latérale par côté de la base. N'oublie ni la base elle-même, ni ses côtés.

CORRIGÉ

La base est un pentagone : elle a 5 côtés et 5 sommets.

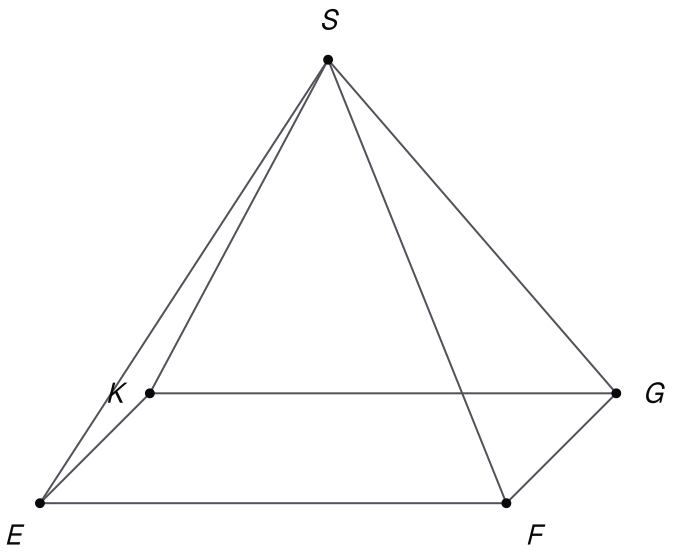
- **Faces.** Chaque côté de la base porte une face latérale. Avec la base, on compte $5 + 1 = 6$ faces.
- **Arêtes.** Aux 5 arêtes latérales s'ajoutent les 5 côtés de la base : $5 + 5 = 10$ arêtes.
- **Sommets.** Aux 5 sommets de la base s'ajoute le point S : $5 + 1 = 6$ sommets.

Conclusion. Le bijou a 6 faces, 10 arêtes et 6 sommets.

Exercice 2

Arêtes cachées d'une pyramide

Samir dessine en perspective cavalière la pyramide $SEFGK$, dont la base est le rectangle $EFGK$. Sur son dessin, le côté $[EF]$ est au premier plan, en bas. Le point K se trouve à l'arrière, du côté gauche : le solide le cache.



Le croquis de départ de Samir : toutes les arêtes de SEFGK en traits fins, avant de choisir lesquelles passer en pointillés.

1

Quelles arêtes Samir doit-il tracer en pointillés ?

INDICE

Une arête qui arrive à un point caché est cachée. Cherche toutes les arêtes qui ont K pour extrémité.

CORRIGÉ

Sur le dessin, le solide cache le point K. Une arête qui a K pour extrémité est donc cachée, elle aussi.

Trois arêtes arrivent en K : les côtés $[KE]$ et $[KG]$ de la base, et l'arête latérale $[SK]$.

Conclusion. Samir trace en pointillés les arêtes $[KE]$, $[KG]$ et $[SK]$.

2

Combien d'arêtes trace-t-il en traits pleins ? Fais ensuite le dessin sur ton cahier.

INDICE

Compte d'abord toutes les arêtes : la base a 4 côtés, et la pyramide a 4 arêtes latérales.

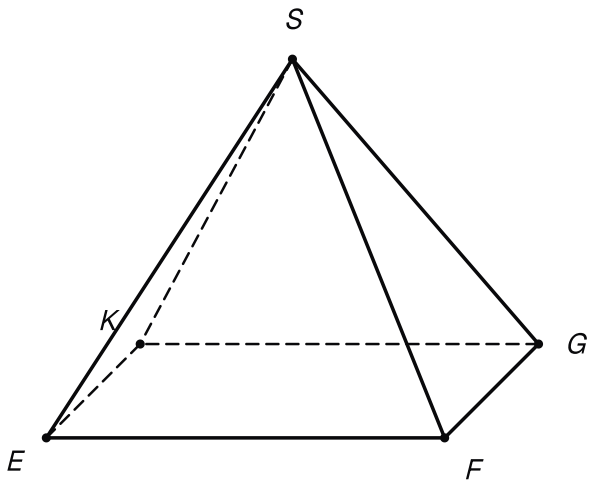
CORRIGÉ

Nombre d'arêtes. La base rectangulaire a 4 côtés et la pyramide a 4 arêtes latérales. Cela fait $4 + 4 = 8$ arêtes en tout.

Traits pleins. On enlève les trois arêtes cachées : $8 - 3 = 5$. Ce sont $[EF]$, $[FG]$, $[SE]$, $[SF]$ et $[SG]$.

Le dessin. Trace $[EF]$ horizontal, avec sa vraie longueur. Trace ensuite les fuyantes $[EK]$ et $[FG]$ vers la droite et vers le haut, à $45°$, avec la moitié de leur longueur : c'est la convention choisie dans ce chapitre. Place enfin S au-dessus de la base et relie-le aux quatre sommets, en pointillés vers K.

Conclusion. Samir trace 5 arêtes en traits pleins.



Le dessin terminé : [KE], [KG] et [SK] en pointillés, les cinq autres arêtes en traits pleins.

Exercice 3

Patron ou pas patron ?

Nadia veut fabriquer une pyramide à base carrée. Elle a dessiné deux figures sur du carton.

- **Figure 1** : un carré de côté $3\ \text{cm}$. Sur chacun de ses quatre côtés est accolé un triangle isocèle dont les deux autres côtés mesurent $4\ \text{cm}$.
- **Figure 2** : le même carré. Sur deux côtés voisins sont accolés des triangles isocèles aux côtés égaux de $4\ \text{cm}$. Sur les deux autres côtés, les triangles ont des côtés égaux de $6\ \text{cm}$.

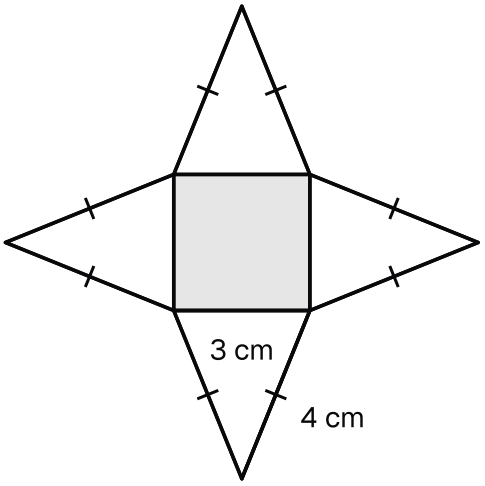


Figure 1 de Nadia : un carré de 3 cm et, sur chaque côté, un triangle isocèle aux côtés égaux de 4 cm.

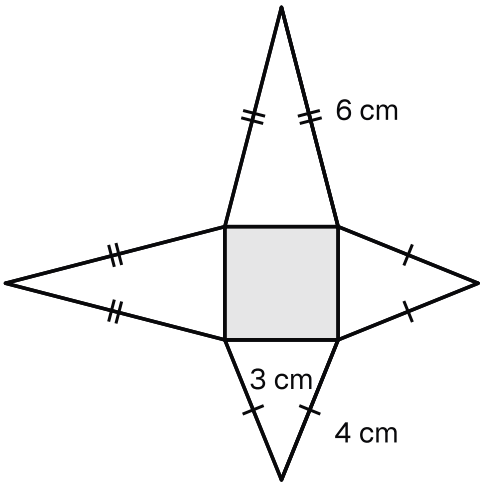


Figure 2 de Nadia : le même carré, deux triangles aux côtés égaux de 4 cm, et deux autres aux côtés égaux de 6 cm.

1

La figure 1 est-elle un patron de pyramide ? Justifie.

INDICE

Imagine le pliage : chaque triangle se relève autour de son côté commun avec le carré. Regarde les côtés qui se rejoignent alors.

CORRIGÉ

Pour reconnaître un patron, on imagine le pliage : chaque triangle se relève autour du côté qu'il partage avec le carré.

Les bords qui se collent. À chaque coin du carré, deux triangles voisins se rejoignent, chacun par un de ses côtés. Ici, ces deux côtés mesurent $4\ \text{cm}$: ils ont la même longueur et s'ajustent.

Le sommet. Les pointes des quatre triangles arrivent en un même point, qui devient le sommet. Aucune face n'en recouvre une autre, et la figure est d'un seul morceau.

Conclusion. Oui, la figure 1 est un patron de pyramide à base carrée.

2

La figure 2 est-elle un patron de pyramide ? Justifie.

INDICE

Point délicat : regarde un coin du carré où se touchent un triangle aux côtés de $4\ \text{cm}$ et un triangle aux côtés de $6\ \text{cm}$.

CORRIGÉ

Les triangles de $4\ \text{cm}$ occupent deux côtés voisins du carré, ceux de $6\ \text{cm}$ les deux autres. Il existe donc un coin où un triangle aux côtés de $4\ \text{cm}$ touche un triangle aux côtés de $6\ \text{cm}$.

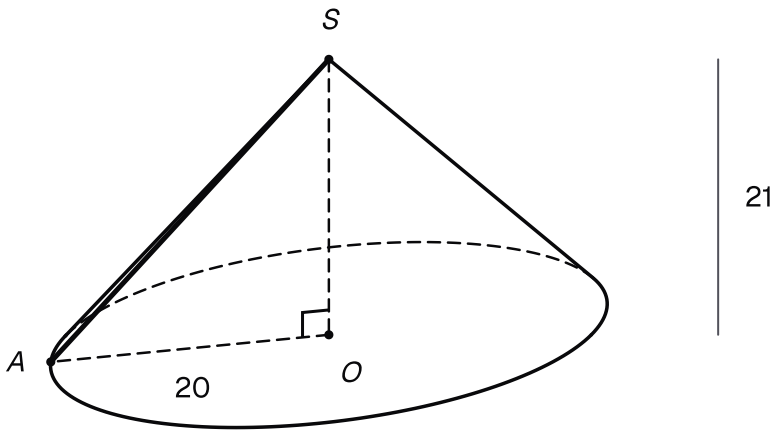
Au pliage, à ce coin, un côté de $4\ \text{cm}$ devrait se coller à un côté de $6\ \text{cm}$. Ces longueurs sont différentes : les deux faces ne peuvent pas se rejoindre.

Conclusion. Non, la figure 2 n'est pas un patron de pyramide.

Exercice 4

Le toit d'un phare

Le toit d'un phare a la forme d'un cône de révolution de sommet S. Sa base est le disque de centre O et de rayon $OA = 20\ \text{dm}$. Sa hauteur mesure $SO = 21\ \text{dm}$ (rappel : $1\ \text{m} = 10\ \text{dm}$).



Le toit du phare, en décimètres : OA = 20 et SO = 21 ; la génératrice [SA] est à calculer.

1

Dans quel triangle rectangle peux-tu calculer la génératrice SA ? Quelle est son hypoténuse ?

INDICE

Cherche un triangle qui a pour côtés la hauteur, un rayon et la génératrice. Où est son angle droit ?

CORRIGÉ

Le cône de révolution est engendré par le triangle SOA qui tourne autour de la droite (SO). Ce triangle est rectangle en O : la hauteur $[SO]$ et le rayon $[OA]$ forment l'angle droit.

L'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit : c'est la génératrice $[SA]$.

Conclusion. On calcule SA dans le triangle SOA, rectangle en O, dont l'hypoténuse est la génératrice $[SA]$.

2

Calcule la génératrice SA du toit.

INDICE

Écris l'égalité de Pythagore avec SA^2 seul d'un côté. Calcule 20^2 et 21^2 avant d'additionner.

CORRIGÉ

Le triangle SOA est rectangle en O et son hypoténuse est $[SA]$. D'après le théorème de Pythagore :

$$SA^2 = OA^2 + SO^2$$

On remplace par les longueurs, exprimées en décimètres :

$$\begin{aligned} SA^2 &= 20^2 + 21^2 \\ &= 400 + 441 \\ &= 841 \end{aligned}$$

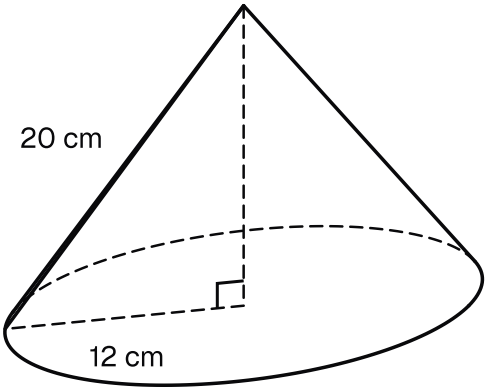
Une longueur est positive, donc $SA = \sqrt{841} = 29$. Pour passer en mètres, on divise par 10 :
$29\ \text{dm} = 2{,}9\ \text{m}$.

Conclusion. La génératrice du toit mesure $29\ \text{dm}$, soit $2{,}9\ \text{m}$.

Exercice 5

La hauteur d'un entonnoir

La partie pointue d'un entonnoir est un cône de révolution. Son rayon mesure $r = 12\ \text{cm}$ et sa génératrice $g = 20\ \text{cm}$.



Le cône de l'entonnoir : rayon de 12 cm et génératrice de 20 cm ; la hauteur est inconnue.

1

Calcule la hauteur h de ce cône.

INDICE

La génératrice est l'hypoténuse du triangle rectangle formé avec la hauteur et un rayon. Pour trouver un côté de l'angle droit, on soustrait.

CORRIGÉ

Le triangle rectangle. Dans un cône de révolution, la hauteur et un rayon de la base forment un angle droit. Avec une génératrice, ils forment un triangle rectangle dont la génératrice est l'hypoténuse.

Pythagore. D'après le théorème de Pythagore, $g^2 = r^2 + h^2$. La hauteur est ici un côté de l'angle droit : pour la trouver, on retranche r^2 de g^2, soit $h^2 = g^2 - r^2$.

$$\begin{aligned} h^2 &= 20^2 - 12^2 \\ &= 400 - 144 \\ &= 256 \end{aligned}$$

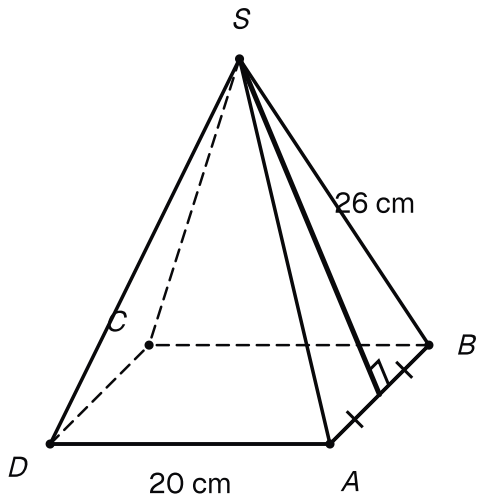
Racine. La hauteur est une longueur positive, donc $h = \sqrt{256} = 16$.

Conclusion. La hauteur h du cône de l'entonnoir mesure $16\ \text{cm}$.

Exercice 6

Aires d'une pyramide régulière

La pyramide régulière $SABCD$ a une base carrée de $20\ \text{cm}$ de côté. Son apothème mesure $a = 26\ \text{cm}$.



La pyramide régulière SABCD : base carrée de 20 cm de côté et apothème de 26 cm, tracé sur la face SAB.

1

Calcule l'aire latérale de cette pyramide.

INDICE

Utilise la formule de l'aire latérale d'une pyramide régulière. Il te faut d'abord le périmètre p de la base.

CORRIGÉ

Périmètre de la base. La base est un carré de côté $20\ \text{cm}$, donc $p = 4 \times 20 = 80\ \text{cm}$.

Aire latérale. D'après la formule de l'aire latérale d'une pyramide régulière, $\mathcal{A} = \dfrac{p \times a}{2}$. On prend $p = 80$ et $a = 26$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{80 \times 26}{2} \\ &= \frac{2\,080}{2} \\ &= 1\,040 \end{aligned}$$

Conclusion. L'aire latérale de la pyramide est $1\,040\ \text{cm}^2$.

2

Calcule l'aire totale de cette pyramide.

INDICE

À l'aire latérale, il faut ajouter l'aire de la base. Ici, la base est un carré.

CORRIGÉ

La base est un carré de côté $20\ \text{cm}$. Son aire est $\mathcal{B} = 20 \times 20 = 400\ \text{cm}^2$.

L'aire totale est la somme de l'aire latérale, trouvée à la question 1, et de l'aire de la base :

$$1\,040 + 400 = 1\,440$$

Conclusion. L'aire totale de la pyramide est $1\,440\ \text{cm}^2$.

Exercice 7

Le volume d'une bougie

Une bougie a la forme d'un cône de révolution de rayon $r = 5\ \text{cm}$ et de hauteur $h = 9\ \text{cm}$.

1

Calcule la valeur exacte du volume de la bougie.

INDICE

Applique la formule du volume d'un cône. Calcule d'abord r^2, et garde π dans le résultat.

CORRIGÉ

D'après la formule du volume d'un cône de révolution, $V = \dfrac{\pi \times r^2 \times h}{3}$. Ici, $r^2 = 5^2 = 25$ et $h = 9$:

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi \times 25 \times 9}{3} \\ &= \frac{225\pi}{3} \\ &= 75\pi \end{aligned}$$

Conclusion. Le volume exact de la bougie est $75\pi\ \text{cm}^3$.

2

Donne une valeur approchée de ce volume au dixième.

INDICE

Tape $75 \times \pi$ à la calculatrice, avec sa touche π. Arrondis au chiffre des dixièmes.

CORRIGÉ

Avec sa touche π, la calculatrice affiche $235{,}619\ldots$ pour $75 \times \pi$.

Le chiffre des centièmes est 1, plus petit que 5 : on garde le chiffre des dixièmes, 6.

Conclusion. Au dixième, le volume de la bougie est $V = 75\pi \approx 235{,}6\ \text{cm}^3$.

Exercice 8

Une brique de jus pyramidale

Une brique de jus a la forme d'une pyramide. Sa base est un rectangle de $15\ \text{cm}$ sur $10\ \text{cm}$; sa hauteur mesure $20\ \text{cm}$.

1

Calcule le volume de la brique en cm^3.

INDICE

Commence par l'aire du rectangle de base. Applique ensuite la formule du volume d'une pyramide, sans oublier de diviser par 3.

CORRIGÉ

Aire de la base. La base est un rectangle de $15\ \text{cm}$ sur $10\ \text{cm}$, donc $\mathcal{B} = 15 \times 10 = 150\ \text{cm}^2$.

Volume. D'après la formule du volume d'une pyramide, $V = \dfrac{\mathcal{B} \times h}{3}$, avec $h = 20$:

$$\begin{aligned} V &= \frac{150 \times 20}{3} \\ &= \frac{3\,000}{3} \\ &= 1\,000 \end{aligned}$$

Conclusion. Le volume de la brique est $1\,000\ \text{cm}^3$.

2

Combien de litres de jus la brique peut-elle contenir ?

INDICE

Un litre, c'est $1\ \text{dm}^3$. Combien de cm^3 y a-t-il dans $1\ \text{dm}^3$?

CORRIGÉ

Un litre est égal à un décimètre cube, et $1\ \text{dm}^3 = 1\,000\ \text{cm}^3$. Donc $1\ \text{L} = 1\,000\ \text{cm}^3$.

Le volume de la brique, trouvé à la question 1, vaut justement $1\,000\ \text{cm}^3$.

Conclusion. La brique peut contenir $1\ \text{L}$ de jus.