BURHAN

# Pyramide et cône de révolution

2ème Année Collège · Mathématiques

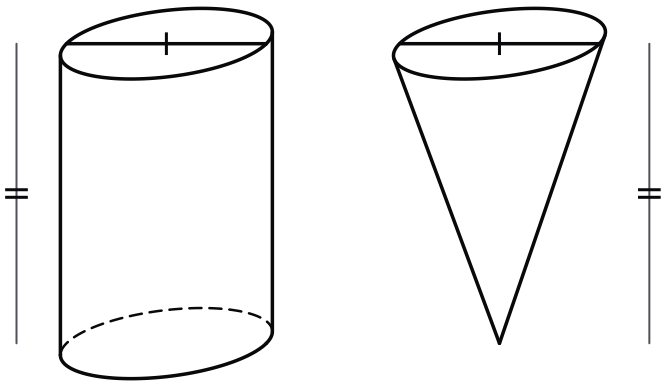
Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/pyramide-et-cone-de-revolution/cours

| Chapitre | Semestre |
| --- | --- |
| Pyramide et cône de révolution | Semestre 2 |

## Des solides pointus autour de toi

Regarde autour de toi. Un cornet de glace se termine par une pointe. Le toit pointu d'une tour monte vers un seul point.

Devant certains musées, une grande pyramide de verre couvre l'entrée. Ces objets ont une forme commune : une base, et des faces qui se rejoignent en un même point.



**Le verre et le cornet de la question qui suit, posés côte à côte : même ouverture ronde, même hauteur.**

**Devine : Le cornet et le verre**

Un cornet en carton et un verre en forme de cylindre ont la même ouverture ronde et la même hauteur. Tu remplis le cornet de semoule, puis tu le vides dans le verre. Combien de cornets pleins faut-il pour remplir le verre ?

**A.** Un seul cornet suffit.

**Faux.**

Le cornet se resserre vers sa pointe : il contient moins que le verre.

**B.** Deux cornets suffisent.

**Faux.**

Bonne intuition, mais deux cornets ne remplissent pas encore le verre.

**C.** Il faut trois cornets.

**Juste.**

Bonne prédiction. Tu retrouveras ce résultat dans la section sur le volume.

**D.** Il faut quatre cornets.

**Faux.**

Avec quatre cornets, le verre déborde.

**Correction**

Il faut trois cornets pleins pour remplir le verre. Le cornet contient donc le tiers du verre. Tu retrouveras ce résultat à la fin du chapitre, avec sa formule.

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à décrire ces solides pointus : la pyramide et le cône de révolution. Tu sauras les dessiner, fabriquer leur patron, puis calculer leur aire et leur volume.

Prépare ton cahier, une règle, un compas et des ciseaux. Tu vas beaucoup dessiner.

## Décrire une pyramide

**Vérifie : Lequel est une pyramide ?**

Voici quatre objets décrits avec des mots. Lequel a la forme d'une pyramide ?

**A.** Un toit à quatre pans triangulaires réunis en une pointe.

**Juste.**

Juste : la base est un carré, et les quatre triangles se rejoignent en un même point.

**B.** Une boîte de chaussures fermée, à six faces rectangulaires.

**Faux.**

Ses faces sont des rectangles : c'est un pavé droit, sans pointe.

**C.** Une boîte de conserve, avec deux disques et un bord courbe.

**Faux.**

C'est un cylindre : il a deux bases rondes et aucune pointe.

**D.** Un cornet de glace, avec une ouverture ronde et une pointe.

**Faux.**

Le cornet a bien une pointe, mais sa base est ronde : c'est un cône, que tu verras plus loin.

**Correction**

Le toit à quatre pans est une pyramide. Sa base est un polygone, et ses autres faces sont des triangles qui se rejoignent en un point. Le cornet a une pointe, mais sa base ronde n'est pas un polygone.

Le toit de la tour a la forme d'une pyramide. Sa **base** est le carré du bas. Sa pointe s'appelle le **sommet**.

Les triangles qui montent vers le sommet sont les **faces latérales**. La **hauteur** descend du sommet, tout droit, jusqu'à la base, comme un fil à plomb. Le point où elle touche la base s'appelle le **pied** de la hauteur.

Voici la définition exacte, avec les mots du chapitre.

**Définition : Pyramide**

Une **pyramide** est un solide formé :

- d'une **base**, qui est un polygone (triangle, carré, rectangle…) ;
- d'un point $S$ situé hors du plan de la base, appelé le **sommet** de la pyramide ;
- de **faces latérales** : ce sont des triangles qui ont tous le sommet $S$ pour sommet commun, et dont le troisième côté est un côté de la base.

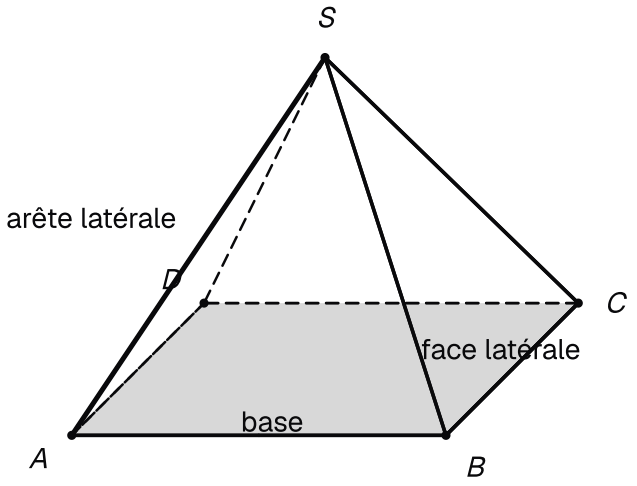
Les côtés des faces latérales qui passent par $S$ sont les **arêtes latérales**. Une pyramide se nomme par son sommet puis sa base : $SABCD$ a pour sommet $S$ et pour base $ABCD$.

La **hauteur** de la pyramide est le segment $[SH]$ qui va du sommet $S$ au point $H$ du plan de la base situé à la verticale de $S$. Le segment $[SH]$ fait un angle droit avec chaque droite de la base qui passe par $H$. Le point $H$ s'appelle le **pied** de la hauteur, et la longueur $SH$ s'appelle aussi la hauteur.

**Exemple : Les éléments d'une pyramide à base carrée**

Imagine un carré $ABCD$ posé sur la table, et un point $S$ au-dessus de son centre. Relie $S$ à $A$, $B$, $C$ et $D$ : tu obtiens la pyramide $SABCD$.

- Le sommet est $S$ ; la base est le carré $ABCD$.
- Les faces latérales sont les triangles $SAB$, $SBC$, $SCD$ et $SDA$.
- Les arêtes latérales sont $[SA]$, $[SB]$, $[SC]$ et $[SD]$.
- La base a $4$ côtés. La pyramide a donc $4$ faces latérales et $4 + 1 = 5$ faces en tout.
- Elle a $4 + 4 = 8$ arêtes et $4 + 1 = 5$ sommets.




**La pyramide SABCD : le carré ABCD est la base, S le sommet ; [SA] est une arête latérale et SBC une face latérale.**

**Méthode : décrire une pyramide ou un cône**

1. **Trouver la base** : c'est un polygone dans une pyramide, et un disque dans un cône.
2. **Repérer le sommet** : le point commun à toutes les faces latérales.
3. **Nommer les éléments** : arêtes latérales, faces latérales et hauteur.
4. **Compter** : si la base a $n$ côtés, la pyramide a $n$ faces latérales, $n+1$ faces en tout, $2n$ arêtes et $n+1$ sommets.

**Vérifie : Une base à cinq côtés**

La base d'une pyramide est un pentagone : un polygone à $5$ côtés. Combien cette pyramide a-t-elle d'arêtes ?

**A.** $5$ arêtes

**Faux.**

Tu as compté les arêtes latérales seulement. Il faut ajouter les $5$ côtés de la base.

**B.** $10$ arêtes

**Juste.**

Juste : $5$ arêtes latérales et $5$ côtés de la base.

**C.** $6$ arêtes

**Faux.**

$6$ est le nombre de sommets : les $5$ sommets de la base et le sommet $S$.

**D.** $11$ arêtes

**Faux.**
Le sommet n'est pas une arête. Compte seulement les segments : $5 + 5$.

**Indice 1**
Compte à part les arêtes latérales et les côtés de la base.

**Correction**
La pyramide a $5$ arêtes latérales, une par sommet de la base. Sa base a aussi $5$ côtés, qui sont des arêtes. En tout :

$$5 + 5 = 10$$

Cette pyramide a $10$ arêtes.

Certaines pyramides sont bien symétriques. Leur base est un **polygone régulier** : tous ses côtés ont la même longueur, et tous ses sommets sont sur un même cercle. Le carré et le triangle équilatéral en sont des exemples.

Un losange qui n'est pas un carré a ses quatre côtés égaux. Mais ses sommets ne sont pas sur un même cercle : ce n'est pas un polygone régulier.

En clair : une pyramide régulière a pour base un polygone régulier, et son sommet est juste au-dessus du centre du cercle de la base. Voici sa définition.

**Définition : Pyramide régulière**

Une pyramide est **régulière** lorsque :

- sa base est un **polygone régulier** : tous ses côtés ont la même longueur et tous ses sommets sont sur un même cercle (triangle équilatéral, carré…) ;
- le pied $H$ de sa hauteur est le **centre** de ce cercle. Pour une base carrée, c'est le point d'intersection des diagonales.

**Exemple : Une pyramide régulière à base carrée**

Prends une pyramide $SABCD$ dont la base est un carré de côté $6\ \text{cm}$. Le pied $H$ de la hauteur est le point d'intersection des diagonales du carré. La hauteur mesure $SH = 4\ \text{cm}$.

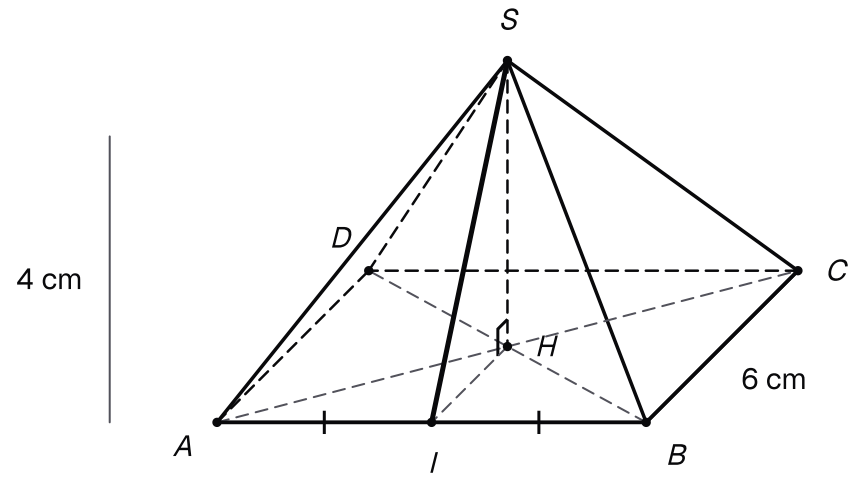
Le point $H$ est aussi le centre du cercle qui passe par $A$, $B$, $C$ et $D$ : trace-le au compas sur ton dessin. Les segments $[HA]$, $[HB]$, $[HC]$ et $[HD]$ sont des rayons de ce cercle : ils ont la même longueur.

La base est un carré, et $H$ est le centre de ce cercle : cette pyramide est régulière.

Note $I$ le milieu de $[AB]$. Le segment qui joint les milieux de $[AB]$ et de $[CD]$ passe par $H$ ; il mesure $6\ \text{cm}$ et $H$ est son milieu. Donc :

$$HI = 6 \div 2 = 3 \text{ cm}$$

Garde cette pyramide : elle revient dans tout le chapitre.



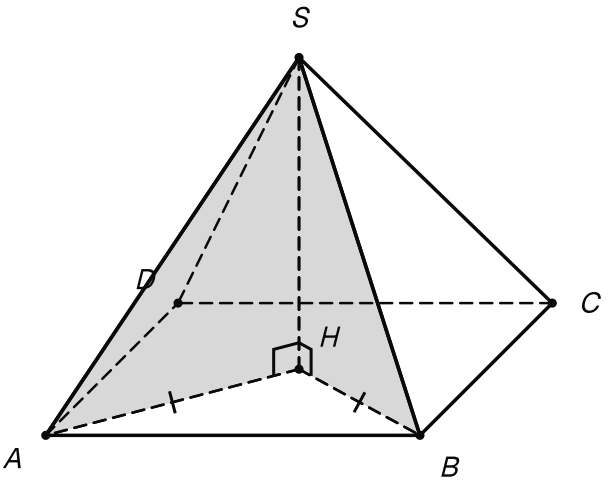

**La pyramide régulière SABCD de côté 6 cm et de hauteur SH = 4 cm, avec H au croisement des diagonales et I milieu de [AB].**

Pourquoi est-ce vrai ? Dans une pyramide régulière, toutes les arêtes latérales sont de même longueur. Un seul outil suffit pour le prouver : le théorème de Pythagore.

Rappel du chapitre sur le triangle rectangle : si un triangle $ABC$ est rectangle en $A$, alors

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Le côté $[BC]$, opposé à l'angle droit, est l'**hypoténuse**.




**Deux triangles rectangles en H dans la pyramide régulière : SHA et SHB ont le côté [SH] en commun, et HA = HB.**

**Propriété : Arêtes et faces d'une pyramide régulière**

Dans une pyramide régulière de sommet $S$ :

- toutes les arêtes latérales ont la **même longueur** ;
- les faces latérales sont donc des triangles **isocèles** en $S$, et leurs hauteurs issues de $S$ ont toutes la même longueur.

Cette longueur commune s'appelle l'**apothème** de la pyramide régulière.

---

**Démonstration**

**Étape 1.** Soit $A$ et $B$ deux sommets consécutifs de la base, et $H$ le pied de la hauteur. $H$ est le centre du cercle qui passe par les sommets de la base, donc $HA = HB$.

**Étape 2.** Par définition de la hauteur, les triangles $SHA$ et $SHB$ sont rectangles en $H$. D'après le théorème de Pythagore, $SA^2 = SH^2 + HA^2 = SH^2 + HB^2 = SB^2$, donc $SA = SB$. De proche en proche, les arêtes latérales sont égales et chaque face est isocèle en $S$.

**Étape 3.** Soit $I$ le milieu de $[AB]$. Dans un triangle isocèle, la hauteur issue du sommet principal passe par le milieu de la base : $SIA$ est rectangle en $I$. D'après le théorème de Pythagore, $SI^2 = SA^2 - IA^2$.

**Étape 4.** D'après l'étape 2, $SA$ est la même pour toutes les faces ; $IA$ aussi, moitié d'un côté de la base. Ces hauteurs sont donc égales.

**À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve**

Deux triangles rectangles suffisent.

- Par définition de la hauteur, $SHA$ est un triangle rectangle en $H$ : la hauteur $SH$ et la distance $HA$ donnent l'arête $SA$.
- La face $SAB$ est isocèle en $S$ : sa hauteur issue de $S$ arrive au milieu $I$ de $[AB]$. Dans le triangle $SIA$, rectangle en $I$, l'arête $SA$ et le demi-côté $IA$ donnent l'apothème $SI$.

La distance $HA$ est la même pour tous les sommets de la base : ce sont des rayons du même cercle. Donc toutes les arêtes latérales sont égales.

**Vérifie : Un argument de la preuve**

Dans la preuve, $A$ et $B$ sont deux sommets consécutifs de la base. On affirme que $HA = HB$. Pour quelle raison ?

**A.** Parce que les triangles $SHA$ et $SHB$ sont rectangles.
**Faux.**
Ces triangles sont bien rectangles, mais cela ne dit rien des longueurs $HA$ et $HB$.

**B.** Parce que la hauteur $[SH]$ arrive au pied $H$ dans la base.
**Faux.**
La hauteur donne l'angle droit en $H$. Elle ne dit rien des longueurs $HA$ et $HB$.

**C.** Parce que $SA = SB$ dans toute pyramide.
**Faux.**
C'est ce que l'on veut prouver : on ne peut pas s'en servir. Et c'est faux pour certaines pyramides, par exemple quand le sommet n'est pas au-dessus du centre de la base.

**D.** Parce que $H$ est le centre du cercle qui passe par $A$ et $B$.
**Juste.**
Juste : $[HA]$ et $[HB]$ sont deux rayons du même cercle.

**Correction**
Le pied $H$ de la hauteur est le centre du cercle qui passe par les sommets de la base. Les segments $[HA]$ et $[HB]$ sont deux rayons de ce cercle : donc $HA = HB$.

**Exemple : Calculer l'apothème et l'arête latérale**

Reprends la pyramide régulière $SABCD$ : côté $6\ \text{cm}$, hauteur $SH = 4\ \text{cm}$, $HI = 3\ \text{cm}$.

**L'apothème.** Par définition de la hauteur, le triangle $SHI$ est rectangle en $H$. Le théorème de Pythagore s'y applique :

$$\begin{aligned} SI^2 &= SH^2 + HI^2 \\ &= 16 + 9 = 25 \end{aligned}$$

Donc $SI = 5\ \text{cm}$.

**La demi-diagonale.** Le segment $[HI]$ est parallèle au côté $[AD]$ : il fait un angle droit avec $[AB]$. Le triangle $HIA$ est donc rectangle en $I$, avec $HI = IA = 3\ \text{cm}$. Par le théorème de Pythagore :

$$HA^2 = 9 + 9 = 18$$

Tu n'as pas besoin de $HA$ seul : tu gardes $HA^2 = 18$.

**L'arête latérale.** Par définition de la hauteur, le triangle $SHA$ est rectangle en $H$ :

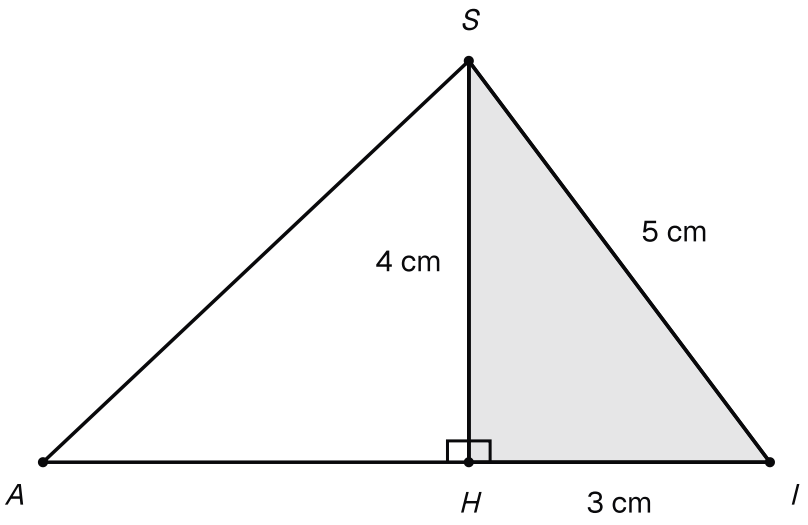
$$\begin{aligned} SA^2 &= SH^2 + HA^2 \\ &= 16 + 18 = 34 \end{aligned}$$

Donc $SA = \sqrt{34}$. La touche $\sqrt{\ }$ de la calculatrice donne $SA \approx 5{,}8\ \text{cm}$ au dixième.

**Autre chemin.** Comme dans la preuve, le triangle $SIA$ est rectangle en $I$. Il redonne l'apothème :

$$\begin{aligned} SI^2 &= SA^2 - IA^2 \\ &= 34 - 9 = 25 \end{aligned}$$

On retrouve $SI = 5\ \text{cm}$.




**Les triangles SHI et SHA dépliés autour de la hauteur commune [SH] : SI = 5 cm à droite, SA = racine de 34 à gauche.**

**Attention : trois longueurs différentes**

✗ « La hauteur, l'arête latérale et l'apothème, c'est la même longueur. »

✓ Dans une pyramide régulière, on distingue trois segments :

- la hauteur $[SH]$ relie le sommet au centre de la base ;
- l'arête $[SA]$ relie le sommet à un sommet de la base ;

- l'apothème $[SI]$ relie le sommet au milieu d'un côté de la base.

Ici, en centimètres : $SH = 4$, $SI = 5$ et $SA = \sqrt{34} \approx 5{,}8$ au dixième.

La hauteur est la plus courte : $[SI]$ est l'hypoténuse du triangle $SHI$, donc $SH < SI$. Et $[SA]$ est l'hypoténuse du triangle $SIA$, donc $SI < SA$.

**À toi : Trouver l'apothème**

Une pyramide régulière a pour base un carré de côté $16\ \text{cm}$. Sa hauteur mesure $6\ \text{cm}$. Calcule son apothème.

**Indice 1**
Place le pied $H$ de la hauteur, au centre de la base, et le milieu $I$ d'un côté. Cherche un triangle rectangle.
**Indice 2**
Le triangle $SHI$ est rectangle en $H$, avec $SH = 6$ et $HI = 8$. Applique le théorème de Pythagore.
**Indice 3**
Point délicat : $HI$ est la moitié du côté, $16 \div 2 = 8$, et non $16$.

**Réponse**
Le point $I$ est le milieu d'un côté de la base, donc $HI = 16 \div 2 = 8\ \text{cm}$.

Par définition de la hauteur, le triangle $SHI$ est rectangle en $H$. Le théorème de Pythagore donne :

$$\begin{aligned} SI^2 &= 6^2 + 8^2 \\ &= 36 + 64 = 100 \end{aligned}$$

**Conclusion.** L'apothème de cette pyramide mesure $SI = 10\ \text{cm}$.

## Représenter un solide en perspective

Ton cahier est plat, mais une pyramide ne l'est pas. Pour la dessiner, on utilise la **perspective cavalière**. C'est une façon de représenter un solide sur une feuille, comme si on le regardait de face et un peu d'en haut.

Une partie du solide est alors cachée derrière le reste.

**Devine : Ce que l'œil ne voit pas**

Sur un dessin en perspective cavalière, comment montre-t-on une arête cachée derrière le solide ?

**A.** On ne la dessine pas du tout.
**Faux.**
Sans elle, on ne comprend plus la forme du solide.

**B.** On la trace en trait plus épais.
**Faux.**

Un trait épais attire l'œil : il ferait croire que l'arête est devant.

**C.** On la trace en pointillés.
**Juste.**
Juste : les pointillés montrent une arête que l'on ne voit pas.

**D.** On la trace avec une autre couleur.
**Faux.**
La règle du dessin ne dépend pas des couleurs : elle utilise le type de trait.

**Correction**
On trace une arête cachée en **pointillés**. Les arêtes visibles restent en traits pleins. Ainsi, on devine tout le solide, même sa partie cachée.

**Méthode : dessiner un solide en perspective cavalière**

1. **Tracer la base vue de biais** : un carré devient un parallélogramme, un cercle devient une forme ovale.
2. **Placer le sommet** juste au-dessus de $H$, le pied de la hauteur.
3. **Tracer les arêtes** : une arête visible en trait plein, une arête cachée en pointillés.
4. **Vérifier** : sur ton dessin, deux côtés opposés de la base sont encore parallèles.

Pour une base posée sur la table, on suit des règles de mesure. Ces règles sont une **convention** : un choix que l'on fait au départ, puis que l'on garde.

- Le côté de devant est horizontal et garde sa vraie longueur.
- Une **fuyante** est un côté qui part vers l'arrière. On la trace vers la droite et vers le haut, avec un angle de $45°$ par rapport à l'horizontale.
- La longueur d'une fuyante est réduite de moitié : $6\ \text{cm}$ réels se tracent avec $3\ \text{cm}$.
- Un segment vertical, comme la hauteur, garde sa vraie longueur.

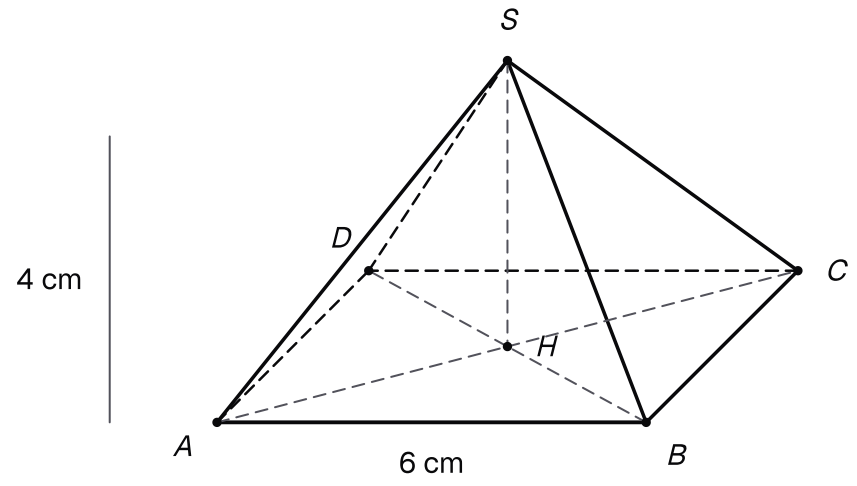
On pourrait choisir un autre angle ou une autre réduction. Dans ce chapitre, on choisit toujours $45°$ et la moitié.

**Exemple : Dessiner la pyramide à base carrée**

Dessine la pyramide régulière $SABCD$ de côté $6\ \text{cm}$ et de hauteur $4\ \text{cm}$.

- Trace $[AB]$ horizontal, de longueur $6\ \text{cm}$ : c'est le côté de devant.
- Depuis $A$ et $B$, trace deux fuyantes vers la droite et vers le haut, à $45°$ de l'horizontale, de longueur $6 \div 2 = 3\ \text{cm}$. Tu obtiens $D$ derrière $A$, et $C$ derrière $B$.

- Trace les diagonales du parallélogramme $ABCD$ : elles se coupent en $H$.
- Place $S$ à $4\ \text{cm}$ au-dessus de $H$, sur la verticale. Trace $[SA]$, $[SB]$, $[SC]$ et $[SD]$.
- Gomme les diagonales. Il reste à repasser en pointillés les arêtes cachées.




**Le dessin terminé de SABCD : [AB] de 6 cm devant, S à 4 cm au-dessus de H, et les trois arêtes issues de D en pointillés.**

**Vérifie : Les arêtes cachées**

Sur ton dessin de $SABCD$, $[AB]$ est devant et tu as tracé les fuyantes à $45°$, vers la droite et vers le haut. Le sommet $D$ est derrière $A$. Combien d'arêtes faut-il tracer en pointillés ?

**A.** $2$ arêtes : $[AD]$ et $[DC]$, les côtés de la base

**Faux.**

Il en manque une : l'arête latérale $[SD]$ part aussi du point caché $D$.

**B.** $3$ arêtes : $[AD]$, $[DC]$ et $[SD]$

**Juste.**

Juste : les trois arêtes qui partent de $D$ sont derrière les faces de devant.

**C.** $4$ arêtes : tout le carré $ABCD$

**Faux.**

Les côtés $[AB]$ et $[BC]$ bordent des faces que tu vois : ils restent en traits pleins.

**D.** Aucune arête : tout le solide se voit de face

**Faux.**

Les faces de devant cachent une partie du solide : certaines arêtes sont derrière.

**Indice 1**

Repère le sommet de la base qui est derrière tout le reste.

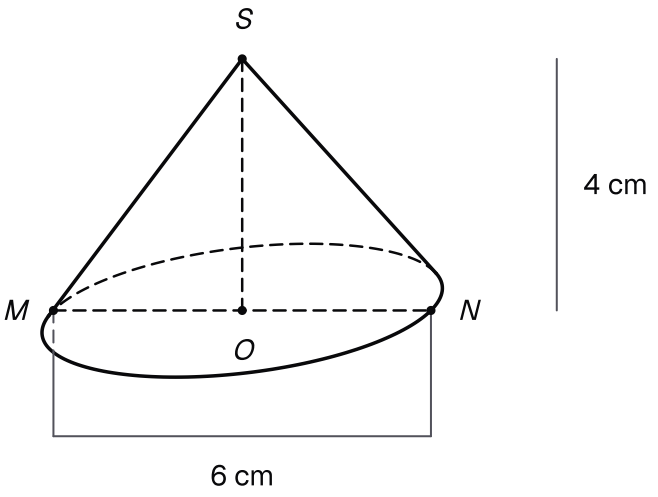
**Correction**

Le sommet $D$ est derrière les faces $SAB$ et $SBC$, que tu vois. Les trois arêtes qui partent de $D$ sont cachées : $[AD]$, $[DC]$ et $[SD]$. On les trace en pointillés ; les cinq autres restent en traits pleins.

**Exemple : Dessiner un cône**

Un cornet de glace a la forme d'un cône : tu en verras la définition plus loin. Dessine un cône de rayon $3\ \text{cm}$ et de hauteur $4\ \text{cm}$.

- Trace un diamètre horizontal de $6\ \text{cm}$ : il garde sa vraie longueur. Son milieu est le centre $O$ de la base.
- Trace autour de lui une forme ovale : c'est le cercle de la base, vu de biais.
- Place le sommet $S$ à $4\ \text{cm}$ au-dessus de $O$.
- Relie $S$ au bord gauche et au bord droit de la forme ovale.
- Trace en pointillés la moitié arrière du bord de la base : elle est cachée.




**Le cône de rayon 3 cm et de hauteur 4 cm : un diamètre de 6 cm, la base ovale, et S à 4 cm au-dessus du centre O.**

**À toi : Dessine une autre pyramide**

Dessine en perspective cavalière une pyramide régulière $SABCD$ à base carrée de côté $4\ \text{cm}$ et de hauteur $5\ \text{cm}$. Quelles longueurs traces-tu pour $[AB]$ et pour la fuyante $[AD]$ ? Où places-tu $S$ ?

**Indice 1**
Relis les règles choisies : le côté de devant garde sa vraie longueur, une fuyante part vers la droite et vers le haut et elle est réduite de moitié.
**Indice 2**
Le pied $H$ est l'intersection des diagonales du parallélogramme $ABCD$. La hauteur est verticale.
**Indice 3**
Point délicat : seules les fuyantes sont réduites. La hauteur $[SH]$ garde sa vraie longueur.

**Réponse**
Le côté de devant $[AB]$ est horizontal et garde sa vraie longueur : $4\ \text{cm}$. La fuyante $[AD]$ part vers la droite et vers le haut, à $45°$, réduite de moitié : $4 \div 2 = 2\ \text{cm}$.

Le point $H$ est l'intersection des diagonales du parallélogramme $ABCD$. Tu places $S$ à $5\ \text{cm}$ au-dessus de $H$ : la hauteur garde sa vraie longueur.

Les arêtes $[AD]$, $[DC]$ et $[SD]$ sont en pointillés.

Garde tes deux dessins sur ton cahier. Tu vas maintenant ouvrir ces solides à plat, comme on déplie une boîte en carton.

## Le patron d'une pyramide

**Devine : Quelle figure se plie en pyramide ?**

Tu découpes une figure dans du carton, puis tu la plies le long des côtés du carré. Laquelle donne une pyramide à base carrée ?

**A.** Un carré, avec un triangle collé sur chacun de ses quatre côtés.
**Juste.**
Juste : chaque triangle se relève, et leurs pointes se rejoignent au sommet.

**B.** Un carré, avec un triangle collé sur trois de ses côtés seulement.
**Faux.**
Il manque une face : la pyramide resterait ouverte d'un côté.

**C.** Un carré, avec quatre triangles collés tous sur le même côté.
**Faux.**
Les triangles s'empileraient au même endroit : ils se recouvriraient au pliage.

**D.** Quatre carrés et un triangle, collés en ligne les uns aux autres.
**Faux.**
Une pyramide à base carrée n'a qu'un seul carré : sa base.

**Correction**
Seul le carré bordé de quatre triangles donne la pyramide. Le carré devient la base. Chaque triangle se relève et devient une face latérale ; leurs pointes se rejoignent au sommet.

En clair : un **patron** est le solide déplié à plat. Tu peux le découper, puis le plier pour fabriquer le solide. Voici la définition exacte.

**Définition : Patron d'un solide**

Un **patron** d'un solide est une figure plane, d'un seul morceau, qui permet de fabriquer ce solide par pliage, sans que deux faces se recouvrent.

Le patron d'une pyramide est formé de sa base et de toutes ses faces latérales : chaque face latérale est accolée par un côté à la base ou à une autre face latérale.

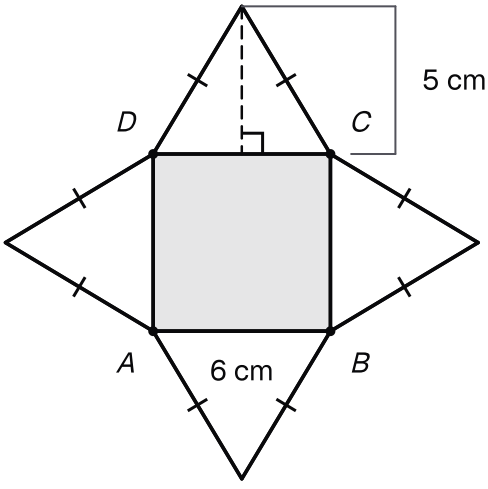
**Exemple : Le patron de notre pyramide**

Le patron de la pyramide régulière $SABCD$ (côté $6\ \text{cm}$, hauteur $4\ \text{cm}$) est d'un seul morceau. Il est formé de cinq figures.

| Figure | Nombre | Forme | Mesures |
|---|---|---|---|
| la base | $1$ | carré $ABCD$ | côté $6\ \text{cm}$ |
| les faces latérales | $4$ | triangles isocèles | base $6\ \text{cm}$, autres côtés $\sqrt{34} \approx 5{,}8\ \text{cm}$ au dixième |

Hauteur de chaque face : l'apothème, $5\ \text{cm}$.

Dessine le carré au centre de ta feuille. Sur chacun de ses côtés, construis un triangle isocèle. Tu peux aussi tracer la hauteur de $5\ \text{cm}$ depuis le milieu du côté.




**Le patron de SABCD : le carré ABCD de 6 cm au centre et, sur chaque côté, un triangle isocèle de hauteur 5 cm.**

**Méthode : construire le patron d'une pyramide**

1. **Tracer la base** en vraie grandeur.
2. **Construire les faces latérales** : sur chacun des côtés de la base, construis un triangle. Ses deux autres côtés mesurent la longueur d'une arête latérale : prends-la au compas.
3. **Vérifier** : deux côtés qui se rejoignent au pliage ont la même longueur.

**Vérifie : Les figures d'un patron**

Une pyramide a pour base un hexagone : un polygone à $6$ côtés. Combien de figures contient son patron ?

**A.** $6$ figures

**Faux.**

Tu as compté les faces latérales. N'oublie pas la base.

**B.** $12$ figures

**Faux.**

$12$ est le nombre d'arêtes, pas le nombre de faces.

**C.** $8$ figures

**Faux.**

Il y a une seule base : $6 + 1$ figures.

**D.** $7$ figures

**Juste.**

Juste : $6$ triangles et l'hexagone de la base.

**Correction**

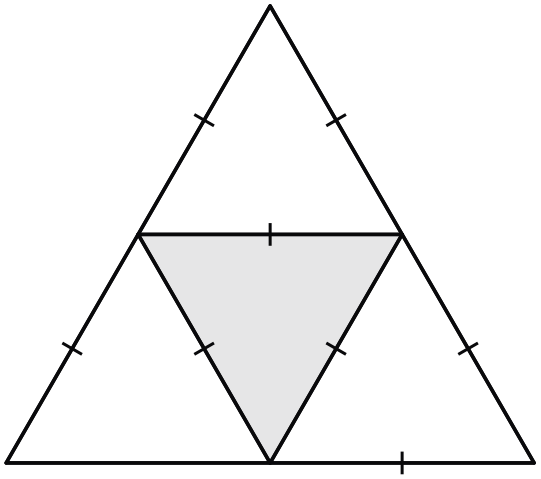
Le patron contient une figure par face. La pyramide a $6$ faces latérales et une base : $6 + 1 = 7$ figures, six triangles et un hexagone.

**Exemple : Un patron surprenant**

Prends une pyramide dont toutes les arêtes mesurent $4\ \text{cm}$. Sa base est un triangle équilatéral, et ses trois faces latérales aussi.

Pour son patron, trace un grand triangle équilatéral de côté $8\ \text{cm}$. Marque le milieu de chaque côté, puis relie ces trois milieux. Tu obtiens quatre triangles équilatéraux de côté $4\ \text{cm}$.

Le triangle du centre est la base. Plie les trois autres vers le haut : leurs pointes se rejoignent au sommet.




**Le grand triangle équilatéral de 8 cm partagé par ses milieux en quatre triangles équilatéraux de 4 cm.**

Construis ce patron sur une feuille épaisse, découpe-le, puis plie-le. Tu tiens alors une vraie pyramide dans ta main.

**À toi : L'apothème de la pyramide**

Une pyramide régulière a pour base un carré de côté $4\ \text{cm}$. Ses arêtes latérales mesurent $5\ \text{cm}$. Pour tracer son patron, calcule l'apothème $SI$ de la pyramide, au dixième.

**Indice 1**
Chaque face est un triangle $SAB$ isocèle en $S$. L'apothème $[SI]$ est sa hauteur issue de $S$ : il arrive au milieu $I$ de $[AB]$.
**Indice 2**
Le triangle $SIA$ est rectangle en $I$, d'hypoténuse $[SA]$. Applique le théorème de Pythagore. Pour la racine, utilise la touche $\sqrt{\ }$ de ta calculatrice.
**Indice 3**
Point délicat : $IA$ est la moitié du côté, donc $IA = 2$. Et on soustrait : $SI^2 = SA^2 - IA^2$.

**Réponse**
La face $SAB$ est isocèle en $S$ : sa hauteur $[SI]$ arrive au milieu $I$ de $[AB]$, donc $IA = 4 \div 2 = 2\ \text{cm}$.
Le triangle $SIA$ est rectangle en $I$, d'hypoténuse $[SA]$.

Le théorème de Pythagore donne $SA^2 = SI^2 + IA^2$. On cherche un côté de l'angle droit, donc on soustrait :

$$SI^2 = 25 - 4 = 21$$

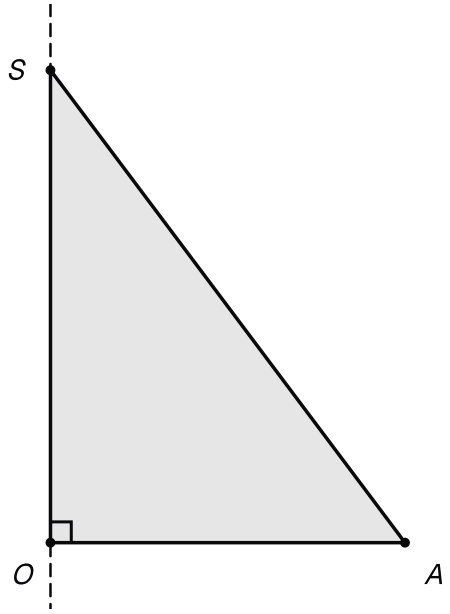
Ainsi $SI = \sqrt{21}$.

> **Conclusion.** À la calculatrice, l'apothème mesure $SI \approx 4{,}6\ \text{cm}$ au dixième.

Retiens l'idée : un patron de pyramide, c'est la base et une face sur chaque côté. Passons à un solide à base ronde : le cône.

## Le cône de révolution

> **Devine : Faire tourner un triangle**
>
> Tu colles un triangle rectangle en carton sur une baguette, le long d'un côté de l'angle droit. Tu fais tourner la baguette très vite. Quelle forme vois-tu apparaître ?
>
> **A.** Une forme de cornet, avec une pointe et une base ronde.
> **Juste.**
> Juste : l'autre côté de l'angle droit balaie un disque, et la pointe reste sur la baguette.
>
> **B.** Une forme de boîte de conserve, avec deux bases rondes.
> **Faux.**
> Une boîte de conserve s'obtient en faisant tourner un rectangle, pas un triangle.
>
> **C.** Une forme de pyramide, avec une base carrée et une pointe.
> **Faux.**
> En tournant, le triangle ne dessine aucun coin : la base est ronde.
>
> **D.** Une forme de prisme, avec deux triangles et trois rectangles.
> **Faux.**
> Un prisme ne vient pas d'une rotation : ses faces sont toutes planes.
>
> **Correction**
> Le côté de l'angle droit qui n'est pas sur la baguette balaie un disque : c'est la base. Le sommet du triangle posé sur la baguette reste en place : c'est la pointe. Tu vois une forme de cornet : un **cône de révolution**.




**Le triangle SOA, rectangle en O, collé le long de la baguette (SO) qui va tourner.**

Rappel de 1AC : on fait tourner un rectangle autour d'un de ses côtés. On obtient un **cylindre** de révolution, avec deux bases en disques de même rayon.

Ici, on fait tourner un triangle rectangle. Le mot « révolution » veut dire « un tour complet ».

**Définition : Cône de révolution**

On fait tourner un triangle $SOA$ rectangle en $O$ autour de la droite $(SO)$. Le solide obtenu est un **cône de révolution**.

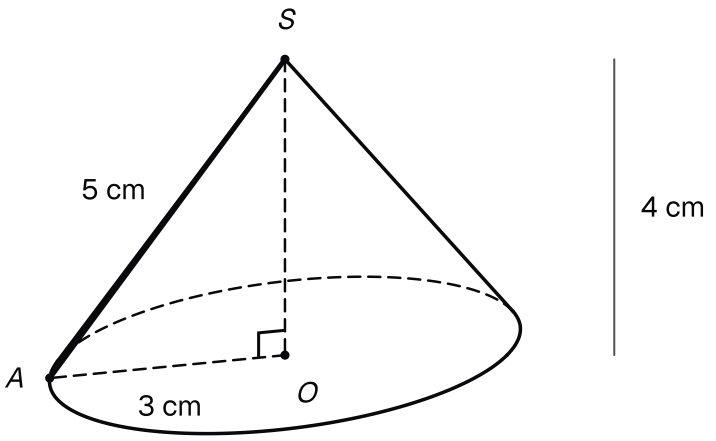
- Le point $S$ est le **sommet** du cône.
- La **base** est le disque de centre $O$ et de rayon $r = OA$.
- La **hauteur** du cône est le segment $[SO]$ ; sa longueur $h = SO$ s'appelle aussi la hauteur.
- Le segment $[SA]$, dans chacune de ses positions pendant la rotation, est une **génératrice** du cône. Sa longueur est notée $g = SA$.

**Exemple : Les éléments d'un cornet**

Un cornet de glace a la forme d'un cône de révolution. Son ouverture est un disque de centre $O$ et de rayon $r = 3\ \text{cm}$. Sa pointe est le sommet $S$.

- La hauteur est $[SO]$ : elle mesure $h = 4\ \text{cm}$.
- Le bord de l'ouverture est le cercle de la base.
- Chaque segment qui va de $S$ à un point $A$ de ce cercle est une génératrice.

Une génératrice $[SA]$ de ce cornet mesure $5\ \text{cm}$ : tu vas voir pourquoi juste après.




**Le cornet : sommet S, base de centre O, rayon OA = 3 cm, hauteur SO = 4 cm et génératrice SA = 5 cm.**

Pourquoi est-ce vrai ? Le cornet donne $r = 3$, $h = 4$ et $g = 5$. Or :

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

Et $5^2 = 25$ : les deux nombres sont égaux.

Ce n'est pas un hasard. Par définition du cône de révolution, $SOA$ est un triangle rectangle en $O$ : on l'a fait tourner autour de $(SO)$ pour fabriquer le cône. Le théorème de Pythagore relie donc ses trois côtés.

**Propriété : Génératrice, rayon et hauteur d'un cône**

Dans un cône de révolution de rayon $r$, de hauteur $h$ et de génératrice $g$ :

$$g^2 = r^2 + h^2.$$

**Démonstration**

**Étape 1.** Par définition du cône de révolution, le triangle $SOA$ qui l'engendre est rectangle en $O$, avec $OA = r$, $SO = h$ et $SA = g$.

**Étape 2.** Son hypoténuse est le côté $[SA]$, opposé à l'angle droit. D'après le théorème de Pythagore, $SA^2 = OA^2 + SO^2$, c'est-à-dire $g^2 = r^2 + h^2$.

**À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve**

Tout repose sur un seul triangle : $SOA$, rectangle en $O$. Le cône naît de la rotation de ce triangle.

- Ses côtés sont le rayon $OA = r$, la hauteur $SO = h$ et la génératrice $SA = g$.
- L'hypoténuse est la génératrice, opposée à l'angle droit.

D'après le théorème de Pythagore :

$$g^2 = r^2 + h^2$$

**Vérifie : L'hypoténuse du cône**

Dans la preuve, on applique le théorème de Pythagore au triangle $SOA$. Quel côté est son hypoténuse ?

**A.** La hauteur $[SO]$

**Faux.**
La hauteur est un côté de l'angle droit en $O$.

**B.** Le rayon $[OA]$

**Faux.**
Le rayon est l'autre côté de l'angle droit en $O$.

**C.** La génératrice $[SA]$

**Juste.**
Juste : elle est opposée à l'angle droit en $O$.

**D.** Le diamètre de la base

**Faux.**
Le diamètre n'est pas un côté du triangle $SOA$.

**Correction**
L'angle droit du triangle $SOA$ est en $O$. Le côté opposé est $[SA]$, la génératrice : c'est l'hypoténuse.

Voilà pourquoi $g^2 = r^2 + h^2$, et la génératrice est le plus long des trois côtés.

**Exemple : Le toit pointu d'une tour**

Le toit d'une tour a la forme d'un cône de révolution. Son rayon mesure $r = 5\ \text{m}$ et sa hauteur $h = 12\ \text{m}$. Quelle est la longueur d'une génératrice ?

Par définition du cône de révolution, $SOA$ est un triangle rectangle en $O$. D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} g^2 &= r^2 + h^2 \\ &= 25 + 144 \\ &= 169 \end{aligned}$$

Comme $13^2 = 169$, la génératrice mesure $g = 13\ \text{m}$.

**Méthode : calculer une longueur par le théorème de Pythagore**

1. **Repérer un triangle rectangle** dans le solide : $SHI$ ou $SHA$ dans une pyramide régulière, $SOA$ dans un cône.
2. **Nommer l'hypoténuse** : le côté opposé à l'angle droit.
3. **Écrire l'égalité de Pythagore**, puis remplacer par les longueurs connues.
4. **Calculer** la longueur cherchée, exacte ou approchée, avec son unité.

**Attention : rayon, diamètre, hauteur et génératrice**

✗ « Le diamètre de la base mesure $10\ \text{cm}$, donc $r = 10$. »

✓ Le rayon est la moitié du diamètre : $r = 10 \div 2 = 5\ \text{cm}$.

✗ « La génératrice et la hauteur, c'est pareil. »

✓ La hauteur $[SO]$ relie le sommet $S$ au centre $O$ du disque. La génératrice $[SA]$ relie $S$ à un point $A$ du bord.

La génératrice est l'hypoténuse du triangle $SOA$ : elle est plus longue que la hauteur.

**À toi : Trouver la hauteur d'un cône**

Un cône de révolution a un rayon de $6\ \text{cm}$ et une génératrice de $10\ \text{cm}$. Calcule sa hauteur.

**Indice 1**
Dessine le triangle $SOA$, rectangle en $O$, et place les longueurs connues.
**Indice 2**
L'hypoténuse est la génératrice : $SA^2 = OA^2 + SO^2$, soit $100 = 36 + h^2$.
**Indice 3**
Point délicat : on cherche un côté de l'angle droit, donc on soustrait : $h^2 = 100 - 36$.

**Réponse**
Par définition du cône de révolution, le triangle $SOA$ est rectangle en $O$ ; son hypoténuse est la génératrice $[SA]$.

Le théorème de Pythagore donne $SA^2 = OA^2 + SO^2$, soit $100 = 36 + h^2$. On cherche un côté de l'angle droit, donc on soustrait :

$$h^2 = 100 - 36 = 64$$

**Conclusion.** Comme $8^2 = 64$, la hauteur du cône mesure $h = 8\ \text{cm}$.

**Remarque : Coin devoir : calculer une génératrice**

En devoir, on te donne un cône de rayon $15\ \text{cm}$ et de hauteur $20\ \text{cm}$. On te demande sa génératrice. Voici une rédaction modèle.

« Par définition du cône de révolution, $SOA$ est un triangle rectangle en $O$. D'après le théorème de Pythagore : »

$$\begin{aligned} SA^2 &= OA^2 + SO^2 \\ &= 225 + 400 = 625 \end{aligned}$$

« Donc $SA = 25\ \text{cm}$, car $25^2 = 625$. »

Nomme le triangle rectangle et son angle droit avant tout calcul.

## Le patron d'un cône

**Devine : Ouvrir un cornet**

Tu découpes un cornet en papier le long d'une génératrice, de la pointe jusqu'au bord. Puis tu l'étales à plat sur la table. Quelle forme obtiens-tu ?

**A.** Un triangle, avec la pointe en haut.

**Faux.**
Le bord du cornet est rond : à plat, il reste un arc de cercle.

**B.** Une part de disque, comme une part de gâteau.

**Juste.**
Juste : la pointe devient le centre, et le bord devient un arc de cercle.

**C.** Un rectangle, comme l'étiquette d'une boîte.

**Faux.**
C'est le cas d'un cylindre déroulé, pas d'un cône.

**D.** Un disque complet, sans aucune entaille.

**Faux.**
Un disque complet ne peut pas former une pointe : il manque une part.

**Correction**
À plat, le cornet devient une part de disque. La pointe devient le centre de cette part, et chaque génératrice devient un rayon. Le bord rond du cornet devient un arc de cercle.

En clair : cette part de disque s'appelle un **secteur circulaire**. Un secteur est limité par deux rayons et un arc de cercle. L'**angle du secteur** est l'angle formé par ses deux rayons.

Le patron d'un cône réunit ce secteur et le disque de la base.

**Propriété : Patron d'un cône de révolution**

Le patron d'un cône de révolution de rayon $r$ et de génératrice $g$ est formé :

- d'un **disque** de rayon $r$, la base ;
- d'un **secteur circulaire** de rayon $g$, la surface latérale.

L'arc du secteur s'enroule exactement autour du cercle de la base : sa longueur est égale au périmètre de la base, $2\pi r$.

**Remarque : Un résultat admis**

Ce résultat est admis. Tu peux l'observer en roulant un secteur en papier : l'arc se pose tout autour du disque de la base. Cette observation n'est pas une preuve.

**Exemple : Le patron du cornet**

Reprends le cornet : rayon $r = 3\ \text{cm}$, génératrice $g = 5\ \text{cm}$.

- La base est un disque de rayon $3\ \text{cm}$.
- La surface latérale est un secteur de rayon $5\ \text{cm}$.
- L'arc du secteur a la longueur du périmètre de la base : $2\pi \times 3 = 6\pi\ \text{cm}$, soit environ $18{,}8\ \text{cm}$ au dixième.

Le cercle complet de rayon $5\ \text{cm}$ mesurerait $2\pi \times 5 = 10\pi\ \text{cm}$. L'arc n'en est qu'une partie.

**Méthode : calculer l'angle du secteur**

1. **Comparer l'arc au cercle entier** : le cercle complet de rayon $g$ mesure $2\pi g$ et correspond à $360°$. L'arc du secteur mesure $2\pi r$.
2. **Admettre la proportionnalité** : la longueur de l'arc est proportionnelle à l'angle du secteur ; c'est un fait admis.
3. **Calculer l'angle** $\alpha$ du secteur : $\alpha = \dfrac{360 \times r}{g}$ degrés.
4. **Contrôler** : l'angle est inférieur à $360°$, car $r$ est plus petit que $g$.

**Exemple : L'angle du secteur du cornet**

Pour le cornet, $r = 3\ \text{cm}$ et $g = 5\ \text{cm}$. L'arc mesure $6\pi$ et le cercle complet $10\pi$ : l'arc est les $\dfrac{3}{5}$ du cercle. L'angle est donc les $\dfrac{3}{5}$ de $360°$ :

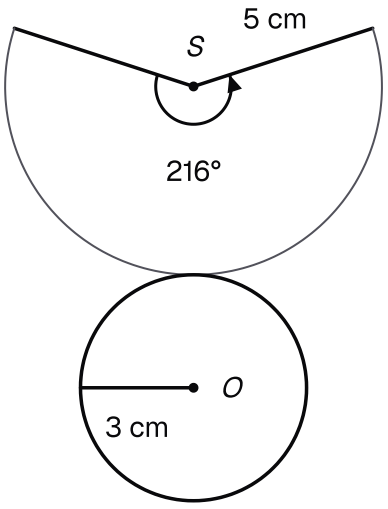
$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{360 \times 3}{5} \\ &= \frac{1\,080}{5} \\ &= 216\end{aligned}$$

L'angle du secteur mesure $216°$. Contrôle : $216°$ est bien inférieur à $360°$.

Trace au compas un cercle de centre $S$ et de rayon $5\ \text{cm}$, puis au rapporteur un angle de $216°$.

Dessine ensuite le disque de rayon $3\ \text{cm}$ : il touche l'arc du secteur en un seul point, et son centre est à $5 + 3 = 8\ \text{cm}$ de $S$. Le patron est ainsi d'un seul morceau.

Découpe le patron, puis roule le secteur : l'arc s'enroule autour du disque.




**Le patron du cornet : un secteur de centre S, de rayon 5 cm et d'angle 216 degrés, et le disque de rayon 3 cm qui touche l'arc.**

**Vérifie : Un autre secteur**

Un cône a pour rayon $r = 2\ \text{cm}$ et pour génératrice $g = 6\ \text{cm}$. Quel est l'angle du secteur de son patron ?

**A.** $1\,080°$

**Faux.**

Tu as calculé $\frac{360 \times 6}{2}$ : $g$ et $r$ sont inversés. L'angle dépasserait $360°$.

**B.** $720°$

**Faux.**

Tu as calculé $360 \times 2 = 720$ sans diviser par $g = 6$.

**C.** $240°$

**Faux.**

C'est l'angle de la part qui manque : $360 - 120 = 240$.

**D.** $120°$

**Juste.**

Juste : $\dfrac{360 \times 2}{6} = 120$.

**Indice 1**

Utilise la formule de la méthode, avec $r$ au numérateur.

**Correction**

On applique la méthode avec $r = 2$ et $g = 6$ :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{360 \times 2}{6} \\ &= \frac{720}{6} = 120 \end{aligned}$$

L'angle du secteur mesure $120°$, soit le tiers d'un tour.

**Attention : le rayon du secteur**

✗ « Le secteur est tracé avec le rayon $r$ du cône. »

✓ Le secteur est tracé avec la génératrice $g$. Son arc a la longueur du périmètre de la base, $2\pi r$, et non $2\pi g$.

Pour le cornet : un secteur de rayon $5\ \text{cm}$, avec un arc de $6\pi\ \text{cm}$.

**À toi : Le patron d'un cône**

Un cône a pour rayon $4\ \text{cm}$ et pour génératrice $5\ \text{cm}$. Décris son patron : le rayon du disque, le rayon du secteur et l'angle du secteur.

**Indice 1**

Le patron réunit un disque, la base, et un secteur, la surface latérale.

**Indice 2**

L'angle se calcule par $\alpha = \dfrac{360 \times r}{g}$.

**Indice 3**

Point délicat : le secteur a pour rayon la génératrice $g = 5$, pas le rayon $r = 4$.

**Réponse**

Le patron est formé d'un disque de rayon $4\ \text{cm}$, la base, et d'un secteur de rayon $5\ \text{cm}$, la surface latérale.

L'angle du secteur se calcule avec $r = 4$ et $g = 5$ :

$$\alpha = \frac{360 \times 4}{5} = \frac{1\,440}{5} = 288$$

**Conclusion.** Le secteur a un angle de $288°$. Le disque touche l'arc du secteur en un seul point : le patron est d'un seul morceau.

Tu sais maintenant fabriquer un cornet en papier aux bonnes mesures. Le secteur que tu découpes a une aire : c'est l'aire latérale du cône, que tu vas calculer maintenant.

## Aire latérale et aire totale

**Devine : Habiller une pyramide de verre**

On veut couvrir de verre les quatre faces latérales d'une pyramide régulière à base carrée. La base reste au sol. Que faut-il calculer ?

**A.** L'aire du carré de la base.
**Faux.**
La base reste au sol : on ne la couvre pas.

**B.** La somme des aires des quatre triangles.
**Juste.**
Juste : chaque face latérale est un triangle à couvrir.

**C.** Le volume de toute la pyramide.
**Faux.**
Le volume mesure la place à l'intérieur, pas la surface à couvrir.

**D.** La somme des longueurs des arêtes.
**Faux.**
Une longueur ne dit pas combien de verre il faut : on cherche une aire.

**Correction**
On couvre les quatre faces latérales : il faut la somme de leurs aires. Cette somme s'appelle l'**aire latérale** de la pyramide.

Rappel de 1AC : l'aire d'un triangle est $\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$.

L'aire d'un disque de rayon $r$ est $\pi \times r^2$. La longueur d'un cercle de rayon $r$ est $2\pi r$.

**Définition : Aire latérale et aire totale**

- L'**aire latérale** d'une pyramide est la somme des aires de ses faces latérales.
- L'**aire latérale** d'un cône de révolution est l'aire du secteur circulaire de son patron.

- L'**aire totale** d'une pyramide ou d'un cône est la somme de son aire latérale et de l'aire de sa base.

**Exemple : L'aire latérale par la somme des faces**

Reprends la pyramide régulière $SABCD$ : côté $6\ \text{cm}$, apothème $5\ \text{cm}$. Chaque face latérale est un triangle de base $6\ \text{cm}$ et de hauteur $5\ \text{cm}$ :

$$\frac{6 \times 5}{2} = 15\ \text{cm}^2$$

Les quatre faces sont identiques :

$$4 \times 15 = 60\ \text{cm}^2$$

L'aire de la base est $6 \times 6 = 36\ \text{cm}^2$. L'aire totale est donc $60 + 36 = 96\ \text{cm}^2$.

**Vérifie : Une formule plus rapide ?**

Une pyramide régulière a pour base un triangle équilatéral de côté $4\ \text{cm}$. Son apothème mesure $6\ \text{cm}$. Chaque face latérale a pour aire $\frac{4 \times 6}{2} = 12\ \text{cm}^2$.

Le périmètre de la base est $p = 12\ \text{cm}$. Calcule $\frac{p \times 6}{2}$. Que trouves-tu ?

**A.** $36\ \text{cm}^2$

**Juste.**

Juste : $\frac{12 \times 6}{2} = \frac{72}{2} = 36$.

**B.** $72\ \text{cm}^2$

**Faux.**

Tu as oublié de diviser par $2$ : $12 \times 6 = 72$.

**C.** $18\ \text{cm}^2$

**Faux.**

Tu as divisé par $4$ au lieu de $2$ : $72 \div 4 = 18$.

**D.** $12\ \text{cm}^2$

**Faux.**

C'est l'aire d'une seule face. Le calcul demandé utilise le périmètre de toute la base.

**Correction**

Le calcul demandé donne :

$$\frac{12 \times 6}{2} = \frac{72}{2} = 36$$

On trouve $36\ \text{cm}^2$. La somme des aires des trois faces vaut aussi $3 \times 12 = 36\ \text{cm}^2$ : les deux résultats sont égaux.

> Ce calcul vérifie sur un exemple la formule qui suit ; il ne la prouve pas.

**Propriété : Aire latérale d'une pyramide régulière**

L'aire latérale d'une pyramide régulière est égale à la moitié du produit du périmètre $p$ de sa base par son apothème $a$ :

$$\mathcal{A} = \frac{p \times a}{2}.$$

**Remarque : Un résultat admis**

Ce résultat est admis. L'activité précédente l'a vérifié sur un exemple, sans le prouver. En clair : on multiplie le périmètre de la base par l'apothème, puis on divise par $2$.

**Exemple : La formule sur notre pyramide**

Pour la pyramide $SABCD$, le périmètre de la base est $p = 4 \times 6 = 24\ \text{cm}$. L'apothème est $a = 5\ \text{cm}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{p \times a}{2} \\ &= \frac{24 \times 5}{2} \\ &= 60 \end{aligned}$$

L'aire latérale est $60\ \text{cm}^2$, comme avec la somme des faces. L'aire totale est $60 + 36 = 96\ \text{cm}^2$.

**Propriété : Aire latérale d'un cône de révolution**

L'aire latérale d'un cône de révolution de rayon $r$ et de génératrice $g$ est :

$$\mathcal{A} = \pi \times r \times g.$$

**Remarque : Un résultat admis**

Ce résultat est admis. Il donne l'aire du secteur du patron sans mesurer son angle.

**Exemple : L'aire latérale du cornet**

Pour le cornet, $r = 3\ \text{cm}$ et $g = 5\ \text{cm}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \pi \times r \times g \\ &= \pi \times 3 \times 5 \\ &= 15\pi\end{aligned}$$

L'aire latérale est $15\pi \text{ cm}^2$, soit environ $47{,}1 \text{ cm}^2$ au dixième.

La base a pour aire $\pi \times 3^2 = 9\pi \text{ cm}^2$. L'aire totale du cornet fermé est donc :

$$15\pi + 9\pi = 24\pi \text{ cm}^2$$

Elle vaut environ $75{,}4 \text{ cm}^2$ au dixième.

**Remarque : Un contrôle avec le patron**

Dans le patron du cornet, le secteur a un angle de $216°$ et un rayon de $5 \text{ cm}$. C'est une part du disque de rayon $5 \text{ cm}$, dont l'aire est $\pi \times 5^2 = 25\pi \text{ cm}^2$.

Cette part est les $\dfrac{216}{360} = \dfrac{3}{5}$ du disque. Son aire est donc :

$$\frac{3}{5} \times 25\pi = 15\pi$$

On retrouve bien $\pi \times 3 \times 5$. Ce contrôle sur un exemple n'est pas une preuve.

**Méthode : calculer une aire latérale et une aire totale**

1. **Choisir la formule** : somme des faces, formule de la pyramide régulière ou formule du cône.
2. **Calculer les longueurs manquantes** : apothème ou génératrice, par le théorème de Pythagore.
3. **Ajouter l'aire de la base** pour obtenir l'aire totale.
4. **Écrire l'unité d'aire** : $\text{cm}^2$ ou $\text{m}^2$.

**À toi : L'aire latérale d'un cône**

Un cône de révolution a pour rayon $6 \text{ cm}$ et pour hauteur $8 \text{ cm}$. Calcule son aire latérale : valeur exacte, puis valeur approchée au dixième.

**Indice 1**
La formule demande la génératrice $g$. Commence par la calculer.
**Indice 2**
Dans le triangle $SOA$ rectangle en $O$ : $g^2 = 36 + 64$.
**Indice 3**
Point délicat : la formule utilise la génératrice $g = 10$, pas la hauteur $h = 8$.

**Réponse**

**La génératrice.** Par définition du cône de révolution, le triangle $SOA$ est rectangle en $O$. Le théorème de Pythagore donne :

$$\begin{aligned} g^2 &= 6^2 + 8^2 \\ &= 36 + 64 = 100 \end{aligned}$$

Donc $g = 10\ \text{cm}$.

**L'aire latérale.** On applique la formule de l'aire latérale d'un cône :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \pi \times 6 \times 10 \\ &= 60\pi \end{aligned}$$

**Conclusion.** L'aire latérale du cône vaut $60\pi\ \text{cm}^2$, soit environ $188{,}5\ \text{cm}^2$ au dixième.

**Remarque : Coin devoir : rédiger un calcul d'aire**

En devoir, cite la formule avant de calculer. Voici une rédaction modèle pour le cornet.

« D'après la formule de l'aire latérale d'un cône : »

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \pi \times r \times g \\ &= \pi \times 3 \times 5 = 15\pi \end{aligned}$$

« L'aire latérale vaut $15\pi\ \text{cm}^2$, soit environ $47{,}1\ \text{cm}^2$ au dixième. »

Donne d'abord la valeur exacte, puis la valeur approchée avec sa précision.

## Volume d'une pyramide et d'un cône

Rappel de 1AC : un prisme droit a pour volume $\mathcal{B} \times h$, avec $\mathcal{B}$ l'aire de sa base et $h$ sa hauteur. Pour un cylindre de rayon $r$ et de hauteur $h$, c'est $\pi \times r^2 \times h$.

Un volume s'écrit en $\text{cm}^3$, et $1\ \text{L} = 1\ \text{dm}^3 = 1\,000\ \text{cm}^3$.

**Devine : L'expérience du sable**

On prend une pyramide creuse et un prisme droit creux, de même base carrée et de même hauteur. On remplit la pyramide de sable fin, puis on la vide dans le prisme. On recommence jusqu'à ce que le prisme soit plein.

Combien de pyramides pleines faut-il ?

**A.** Deux pyramides pleines.

**Faux.**
Après deux pyramides, le prisme n'est pas encore plein.

**B.** Quatre pyramides pleines.

**Faux.**
Le prisme déborde avant la quatrième pyramide.

**C.** Trois pyramides pleines.

**Juste.**

Juste : trois pyramides pleines remplissent exactement le prisme.

**D.** Six pyramides pleines.

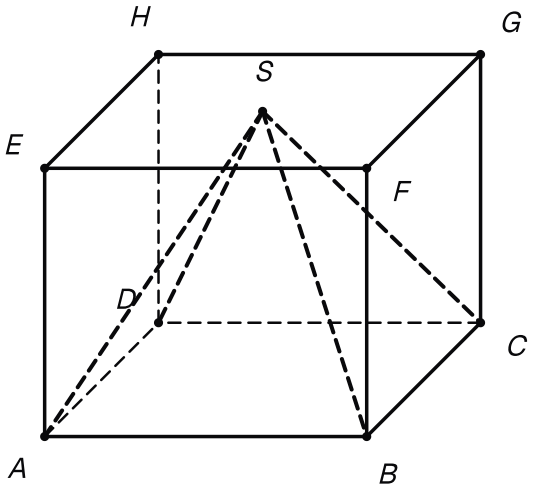
**Faux.**

Six pyramides rempliraient deux prismes.

**Correction**

Il faut trois pyramides pleines. Le volume de la pyramide est donc le tiers de celui du prisme de même base et de même hauteur.

Tu peux refaire l'expérience avec de l'eau. C'est une observation : elle ne prouve pas la formule.




**La pyramide creuse placée dans le prisme droit : même base carrée ABCD, et le sommet S sur la face du haut, donc même hauteur.**

**Propriété : Volume d'une pyramide**

Le volume d'une pyramide est égal au tiers du produit de l'aire $\mathcal{B}$ de sa base par sa hauteur $h$ :

$$V = \frac{\mathcal{B} \times h}{3}.$$

**Remarque : Un résultat admis**

Ce résultat est admis. L'expérience du sable le rend crédible, mais ce n'est pas une preuve. En clair : une pyramide occupe le tiers du prisme de même base et de même hauteur.

**Exemple : Le volume de notre pyramide**

Pour la pyramide $SABCD$, la base est un carré de côté $6\ \text{cm}$ et la hauteur est $h = 4\ \text{cm}$. L'aire de la base vaut :

$$\mathcal{B} = 6 \times 6 = 36\ \text{cm}^2$$

On applique la formule du volume :

$$\begin{aligned} V &= \frac{\mathcal{B} \times h}{3} \\ &= \frac{36 \times 4}{3} \\ &= 48 \end{aligned}$$

Le volume est $48\ \text{cm}^3$. Le prisme de même base et de même hauteur aurait un volume de $36 \times 4 = 144\ \text{cm}^3$, le triple.

**Attention : le tiers**

✗ « Pour la pyramide, $V = \mathcal{B} \times h = 36 \times 4 = 144\ \text{cm}^3$. »

✓ Il faut diviser par $3$ :

$$\begin{aligned} V &= \frac{\mathcal{B} \times h}{3} \\ &= \frac{144}{3} = 48\ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

Sans la division par $3$, tu calcules le volume d'un prisme droit qui a la même base et la même hauteur. Pour un cône, tu calculerais celui du cylindre.

**Devine : Le cornet et le verre, à nouveau**

Un cône et un cylindre ont la même base et la même hauteur. D'après l'expérience du sable, et sans calculer, que prévois-tu pour le volume du cône ?

**A.** Le même volume que le cylindre.

**Faux.**
Le cône se resserre vers sa pointe : il contient moins.

**B.** La moitié du volume du cylindre.

**Faux.**
La moitié, c'est trop : le cône contient moins encore.

**C.** Le double du volume du cylindre.

**Faux.**
Le cône tient à l'intérieur du cylindre : il ne peut pas contenir plus.

**D.** Le tiers du volume du cylindre.

**Juste.**
Juste : comme pour la pyramide et le prisme, il faut trois cônes.

**Correction**
Comme la pyramide, le cône occupe le tiers du cylindre de même base et de même hauteur. C'est ce que dit la formule suivante.

**Propriété : Volume d'un cône de révolution**

Le volume d'un cône de révolution de rayon $r$ et de hauteur $h$ est :

$$V = \frac{\pi \times r^2 \times h}{3}.$$

**Remarque : Un résultat admis**

Ce résultat est admis. Il suit la même idée que pour la pyramide : le tiers du cylindre de même base et de même hauteur.

**Exemple : Le volume du cornet**

Pour le cornet, $r = 3$ cm et $h = 4$ cm.

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi \times r^2 \times h}{3} \\ &= \frac{\pi \times 9 \times 4}{3} \\ &= 12\pi \end{aligned}$$

Le volume exact est $12\pi$ cm$^3$. À la calculatrice, $12\pi \approx 37{,}7$ : le cornet contient environ $37{,}7$ cm$^3$, au dixième.

**Attention : valeur exacte et valeur approchée**

✗ « Le volume du cornet est égal à $37{,}7$ cm$^3$. »

✓ $12\pi$ cm$^3$ est la valeur exacte. $37{,}7$ cm$^3$ est une valeur approchée au dixième : on écrit $V \approx 37{,}7$ cm$^3$.

Écris le signe $\approx$ et la précision. Garde $\pi$ jusqu'au bout du calcul : le remplacer trop tôt par $3{,}14$ fausse les derniers chiffres.

**Exemple : Un tas de semoule en litres**

Au marché, un tas de semoule a la forme d'un cône de rayon $30\ \text{cm}$ et de hauteur $40\ \text{cm}$.

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi \times 30^2 \times 40}{3} \\ &= \frac{\pi \times 900 \times 40}{3} \\ &= 12\,000\pi \end{aligned}$$

Le volume vaut $12\,000\pi\ \text{cm}^3$, soit environ $37\,699\ \text{cm}^3$ à l'unité.

Comme $1\ \text{L} = 1\,000\ \text{cm}^3$, on divise par $1\,000$ : le tas contient $V \approx 37{,}7\ \text{L}$ de semoule, au dixième.

**Attention : les unités**

✗ « Le cône a pour rayon $30\ \text{cm}$ et pour hauteur $2\ \text{m}$, donc $V = \frac{\pi \times 900 \times 2}{3}$. »

✓ Toutes les longueurs doivent être dans la même unité : $2\ \text{m} = 200\ \text{cm}$. Une aire s'écrit en $\text{cm}^2$, un volume en $\text{cm}^3$. Pour passer des $\text{cm}^3$ aux litres, on divise par $1\,000$.

**Méthode : calculer un volume**

1. **Calculer l'aire de la base** : un polygone ou un disque.
2. **Trouver la hauteur** : donnée, ou calculée par le théorème de Pythagore.
3. **Appliquer la formule**, sans oublier de diviser par $3$.
4. **Écrire l'unité de volume**, et convertir si besoin : $1\ \text{L} = 1\,000\ \text{cm}^3$.

**À toi : Le volume d'une pyramide**

Une pyramide régulière a pour base un carré de côté $10\ \text{cm}$. Son apothème mesure $13\ \text{cm}$. Calcule sa hauteur, puis son volume.

**Indice 1**
Dans le triangle $SHI$, rectangle en $H$, l'hypoténuse est l'apothème $[SI]$, et $HI = 5$.
**Indice 2**
Calcule $SH^2 = 13^2 - 5^2$, puis l'aire de la base, $10 \times 10$.
**Indice 3**
Point délicat : n'oublie pas de diviser par $3$.

**Réponse**
**La hauteur.** Le point $I$ est le milieu d'un côté, donc $HI = 10 \div 2 = 5\ \text{cm}$. Par définition de la hauteur, le triangle $SHI$ est rectangle en $H$ ; son hypoténuse est l'apothème $[SI]$. On soustrait :

$$\begin{aligned} SH^2 &= SI^2 - HI^2 \\ &= 169 - 25 = 144 \end{aligned}$$

Donc $SH = 12\ \text{cm}$.

**Le volume.** L'aire de la base est $\mathcal{B} = 10 \times 10 = 100\ \text{cm}^2$. La formule du volume d'une pyramide donne :

$$V = \frac{100 \times 12}{3} = 400$$

**Conclusion.** La pyramide a une hauteur de $12\ \text{cm}$ et un volume de $400\ \text{cm}^3$.

**Remarque : Coin devoir : la hauteur, puis le volume**

En devoir, une question peut enchaîner deux calculs. Pour une pyramide régulière à base carrée de côté $6\ \text{cm}$ et d'apothème $5\ \text{cm}$, voici une rédaction modèle.

« $I$ est le milieu d'un côté et $HI$ vaut la moitié du côté, soit $3\ \text{cm}$. Par définition de la hauteur, $SHI$ est un triangle rectangle en $H$. D'après le théorème de Pythagore : »

$$\begin{aligned} SH^2 &= SI^2 - HI^2 \\ &= 25 - 9 = 16 \end{aligned}$$

« Donc $SH = 4\ \text{cm}$. L'aire de la base est $6 \times 6 = 36\ \text{cm}^2$. D'après la formule du volume d'une pyramide : »

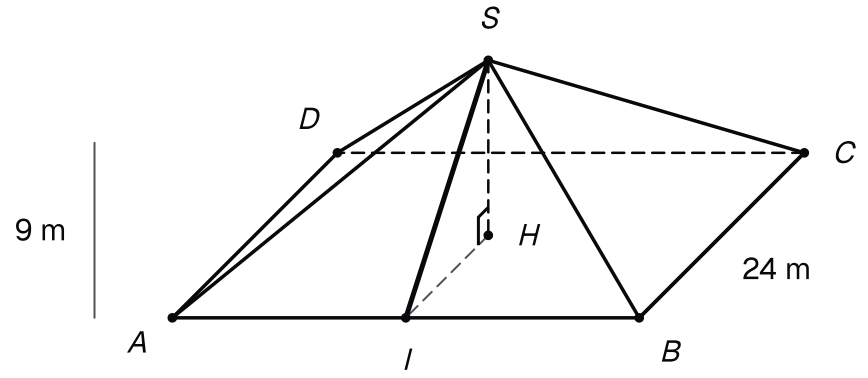
$$V = \frac{36 \times 4}{3} = 48\ \text{cm}^3$$

Chaque calcul commence par la propriété qui le justifie.

## Synthèse : un problème complet

Voici un problème complet, comme en devoir. La pyramide de verre d'un musée est régulière, avec une base carrée de $24\ \text{m}$ de côté. Elle est haute de $9\ \text{m}$.

Calcule son apothème, puis l'aire de verre de ses quatre faces, puis son volume. Cherche sur ton cahier avant de lire la solution.




**La pyramide de verre du musée : base carrée de 24 m, hauteur SH = 9 m, centre H et milieu I d'un côté ; l'apothème est à trouver.**

**Exemple : La solution en trois temps**

**Apothème.** Par définition de la hauteur, $SHI$ est un triangle rectangle en $H$, avec $HI = 24 \div 2 = 12\ \text{m}$. D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} SI^2 &= 9^2 + 12^2 \\ &= 81 + 144 = 225 \end{aligned}$$

Donc $SI = 15\ \text{m}$.

**Aire latérale.** Le périmètre de la base est $p = 4 \times 24 = 96\ \text{m}$. D'après la formule de l'aire latérale :

$$\mathcal{A} = \frac{96 \times 15}{2} = 720$$

Les quatre faces de verre couvrent $720\ \text{m}^2$.

**Volume.** L'aire de la base est $\mathcal{B} = 24 \times 24 = 576\ \text{m}^2$. D'après la formule du volume :

$$V = \frac{576 \times 9}{3} = 1\,728$$

**Conclusion.** L'apothème mesure $15\ \text{m}$, l'aire de verre est $720\ \text{m}^2$ et le volume de la pyramide est $1\,728\ \text{m}^3$.

Tu sais maintenant décrire une pyramide et un cône, les dessiner et construire leur patron. Tu sais aussi calculer une longueur par le théorème de Pythagore, une aire latérale et un volume.

Garde trois réflexes : nommer le triangle rectangle, citer la formule, écrire l'unité.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Pyramide et cône de révolution » (2ac · general · mathematiques)