BURHAN

Les puissances : Résumé

2ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/puissances/resume

Chapitre	Semestre
Les puissances	Semestre 1

Puissances d'exposant naturel

> **À retenir : L'essentiel**
>
> Une puissance est une multiplication répétée d'un même facteur. Elle se calcule pour un entier, un décimal ou une fraction. Avant tout calcul, repère la **base** et l'**exposant**.

Définition : Puissance d'exposant entier naturel

Soit a un nombre rationnel et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. La **puissance** n-ième de a est le produit de n facteurs tous égaux à a :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}.$$

Le nombre a est la **base** et l'entier n est l'**exposant**. On lit a^n « a puissance n » ; a^2 se lit aussi « a au carré » et a^3 « a au cube ».

Par convention, $a^1 = a$ et, si $a \neq 0$, $a^0 = 1$.

Exemple

Avec une fraction, on multiplie la fraction par elle-même :

$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{4}\right)^2 &= \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \\ &= \frac{9}{16}\end{aligned}$$

Avec un décimal : $(0{,}2)^3 = 0{,}2 \times 0{,}2 \times 0{,}2 = 0{,}008$.

Pour un nombre non nul, l'exposant 0 donne 1 : $13^0 = 1$, tandis que $13^1 = 13$.

Propriété : Signe d'une puissance

Soit a un nombre rationnel non nul et n un entier naturel.

- Si $a > 0$, alors $a^n > 0$.
- Si $a < 0$, alors a^n est **positif** lorsque l'exposant n est **pair**, et **négatif** lorsque l'exposant n est **impair**.

Par exemple, $(-2)^4 = 16$ et $(-2)^3 = -8$.

Exemple

Quand la base est négative, compte les facteurs négatifs.

- $(-4)^3 = (-4) \times (-4) \times (-4) = -64$: exposant impair, résultat négatif.
- $(-1{,}5)^2 = (-1{,}5) \times (-1{,}5) = 2{,}25$: exposant pair, résultat positif.
- $(-1)^{100} = 1$, car 100 est pair.

Méthode : Calculer une puissance

1. **Où est la base ?** Une parenthèse fermée juste avant l'exposant forme la base en entier. Pas de parenthèse : la base se réduit au nombre qui porte l'exposant.
2. **Quel exposant ?** Négatif, il renvoie à un inverse : $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.
3. **Quel signe ?** Une base positive donne toujours un résultat positif. Une base négative élevée à un exposant pair donne un résultat positif ; à un exposant impair, un résultat négatif.
4. **Quelle valeur ?** L'exposant compte les facteurs : 6^3 s'écrit avec trois facteurs 6, soit $6 \times 6 \times 6 = 216$.

Attention : Attention aux parenthèses

Sans parenthèses, l'exposant ne porte que sur le nombre qui le touche.

- $-5^2 = -(5 \times 5) = -25$: c'est l'opposé de 5^2.
- $(-5)^2 = (-5) \times (-5) = 25$: ici, la base est -5.

Écris toujours une base négative entre parenthèses.

Attention : Une puissance n'est pas un produit par l'exposant

6^2 ne vaut pas $6 \times 2 = 12$. Il vaut $6 \times 6 = 36$. De la même façon, 10^4 ne vaut pas 40 : il vaut $10\,000$.

Puissances d'exposant négatif

Définition : Puissance d'exposant entier négatif

Soit a un nombre rationnel non nul et n un entier naturel non nul. On pose

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

En particulier, $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$: la puissance d'exposant -1 d'un nombre non nul est son **inverse**.

Le nombre 0 n'a pas de puissance d'exposant négatif.

Exemple

Un exposant négatif fait passer à l'inverse.

- $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$.
- $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{2}$: c'est l'inverse de $\frac{2}{5}$.
- $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$.

Attention : Exposant négatif ne veut pas dire nombre négatif

3^{-2} n'est ni -9 ni -6. Le signe moins de l'exposant demande un inverse, pas un opposé : $3^{-2} = \frac{1}{9}$, qui est un nombre positif.

Attention : L'exposant zéro donne un, pas zéro

Pour un nombre non nul, l'exposant 0 donne toujours 1 : $9^0 = 1$ et $(-8)^0 = 1$. Ne confonds pas avec le produit $9 \times 0 = 0$. Le nombre 0, lui, n'a ni inverse ni puissance d'exposant négatif.

Propriétés des puissances

À retenir : Même base ou même exposant ?

Avant d'appliquer une propriété, cherche ce qui est commun. **Même base** : on ajoute, on soustrait ou on multiplie les exposants. **Même exposant** : on regroupe les bases. Ici, a et b sont non nuls, m et n sont des entiers relatifs. Ces propriétés sont admises.

Propriété : Produit de deux puissances d'un même nombre

Soit a un nombre rationnel non nul, et m et n deux entiers relatifs. Alors

$$a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

Pour multiplier deux puissances d'un même nombre, on garde la base et on **additionne** les exposants.

Propriété : Quotient de deux puissances d'un même nombre

Soit a un nombre rationnel non nul, et m et n deux entiers relatifs. Alors

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Pour diviser deux puissances d'un même nombre, on garde la base et on **soustrait** les exposants, dans l'ordre : exposant du numérateur moins exposant du dénominateur.

Exemple

- $6^2 \times 6^{-3} = 6^{2+(-3)} = 6^{-1} = \dfrac{1}{6}$.
- $\dfrac{7^4}{7^6} = 7^{4-6} = 7^{-2} = \dfrac{1}{49}$.

Propriété : Puissance d'une puissance

Soit a un nombre rationnel non nul, et m et n deux entiers relatifs. Alors

$$(a^m)^n = a^{m \times n}.$$

Pour élever une puissance à une nouvelle puissance, on garde la base et on **multiplie** les exposants.

Propriété : Puissance d'un produit

Soit a et b deux nombres rationnels non nuls, et n un entier relatif. Alors

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n.$$

La puissance d'un produit est le produit des puissances de ses facteurs, avec le **même exposant**.

Propriété : Puissance d'un quotient

Soit a et b deux nombres rationnels non nuls, et n un entier relatif. Alors

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

La puissance d'un quotient est le quotient des puissances du numérateur et du dénominateur, avec le **même exposant**.

Exemple

- $\left(2^{-3}\right)^2 = 2^{-3 \times 2} = 2^{-6} = \dfrac{1}{64}$.
- $(3 \times 4)^2 = 3^2 \times 4^2 = 9 \times 16 = 144$, et l'on retrouve bien $12^2 = 144$.
- $\left(\dfrac{3}{2}\right)^3 = \dfrac{3^3}{2^3} = \dfrac{27}{8}$.

Produit, même base

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

Quotient, même base

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Puissance d'une puissance

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

Puissance d'un produit

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n$$

Puissance d'un quotient

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Exposant négatif

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Exposant zéro

$$a^0 = 1$$

Exposant un

$$a^1 = a$$

Méthode : Simplifier un produit ou un quotient de puissances

1. **Regrouper.** Rassemble les puissances qui ont la même base.
2. **Une propriété par ligne.** Applique une seule propriété à chaque étape, et nomme-la.
3. **Soigner les signes.** Écris les exposants négatifs entre parenthèses dans les calculs : $2 + (-5)$, $3 - (-4)$.
4. **Conclure.** Donne une seule puissance, puis sa valeur si elle est simple.

Attention : Aucune propriété pour une somme

Les propriétés portent sur des produits et des quotients, jamais sur des sommes. Ainsi $2^3 + 2^4 = 8 + 16 = 24$, alors que $2^7 = 128$. Donc $2^3 + 2^4 \neq 2^7$. Pour une somme, calcule chaque puissance, puis additionne.

Calculer une expression

Méthode : Calculer une expression avec des puissances

Rappel de 1re année : l'ordre des priorités.

1. **Parenthèses.** Calcule d'abord ce qui est entre parenthèses.
2. **Puissances.** Calcule ensuite les puissances.
3. **Produits et quotients.** Effectue-les de gauche à droite.
4. **Sommes et différences.** Termine par elles, de gauche à droite.

Exemple

On calcule d'abord la puissance.

$$\begin{aligned} A &= 3 - 2 \times 5^2 \\ &= 3 - 2 \times 25 \end{aligned}$$

Puis on effectue le produit, et enfin la différence.

$$\begin{aligned} A &= 3 - 50 \\ &= -47 \end{aligned}$$

Exemple

Les deux puissances se calculent en premier : $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ et $2^{-1} = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 18 - 2^{-1} \\ &= \frac{1}{9} \times 18 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vient ensuite le produit, puis la différence.

$$\begin{aligned} B &= 2 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Exemple

Avec une lettre x non nulle, les mêmes propriétés servent pour des puissances de x :

- $x^4 \times x^{-6} = x^{4+(-6)} = x^{-2}$;
- $\frac{x^5}{x^2} = x^{5-2} = x^3$.

Puissances de 10 et écriture scientifique

Propriété : Puissances de 10

Soit n un entier naturel non nul.

- 10^n s'écrit avec le chiffre 1 suivi de n zéros : $10^3 = 1\,000$.
- $10^{-n} = \frac{1}{10^n}$ s'écrit $0{,}0\ldots01$, avec n chiffres après la virgule, le dernier étant 1 : $10^{-3} = 0{,}001$.
- Multiplier un nombre décimal par 10^n revient à déplacer sa virgule de n rangs vers la **droite** ; le multiplier par 10^{-n} revient à la déplacer de n rangs vers la **gauche**, en ajoutant des zéros si nécessaire.

Exemple

- $3{,}7 \times 10^4 = 37\,000$: la virgule avance de 4 rangs vers la droite.

- $52 \times 10^{-3} = 0{,}052$: la virgule recule de 3 rangs vers la gauche.
- $10^{5} \times 10^{-8} = 10^{5+(-8)} = 10^{-3}$.

Définition : Écriture scientifique

Tout nombre décimal strictement positif peut s'écrire d'une seule façon sous la forme

$$a \times 10^{p},$$

où a est un nombre décimal tel que $1 \leq a < 10$ et p est un entier relatif. Cette écriture est l'**écriture scientifique** du nombre. Le nombre a a un seul chiffre non nul avant la virgule.

Pour un nombre décimal strictement négatif, on écrit l'écriture scientifique de son opposé, précédée du signe $-$: $-4\,500 = -4{,}5 \times 10^{3}$.

Méthode : Écrire un nombre en écriture scientifique

Ici, x désigne le nombre positif de départ.

1. **Trouver a.** La virgule vient se poser derrière le premier chiffre non nul de x : ce qu'on lit alors est a, et $1 \leq a < 10$.
2. **Trouver la taille de l'exposant.** Elle est égale au nombre de rangs parcourus par la virgule.
3. **Trouver le signe de l'exposant.** Si $x \geq 10$, l'exposant est positif. Si $x < 1$, il est négatif. Si $1 \leq x < 10$, c'est l'exposant 0.

Exemple

La distance de la Terre au Soleil est d'environ $150\,000\,000$ km. La virgule vient se placer après le chiffre 1 : elle bouge de 8 rangs vers la gauche. Donc $150\,000\,000 = 1{,}5 \times 10^{8}$.

Un grain de sable fin a une masse d'environ $0{,}00002$ g. La virgule bouge de 5 rangs vers la droite. Donc $0{,}00002 = 2 \times 10^{-5}$.

Attention : Un seul chiffre non nul avant la virgule

45×10^{3} est égal à $45\,000$, mais ce n'est pas une écriture scientifique, car 45 est plus grand que 10. On écrit $45 = 4{,}5 \times 10^{1}$, donc $45 \times 10^{3} = 4{,}5 \times 10^{4}$. De même, $0{,}8 \times 10^{-2}$ s'écrit 8×10^{-3}.

Méthode : Calculer un produit ou un quotient en écriture scientifique

1. **Séparer.** Regroupe les nombres décimaux d'un côté, les puissances de 10 de l'autre.

2. **Calculer chaque partie.** Multiplie ou divise les décimaux. Applique les propriétés aux puissances de 10.
3. **Corriger.** Si le décimal obtenu n'est pas entre 1 et 10, écris-le à son tour en écriture scientifique, puis regroupe les puissances de 10.

Exemple

On regroupe les décimaux et les puissances de 10.

$$\begin{aligned}&(3 \times 10^{5}) \times (4 \times 10^{-2}) \\ &= (3 \times 4) \times (10^{5} \times 10^{-2}) \\ &= 12 \times 10^{3}\end{aligned}$$

Comme 12 dépasse 10, on l'écrit $1{,}2 \times 10^{1}$.

$$\begin{aligned}&12 \times 10^{3} \\ &= 1{,}2 \times 10^{1} \times 10^{3} \\ &= 1{,}2 \times 10^{4}\end{aligned}$$

Méthode : Comparer deux nombres en écriture scientifique

Les deux nombres sont positifs et déjà mis sous la forme $a \times 10^{p}$.

1. **Regarder d'abord les puissances de** 10**.** Celui des deux dont l'exposant l'emporte est le plus grand.
2. **Exposants identiques ?** On départage alors avec les deux valeurs de a.

Exemples : $6{,}2 \times 10^{-5} > 9{,}1 \times 10^{-6}$, car $-5 > -6$. Et $2{,}3 \times 10^{7} < 2{,}8 \times 10^{7}$, car $2{,}3 < 2{,}8$.

Ordre de grandeur

Définition : Ordre de grandeur

Un **ordre de grandeur** d'un nombre est une valeur approchée simple de ce nombre, choisie pour estimer un résultat ou contrôler un calcul.

Pour un nombre écrit en écriture scientifique $a \times 10^{p}$, on obtient un ordre de grandeur en remplaçant a par l'entier le plus proche : $3{,}8 \times 10^{5}$ a pour ordre de grandeur 4×10^{5}. Si l'on obtient 10, on écrit $10 \times 10^{p} = 1 \times 10^{p+1}$.

Méthode : Estimer ou contrôler un résultat

1. **Écrire en écriture scientifique** chaque nombre du calcul.
2. **Remplacer chaque nombre décimal** a par l'entier le plus proche. S'il vaut 10, écris $1 \times 10^{p+1}$ au lieu de 10×10^{p}.

3. **Calculer de tête** avec ces valeurs simples.
4. **Comparer** avec le résultat trouvé : s'ils sont très éloignés, cherche une erreur.

Exemple

Le nombre $2{,}7 \times 10^6$ a pour ordre de grandeur 3×10^6.

Pour contrôler le produit $(4{,}8 \times 10^3) \times (2{,}1 \times 10^2)$, on arrondit $4{,}8$ à 5 et $2{,}1$ à 2 :

$$\begin{aligned} & 5 \times 10^3 \times 2 \times 10^2 \\ & = 10 \times 10^5 \\ & = 1 \times 10^6 \end{aligned}$$

Le calcul exact donne $10{,}08 \times 10^5 = 1{,}008 \times 10^6$: l'estimation en est proche.

Méthode : Quelle règle pour quel calcul ?

- **Une base négative** : des parenthèses, puis le signe selon que l'exposant est pair ou impair.
- **Un exposant négatif** : passer à l'inverse.
- **Un produit de puissances d'une même base** : additionner les exposants.
- **Un quotient de puissances d'une même base** : soustraire les exposants, dans l'ordre.
- **Une puissance de puissance** : multiplier les exposants.
- **Des bases différentes et un même exposant** : regrouper les bases en un produit ou un quotient.
- **Une somme de puissances** : calculer chaque puissance, puis additionner.
- **Un très grand ou un très petit nombre** : l'écriture scientifique.
- **Un résultat à vérifier** : un ordre de grandeur.