BURHAN

Les puissances : exercices, niveau examen

2ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/puissances/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Les puissances	Niveau examen	5

Exercice 1 6 pts

Calculs avec des puissances

On donne $A = \dfrac{2^5 \times 2^{-3}}{2^4}$ et $B = \dfrac{\left(2^2\right)^3}{(-2)^2}$.

Le nombre A 2 pts

Écris A sous la forme d'une puissance de 2, puis sous la forme d'une fraction.

INDICE

Outil : les propriétés des puissances d'une même base : produit, puis quotient.

Début : commence par le haut de la fraction, $2^5 \times 2^{-3}$.

Point délicat : l'exposant obtenu est négatif : passe à l'inverse pour la fraction.

CORRIGÉ

Haut de la fraction. Même base 2 : les exposants s'additionnent, $2^5 \times 2^{-3} = 2^{5+(-3)} = 2^2$.

Quotient. On soustrait l'exposant du bas :

$$\begin{aligned} \frac{2^2}{2^4} &= 2^{2-4} \\ &= 2^{-2} \end{aligned}$$

Fraction. L'exposant -2 donne un inverse : $2^{-2} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$.

Conclusion. On obtient $A = 2^{-2} = \dfrac{1}{4}$.

Le nombre B 3 pts

Écris B sous la forme d'une puissance de 2, puis donne sa valeur.

INDICE

Outil : trois propriétés à la suite : puissance d'une puissance, signe d'une puissance, quotient de deux puissances de 2.

Début : traite d'abord le numérateur $\left(2^2\right)^3$.

Point délicat : au dénominateur, la base -2 est négative : regarde si l'exposant est pair ou impair.

CORRIGÉ

Numérateur. Pour une puissance d'une puissance, les exposants se multiplient : $\left(2^2\right)^3 = 2^{2\times 3} = 2^6$.

Dénominateur. La base -2 est négative, mais l'exposant 2 est pair : $(-2)^2 = 2^2 = 4$.

Quotient. Les deux termes sont alors des puissances de 2 :

$$\begin{aligned} \frac{2^6}{2^2} &= 2^{6-2} \\ &= 2^4 \end{aligned}$$

Conclusion. On obtient $B = 2^4 = 16$.

Le produit 1 pts

En déduire $A \times B$ sous la forme d'une puissance de 2, puis sa valeur.

INDICE

Outil : les écritures de A et de B obtenues aux questions 1 et 2.

Début : écris $A \times B$ comme un produit de deux puissances de 2.

Point délicat : garde le signe moins de l'exposant de A en additionnant.

CORRIGÉ

Les questions 1 et 2 donnent $A = 2^{-2}$ et $B = 2^{4}$. Dans ce produit de deux puissances de 2, on additionne les exposants :

$$\begin{aligned} A \times B &= 2^{-2} \times 2^{4} \\ &= 2^{-2+4} \\ &= 2^{2} = 4 \end{aligned}$$

Conclusion. $A \times B = 2^{2}$, donc on obtient $A \times B = 4$.

Exercice 2 7 pts

Masses d'atomes

La masse d'un atome de carbone est d'environ 2×10^{-23} g. La masse d'un atome d'hydrogène est d'environ $1{,}7 \times 10^{-24}$ g.

Beaucoup d'atomes de carbone 2 pts

Calcule la masse de 6×10^{23} atomes de carbone. Donne le résultat en écriture décimale.

INDICE

Outil : un produit en écriture scientifique.

Début : multiplie 6 par 2, puis 10^{23} par 10^{-23}.

Point délicat : deux exposants opposés donnent l'exposant 0.

CORRIGÉ

On multiplie les nombres décimaux entre eux, puis les puissances de 10 entre elles. Les exposants 23 et -23 sont opposés : leur somme est 0, et $10^0 = 1$.

$$\begin{aligned}&(6 \times 10^{23}) \times (2 \times 10^{-23}) \\ &= (6 \times 2) \times 10^{23+(-23)} \\ &= 12 \times 10^{0} = 12\end{aligned}$$

Conclusion. Ces atomes de carbone ont une masse d'environ 12 g.

L'atome le plus léger 2,5 pts

Quel atome est le plus léger ? Justifie.

INDICE

Outil : la méthode pour ranger des nombres écrits en écriture scientifique.

Début : regarde en premier les exposants -24 et -23.

Point délicat : le plus petit exposant donne le plus petit nombre.

CORRIGÉ

Les deux masses sont en écriture scientifique : on compare d'abord leurs exposants. On a $-24 < -23$, et le plus petit exposant donne la plus petite masse :

$$1{,}7 \times 10^{-24} < 2 \times 10^{-23}$$

Conclusion. L'atome d'hydrogène est le plus léger.

Une estimation 2,5 pts

À l'aide d'un ordre de grandeur de la masse de l'atome d'hydrogène, estime combien de fois l'atome de carbone est plus lourd.

INDICE

Outil : l'ordre de grandeur, puis un quotient de puissances de 10.

Début : remplace $1{,}7$ par l'entier le plus proche.

Point délicat : dans le quotient, soustrais un exposant négatif avec des parenthèses.

CORRIGÉ

Ordre de grandeur. L'entier le plus proche de $1{,}7$ est 2 : la masse de l'atome d'hydrogène a pour ordre de grandeur 2×10^{-24} g.

Quotient. Soustraire -24 revient à ajouter 24 :

$$\begin{aligned} &\frac{2 \times 10^{-23}}{2 \times 10^{-24}} \\ &= \frac{2}{2} \times 10^{-23-(-24)} \\ &= 1 \times 10^{1} = 10 \end{aligned}$$

Conclusion. L'atome de carbone est environ 10 fois plus lourd que l'atome d'hydrogène.

Exercice 3 — 7 pts

Le budget d'une commune

Une commune compte $120\,000$ habitants. Son budget annuel est de $48\,000\,000$ dirhams.

Les données — 2 pts

Écris ces deux nombres en écriture scientifique.

INDICE

Outil : l'écriture scientifique $a \times 10^{p}$ avec $1 \leq a < 10$.

Début : place la virgule après le premier chiffre de chaque nombre.

Point délicat : compte tous les rangs, zéros compris.

CORRIGÉ

Pour chacun des deux nombres, la virgule vient se placer juste après le premier chiffre. On compte les rangs parcourus vers la gauche :

- $120\,000 = 1{,}2 \times 10^{5}$: la virgule recule de 5 rangs ;
- $48\,000\,000 = 4{,}8 \times 10^{7}$: la virgule recule de 7 rangs.

Conclusion. La commune compte $1{,}2 \times 10^{5}$ habitants, et son budget est de $4{,}8 \times 10^{7}$ dirhams.

Le budget par habitant — 2,5 pts

Calcule le budget par habitant, en écriture scientifique, puis en écriture décimale.

INDICE

Outil : un quotient en écriture scientifique.

Début : divise $4{,}8$ par $1{,}2$, puis 10^{7} par 10^{5}.

Point délicat : l'ordre de la division compte : le budget est au numérateur.

CORRIGÉ

On divise le budget par le nombre d'habitants, en séparant les décimaux et les puissances de 10 :

$$\begin{aligned} &\frac{4{,}8 \times 10^{7}}{1{,}2 \times 10^{5}} \\ &= \frac{4{,}8}{1{,}2} \times 10^{7-5} \\ &= 4 \times 10^{2} = 400 \end{aligned}$$

Conclusion. Le budget est de 4×10^{2} dirhams, soit une part de 400 dirhams par habitant.

Un contrôle 2,5 pts

Un élève trouve $4\,000$ dirhams par habitant. À l'aide d'ordres de grandeur, dis si ce résultat est plausible.

INDICE

Outil : les ordres de grandeur des deux données.

Début : remplace $4{,}8$ et $1{,}2$ par les entiers les plus proches.

Point délicat : compare l'estimation obtenue au résultat de l'élève.

CORRIGÉ

Données arrondies. Chaque nombre décimal est remplacé par l'entier le plus proche : $4{,}8 \times 10^{7}$ donne 5×10^{7}, et $1{,}2 \times 10^{5}$ donne 1×10^{5}.

Estimation.

$$\begin{aligned} &\frac{5 \times 10^{7}}{1 \times 10^{5}} \\ &= 5 \times 10^{7-5} \\ &= 5 \times 10^{2} = 500 \end{aligned}$$

Comparaison. On attend un résultat proche de 500. Or $4\,000$ est 8 fois plus grand que cette estimation. Il vaut 10 fois le bon résultat : l'élève s'est sans doute trompé d'une unité sur l'exposant de 10.

Conclusion. Le résultat de l'élève, $4\,000$ dirhams par habitant, n'est pas plausible.

Exercice 4 — 7 pts

Deux nombres inverses l'un de l'autre

On donne $E = \left(\frac{3}{5}\right)^2 - 2^3 \times \frac{1}{25}$ et $F = \frac{10^3 \times 2^{-3}}{5}$.

Le nombre E — 2 pts

Calcule E en respectant les priorités des opérations. Donne le résultat sous la forme d'une fraction.

INDICE

Outil : les priorités : d'abord les puissances, ensuite le produit, enfin la différence.

Début : calcule les deux puissances $\left(\frac{3}{5}\right)^2$ et 2^3.

Point délicat : pour la fraction, élève au carré le numérateur et le dénominateur.

CORRIGÉ

Les puissances. Par la puissance d'un quotient, $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2}$, et $2^3 = 8$:

$$\begin{aligned} E &= \frac{3^2}{5^2} - 2^3 \times \frac{1}{25} \\ &= \frac{9}{25} - 8 \times \frac{1}{25} \end{aligned}$$

Le produit, puis la différence. On calcule $8 \times \frac{1}{25} = \frac{8}{25}$, puis on soustrait les numérateurs :

$$\begin{aligned} E &= \frac{9}{25} - \frac{8}{25} \\ &= \frac{1}{25} \end{aligned}$$

Conclusion. On obtient $E = \frac{1}{25}$.

Le nombre F — 2,5 pts

Écris F sous la forme d'une puissance de 5, puis donne sa valeur.

INDICE

Outil : la puissance d'un produit, puis les propriétés des puissances d'un même nombre.

Début : écris $10 = 2 \times 5$, puis transforme 10^3 en un produit de deux puissances.

Point délicat : au dénominateur, 5 est la puissance 5^1.

CORRIGÉ

Décomposition. Comme $10 = 2 \times 5$, la puissance d'un produit donne $10^3 = (2 \times 5)^3 = 2^3 \times 5^3$.

Puissances de deux. Leurs exposants sont opposés :

$$\begin{aligned} 2^3 \times 2^{-3} &= 2^{3+(-3)} \\ &= 2^0 = 1 \end{aligned}$$

Quotient. Il reste $F = \dfrac{5^3}{5}$, avec $5 = 5^1$. On soustrait les exposants : $\dfrac{5^3}{5^1} = 5^{3-1} = 5^2$.

Conclusion. On obtient $F = 5^2 = 25$.

Un lien entre E et F — 2,5 pts

Écris E sous la forme d'une puissance de 5. En déduire $E \times F$. Que peut-on dire des nombres E et F ?

INDICE

Outil : l'exposant négatif $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, puis l'addition des exposants dans un produit de deux puissances de 5.

Début : remarque que $25 = 5^2$.

Point délicat : deux nombres dont le produit vaut 1 sont inverses l'un de l'autre.

CORRIGÉ

Le nombre E. D'après la question 1, et comme $25 = 5^2$, la définition de l'exposant négatif donne $E = \dfrac{1}{25} = \dfrac{1}{5^2} = 5^{-2}$.

Le produit. D'après la question 2, $F = 5^2$. On additionne les exposants :

$$\begin{aligned} E \times F &= 5^{-2} \times 5^2 \\ &= 5^{-2+2} \\ &= 5^0 = 1 \end{aligned}$$

Le lien. Le produit de E et de F vaut 1 : ces deux nombres sont inverses l'un de l'autre.

Conclusion. $E \times F = 1$, et E est l'inverse de F, c'est-à-dire $E = F^{-1}$.

Exercice 5 — 7 pts

La récolte des abeilles

Pendant une saison, une colonie d'abeilles récolte environ $1{,}5 \times 10^{5}$ g de nectar. À chaque voyage, une abeille butineuse rapporte environ $2{,}5 \times 10^{-2}$ g de nectar.

Les deux masses — 2 pts

Écris ces deux masses en écriture décimale.

INDICE

Outil : multiplier par une puissance de 10 revient à déplacer la virgule.

Début : avec l'exposant 5, positif, la virgule part vers la droite.

Point délicat : avec l'exposant -2, la virgule part vers la gauche : ajoute les zéros qui manquent.

CORRIGÉ

- $1{,}5 \times 10^{5} = 150\,000$: la virgule se déplace de 5 rangs vers la droite, car l'exposant est positif.
- $2{,}5 \times 10^{-2} = 0{,}025$: la virgule se déplace de 2 rangs vers la gauche, car l'exposant est négatif.

Conclusion. La colonie récolte environ $150\,000$ g de nectar, et une abeille en rapporte environ $0{,}025$ g par voyage.

Le nombre de voyages — 2,5 pts

Calcule le nombre de voyages nécessaires pour récolter tout ce nectar. Donne-le en écriture scientifique, puis en écriture décimale.

INDICE

Outil : un quotient en écriture scientifique, puis la correction du nombre décimal.

Début : divise $1{,}5$ par $2{,}5$, puis 10^{5} par 10^{-2}.

Point délicat : le nombre décimal obtenu est plus petit que 1 : écris-le à son tour en écriture scientifique.

CORRIGÉ

Le quotient. On divise la récolte totale par ce que rapporte un voyage :

$$\begin{aligned} &\frac{1{,}5 \times 10^{5}}{2{,}5 \times 10^{-2}} \\ &= \frac{1{,}5}{2{,}5} \times 10^{5-(-2)} \\ &= 0{,}6 \times 10^{7} \end{aligned}$$

La correction. Le nombre $0{,}6$ n'est pas compris entre 1 et 10 : on l'écrit 6×10^{-1}.

$$\begin{aligned} &0{,}6 \times 10^{7} \\ &= 6 \times 10^{-1} \times 10^{7} \\ &= 6 \times 10^{6} \end{aligned}$$

Conclusion. Il faut environ 6×10^{6} voyages, soit $6\,000\,000$ voyages.

Le travail d'une butineuse 2,5 pts

La colonie compte environ 3×10^4 butineuses, qui se partagent les voyages à parts égales. En déduire le nombre de voyages faits par une butineuse pendant la saison. Une butineuse fait au plus 10 voyages par jour : combien de jours de récolte lui faut-il au moins ?

INDICE

Outil : le résultat de la question 2, puis un second quotient en écriture scientifique.

Début : divise 6×10^6 par 3×10^4.

Point délicat : pour les jours, divise le nombre de voyages d'une butineuse par le nombre de voyages faits en un jour.

CORRIGÉ

Voyages d'une butineuse. La question 2 donne 6×10^6 voyages en tout, partagés entre 3×10^4 butineuses :

$$\begin{aligned} &\frac{6 \times 10^6}{3 \times 10^4} \\ &= \frac{6}{3} \times 10^{6-4} \\ &= 2 \times 10^2 = 200 \end{aligned}$$

Une butineuse fait donc environ 200 voyages pendant la saison.

Nombre de jours. Avec au plus 10 voyages par jour, il lui faut au moins $\dfrac{200}{10} = 20$ jours.

Conclusion. Chaque butineuse fait environ 200 voyages, ce qui demande au moins 20 jours de récolte.