BURHAN

Les puissances : exercices, entraînement

2ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/puissances/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Les puissances	Entraînement	7

Exercice 1

Simplifier avec plusieurs propriétés

Simplifie chaque expression, puis donne sa valeur. Applique une seule propriété par ligne.

Produit puis quotient

$$A = \frac{3^5 \times 3^{-4}}{3^4}$$

INDICE

Outil : le produit, puis le quotient de puissances d'un même nombre.

Début : simplifie d'abord le numérateur $3^5 \times 3^{-4}$.

Point délicat : l'exposant final est négatif : termine par un inverse.

CORRIGÉ

Numérateur. Les deux facteurs ont la base 3 : on additionne leurs exposants.

$$\begin{aligned} 3^5 \times 3^{-4} &= 3^{5+(-4)} \\ &= 3^1 \end{aligned}$$

Quotient. On retire l'exposant du dénominateur de celui du numérateur :

$$\begin{aligned} \frac{3^1}{3^4} &= 3^{1-4} \\ &= 3^{-3} \end{aligned}$$

Valeur. L'exposant final est négatif, on termine par un inverse : $3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$.

Conclusion. On obtient $A = \frac{1}{27}$.

Trois propriétés

$$B = \frac{\left(2^3\right)^2 \times 2^{-1}}{2^9}$$

INDICE

Outil : la puissance d'une puissance, puis le produit et le quotient de puissances d'un même nombre.

Début : commence par $\left(2^3\right)^2$.

Point délicat : garde l'ordre de la soustraction des exposants : haut moins bas.

CORRIGÉ

Puissance d'une puissance. Les exposants se multiplient : $\left(2^3\right)^2 = 2^{3\times 2} = 2^6$.

Numérateur. Les exposants s'ajoutent : $2^6 \times 2^{-1} = 2^{6+(-1)} = 2^5$.

Quotient. Exposant du haut moins exposant du bas : $\frac{2^5}{2^9} = 2^{5-9} = 2^{-4}$.

Valeur. On passe à l'inverse : $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$.

Conclusion. On obtient $B = \frac{1}{16}$.

Un produit

$C = (5 \times 2)^4 \times 5^{-4}$

INDICE

Outil : la puissance d'un produit, puis le produit de puissances d'un même nombre.

Début : développe $(5 \times 2)^4$ en un produit de deux puissances.

Point délicat : regroupe les puissances de 5 : leurs exposants sont opposés.

CORRIGÉ

Puissance d'un produit. L'exposant 4 porte sur les deux facteurs : $(5 \times 2)^4 = 5^4 \times 2^4$.

Puissances de cinq. Leurs exposants sont opposés :

$$\begin{aligned} 5^4 \times 5^{-4} &= 5^{4+(-4)} \\ &= 5^0 = 1 \end{aligned}$$

Valeur. Il reste $C = 1 \times 2^4 = 16$.

Conclusion. On obtient $C = 16$.

Exercice 2

Bases différentes, même exposant

Les bases sont différentes, mais les exposants sont égaux. Regroupe les bases avant de calculer.

Un quotient

Calcule $D = \dfrac{12^4}{4^4}$.

INDICE

Outil : la puissance d'un quotient, lue de droite à gauche.

Début : écris le quotient comme une seule puissance d'exposant 4.

Point délicat : simplifie la fraction avant de l'élever à la puissance 4.

CORRIGÉ

Une seule puissance. Les deux puissances ont le même exposant 4. On lit la puissance d'un quotient de droite à gauche :

$$\frac{12^4}{4^4} = \left(\frac{12}{4}\right)^4$$

Simplification. La fraction se simplifie d'abord : $\dfrac{12}{4} = 3$. Il reste $D = 3^4 = 81$.

Conclusion. On obtient $D = 81$.

Un produit

Écris $E = 20^3 \times 5^3$ sous la forme d'une puissance de 10.

INDICE

Outil : la puissance d'un produit, lue de droite à gauche.

Début : calcule d'abord le produit 20×5.

Point délicat : une puissance d'une puissance de 10 termine le calcul.

CORRIGÉ

Regroupement. Même exposant 3 : on lit la puissance d'un produit de droite à gauche, $20^3 \times 5^3 = (20 \times 5)^3$.

Produit. On a $20 \times 5 = 100 = 10^2$, donc $E = \left(10^2\right)^3$.

Puissance d'une puissance. Les exposants se multiplient :

$$\begin{aligned}\left(10^2\right)^3 &= 10^{2\times 3} \\ &= 10^6\end{aligned}$$

Conclusion. Sous la forme d'une puissance de 10, on a $E = 10^6$.

Quotient puis produit

Calcule $F = \dfrac{14^2}{7^2} \times 2^{-2}$.

INDICE

Outil : la puissance d'un quotient, puis le produit de puissances d'un même nombre.

Début : regroupe d'abord $\dfrac{14^2}{7^2}$ en une seule puissance.

Point délicat : deux exposants opposés donnent l'exposant 0.

CORRIGÉ

Le quotient. Les deux puissances ont l'exposant 2, et $\dfrac{14}{7} = 2$:

$$\frac{14^2}{7^2} = \left(\frac{14}{7}\right)^2 = 2^2$$

Le produit. Les exposants 2 et -2 sont opposés :

$$\begin{aligned} 2^2 \times 2^{-2} &= 2^{2+(-2)} \\ &= 2^0 = 1 \end{aligned}$$

Conclusion. On obtient $F = 1$.

Exercice 3

Priorités et fractions

Calcule chaque expression. Rappel de 1re année : on calcule les puissances avant les produits, et les produits avant les sommes.

Puissances et produit

$G = 2 \times 3^2 - 4^2$

INDICE

Outil : les priorités des opérations.

Début : remplace d'abord 3^2 et 4^2 par leurs valeurs.

Point délicat : ne calcule pas 2×3 avant la puissance.

CORRIGÉ

Puissances d'abord. On calcule $3^2 = 9$ et $4^2 = 16$.

Produit, puis différence. Le produit passe avant la soustraction :

$$\begin{aligned} G &= 2 \times 9 - 16 \\ &= 18 - 16 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Conclusion. On obtient $G = 2$.

Une fraction au cube

$H = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{3}{8}$

INDICE

Outil : la puissance d'un quotient, puis la somme de deux fractions.

Début : calcule d'abord $\left(\frac{1}{2}\right)^3$.

Point délicat : les deux fractions ont alors le même dénominateur : simplifie le résultat.

CORRIGÉ

Puissance. L'exposant porte sur le numérateur et sur le dénominateur :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8}$$

Somme. Les deux fractions ont le dénominateur 8 : on additionne les numérateurs, puis on simplifie par 4.

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} \\ &= \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Conclusion. On obtient $H = \frac{1}{2}$.

Un quotient par une puissance négative

$$K = \frac{5^2 - 3^2}{2^{-2}}$$

INDICE

Outil : les priorités, puis la division par une fraction.

Début : calcule séparément le numérateur et le dénominateur.

Point délicat : $5^2 - 3^2$ n'est pas égal à 2^2 : calcule chaque carré.

CORRIGÉ

Numérateur. Les carrés se calculent avant la différence :

$$5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$$

Dénominateur. L'exposant est négatif : $2^{-2} = \frac{1}{4}$.

Quotient. Diviser par $\frac{1}{4}$ revient à multiplier par 4 : $16 \times 4 = 64$.

Conclusion. On obtient $K = 64$.

Exercice 4

Bases négatives et priorités

Pour chaque expression, trouve d'abord le signe et la valeur de chaque puissance, puis termine le calcul.

Deux bases négatives

$L = (-2)^3 \times 3 + (-1)^6$

INDICE

Outil : le signe d'une puissance, puis les priorités.

Début : calcule $(-2)^3$ et $(-1)^6$ en regardant si chaque exposant est pair ou impair.

Point délicat : le produit passe avant la somme.

CORRIGÉ

Les puissances. On regarde si chaque exposant est pair ou impair :

- $(-2)^3 = -8$ (exposant impair) ;
- $(-1)^6 = 1$ (exposant pair).

Le calcul. Le produit passe avant la somme : $-8 \times 3 = -24$, puis

$$\begin{aligned} L &= -24 + 1 \\ &= -23 \end{aligned}$$

Conclusion. On obtient $L = -23$.

Une somme

$M = -3^2 + (-3)^2$

INDICE

Outil : la base d'une puissance écrite sans parenthèses.

Début : dans -3^2, la base est 3.

Point délicat : cherche le signe de chaque terme avant d'additionner.

CORRIGÉ

Premier terme. Sans parenthèses, la base est 3 : $-3^2 = -9$.

Second terme. La base est -3 et l'exposant est pair : $(-3)^2 = 9$.

Somme. Les deux termes sont opposés : $-9 + 9 = 0$.

Conclusion. On obtient $M = 0$.

Une fraction négative

$$N = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \times \frac{9}{4} + 2^0$$

INDICE

Outil : le signe d'une puissance, la puissance d'un quotient et l'exposant zéro.

Début : calcule $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$: l'exposant est impair.

Point délicat : simplifie le produit de fractions avant d'ajouter 2^0.

CORRIGÉ

La puissance. L'exposant 3 est impair, donc le résultat est négatif :

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{27}$$

Le produit. On simplifie avec $8 = 2 \times 4$ et $27 = 3 \times 9$:

$$\begin{aligned} & -\frac{8}{27} \times \frac{9}{4} \\ &= -\frac{8 \times 9}{27 \times 4} \\ &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

La somme. Comme $2^0 = 1$, il reste $-\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3}$.

Conclusion. On obtient $N = \frac{1}{3}$.

Exercice 5

La mémoire d'une clé USB

Une clé USB a une capacité de 32 Go. On prend 1 Go $= 10^{9}$ octets. Une photo occupe environ 4×10^{6} octets.

La capacité en octets

Écris la capacité de la clé en octets, en écriture scientifique.

INDICE

Outil : l'écriture scientifique et le produit de puissances de 10.

Début : la capacité vaut 32×10^{9} octets.

Point délicat : 32 n'est pas entre 1 et 10 : écris-le en écriture scientifique.

CORRIGÉ

En octets. Un Go vaut 10^{9} octets, donc la capacité est de 32×10^{9} octets.

En écriture scientifique. Le nombre 32 n'est pas compris entre 1 et 10 : on l'écrit $32 = 3{,}2 \times 10^{1}$. On additionne ensuite les exposants de 10 :

$$\begin{aligned} & 32 \times 10^{9} \\ &= 3{,}2 \times 10^{1} \times 10^{9} \\ &= 3{,}2 \times 10^{10}. \end{aligned}$$

Conclusion. La clé contient $3{,}2 \times 10^{10}$ octets.

Le nombre de photos

Combien de photos, environ, la clé peut-elle contenir ? Contrôle ensuite ton résultat : remplace la capacité par un ordre de grandeur.

INDICE

Outil : un quotient en écriture scientifique.

Début : divise $3{,}2$ par 4, puis 10^{10} par 10^{6}.

Point délicat : le décimal obtenu est plus petit que 1 : corrige-le.

CORRIGÉ

Le quotient. On divise la capacité par la taille d'une photo, en traitant à part les décimaux et les puissances de 10 :

$$\begin{aligned}&\frac{3{,}2 \times 10^{10}}{4 \times 10^{6}}\\ &= \frac{3{,}2}{4} \times 10^{10-6}\\ &= 0{,}8 \times 10^{4}\end{aligned}$$

Le décimal à corriger. Le nombre $0{,}8$ est plus petit que 1. Or $0{,}8 = 8 \times 10^{-1}$, donc :

$$\begin{aligned}0{,}8 \times 10^{4} &= 8 \times 10^{3}\\ &= 8\,000\end{aligned}$$

Le contrôle. Pour un ordre de grandeur de la capacité, l'entier le plus proche de $3{,}2$ est 3 : la clé contient environ 3×10^{10} octets.

$$\begin{aligned}&\frac{3 \times 10^{10}}{4 \times 10^{6}}\\ &= 0{,}75 \times 10^{4}\\ &= 7\,500\end{aligned}$$

Cette estimation est proche de $8\,000$: le résultat est plausible.

Conclusion. La clé peut contenir environ $8\,000$ photos.

La place de 500 photos

Quelle mémoire, en octets, occupent 500 photos ? Donne le résultat en écriture scientifique, puis en Go.

INDICE

Outil : un produit en écriture scientifique.

Début : écris $500 = 5 \times 10^2$.

Point délicat : $5 \times 4 = 20$ n'est pas entre 1 et 10 : corrige-le.

CORRIGÉ

Le produit. On écrit $500 = 5 \times 10^2$, puis on multiplie par la taille d'une photo :

$$\begin{aligned} & 5 \times 10^2 \times 4 \times 10^6 \\ & = (5 \times 4) \times 10^{2+6} \\ & = 20 \times 10^8 \end{aligned}$$

Le décimal à corriger. Le nombre 20 dépasse 10. Comme $20 = 2 \times 10^1$, on trouve $20 \times 10^8 = 2 \times 10^9$ octets, soit 2 Go, car un Go vaut 10^9 octets.

Conclusion. Les 500 photos occupent 2×10^9 octets, c'est-à-dire 2 Go.

Exercice 6

Des bactéries

Une bactérie mesure environ 2×10^{-3} mm de long.

Des bactéries alignées

On aligne 5×10^{4} bactéries bout à bout. Calcule la longueur obtenue en écriture scientifique, puis en centimètres.

INDICE

Outil : un produit en écriture scientifique.

Début : multiplie 5 par 2, puis 10^{4} par 10^{-3}.

Point délicat : après le produit des décimaux, regarde si le nombre obtenu est entre 1 et 10.

CORRIGÉ

Le produit. La longueur totale est le nombre de bactéries multiplié par la longueur d'une bactérie :

$$\begin{aligned}&(5 \times 10^{4}) \times (2 \times 10^{-3}) \\ &= (5 \times 2) \times 10^{4+(-3)} \\ &= 10 \times 10^{1}\end{aligned}$$

Le décimal à corriger. Le nombre 10 n'est pas strictement plus petit que 10. Comme $10 = 1 \times 10^{1}$, la longueur vaut 1×10^{2} mm, soit 100 mm.

En centimètres. Un centimètre mesure 10 mm : la longueur est de 100 mm, c'est-à-dire 10 cm.

Conclusion. Les bactéries alignées mesurent 1×10^{2} mm, soit 10 cm.

Une colonie qui double

Une colonie part d'une seule bactérie et double toutes les 20 minutes. Écris le nombre de bactéries après 10 doublements comme une puissance de 2, puis calcule-le (en doublant pas à pas, ou à la calculatrice).

INDICE

Outil : une multiplication répétée s'écrit avec une puissance.

Début : chaque doublement multiplie le nombre de bactéries par 2.

Point délicat : compte les doublements, pas les minutes.

CORRIGÉ

On part d'une seule bactérie, et chaque doublement multiplie le nombre de bactéries par 2. Après 10 doublements, on a multiplié 10 fois par 2 : il y a 2^{10} bactéries. Ces doublements durent 10×20 minutes, soit 200 minutes.

En doublant pas à pas, on obtient 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, puis :

$$2^{10} = 1\,024$$

Conclusion. Après 10 doublements, la colonie compte 2^{10} bactéries, c'est-à-dire $1\,024$ bactéries.

Un ordre de grandeur

Donne l'écriture scientifique de ce nombre de bactéries, puis un ordre de grandeur.

INDICE

Outil : l'écriture scientifique, puis la définition de l'ordre de grandeur.

Début : place la virgule après le premier chiffre de $1\,024$.

Point délicat : regarde le chiffre des dixièmes de $1{,}024$ pour choisir entre 1 et 2.

CORRIGÉ

Écriture scientifique. La virgule se place après le premier chiffre : elle se déplace de 3 rangs vers la gauche, donc $1\,024 = 1{,}024 \times 10^{3}$.

Ordre de grandeur. L'entier le plus proche de $1{,}024$ est 1 : un ordre de grandeur est 1×10^{3}, soit environ mille bactéries.

Conclusion. Le nombre de bactéries s'écrit $1{,}024 \times 10^{3}$, avec pour ordre de grandeur 1×10^{3}.

Exercice 7

Un virus et un globule blanc

Un virus de la grippe mesure environ $1{,}2 \times 10^{-4}$ mm. Un globule blanc mesure environ $1{,}2 \times 10^{-2}$ mm.

Le plus petit

Lequel est le plus petit ? Justifie avec les exposants.

INDICE

Outil : la comparaison de deux nombres en écriture scientifique.

Début : compare d'abord les exposants -4 et -2.

Point délicat : entre deux nombres négatifs, le plus petit est le plus éloigné de zéro.

CORRIGÉ

Les deux longueurs sont en écriture scientifique, avec le même nombre décimal $1{,}2$: on compare les exposants. Sur une droite graduée, -4 est à gauche de -2, donc $-4 < -2$.

Le nombre qui a le plus petit exposant est le plus petit :

$$1{,}2 \times 10^{-4} < 1{,}2 \times 10^{-2}$$

Conclusion. Le virus est plus petit que le globule blanc.

Combien de fois plus long

Combien de fois le globule blanc est-il plus long que le virus ?

INDICE

Outil : un quotient en écriture scientifique.

Début : divise la longueur du globule par celle du virus.

Point délicat : soustrais un exposant négatif avec des parenthèses : $-2-(-4)$.

CORRIGÉ

On divise la longueur du globule blanc par celle du virus. Retrancher -4 revient à ajouter 4, donc l'exposant final est 2 :

$$\begin{aligned}&\frac{1{,}2 \times 10^{-2}}{1{,}2 \times 10^{-4}}\\ &= \frac{1{,}2}{1{,}2} \times 10^{-2-(-4)}\\ &= 1 \times 10^{2} = 100\end{aligned}$$

Conclusion. Le globule blanc est 100 fois plus long que le virus.

Trois longueurs

Un autre virus mesure environ 3×10^{-4} mm. Range les trois longueurs dans l'ordre croissant.

INDICE

Outil : la comparaison de nombres en écriture scientifique.

Début : repère les deux longueurs qui ont le même exposant.

Point délicat : à exposants égaux, compare les nombres décimaux.

CORRIGÉ

Même exposant. Les longueurs $1{,}2 \times 10^{-4}$ et 3×10^{-4} ont le même exposant. À exposants égaux, on compare $1{,}2 < 3$: le virus de la grippe est le plus petit des deux.

Exposant le plus grand. Le globule blanc a l'exposant -2, plus grand que -4 : c'est la plus grande des trois longueurs.

$$\begin{aligned} & 1{,}2 \times 10^{-4} \\ & < 3 \times 10^{-4} \\ & < 1{,}2 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

Conclusion. Dans l'ordre croissant : le virus de la grippe, l'autre virus, puis le globule blanc.