BURHAN

Les puissances : exercices, application

2ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/puissances/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Les puissances	Application	8

Exercice 1

Puissance et signe

Pour chaque nombre, repère la base et l'exposant avant de calculer.

Base entière négative

Calcule $(-3)^3$.

INDICE

Outil : une puissance est un produit de facteurs tous égaux à la base.

Début : écris le produit des trois facteurs égaux à -3.

Point délicat : compte les facteurs négatifs pour fixer le signe.

CORRIGÉ

On écrit le produit de trois facteurs égaux à -3 :

$$\begin{aligned}&(-3)^3\\&= (-3) \times (-3) \times (-3)\\&= -27\end{aligned}$$

Pour le signe : la base est négative et l'exposant 3 est impair, donc le résultat est négatif.

Conclusion. $(-3)^3 = -27$.

Base fractionnaire

Calcule $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$.

INDICE

Outil : multiplie la fraction par elle-même.

Début : multiplie les numérateurs entre eux, puis les dénominateurs entre eux.

Point délicat : un produit de deux nombres négatifs est positif.

CORRIGÉ

Élever au carré, c'est multiplier la fraction par elle-même. On multiplie les numérateurs, puis les dénominateurs :

$$\begin{aligned}&\left(-\frac{2}{3}\right)^2\\&= \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right)\\&= \frac{4}{9}\end{aligned}$$

L'exposant 2 est pair : le résultat est positif, ce qui confirme le signe trouvé.

Conclusion. $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$.

Signe sans calcul

Sans calculer, donne le signe de $(-7)^{10}$, puis celui de $(-1{,}2)^{7}$.

INDICE

Outil : le signe d'une puissance de base négative dépend de l'exposant, selon qu'il est pair ou impair.

Début : regarde si 10 et 7 sont pairs ou impairs.

Point délicat : ne calcule pas la valeur : seul le signe est demandé.

CORRIGÉ

Les deux bases sont négatives : le signe dépend seulement de l'exposant.

- $(-7)^{10}$ est positif, car l'exposant 10 est pair.
- $(-1{,}2)^{7}$ est négatif, car l'exposant 7 est impair.

Conclusion. Le premier nombre est positif, le second est négatif.

Deux écritures proches

Calcule -3^{4}, puis $(-3)^{4}$.

INDICE

Outil : sans parenthèses, la base est seulement le nombre écrit juste à gauche de l'exposant.

Début : dans -3^{4}, calcule d'abord 3^{4}.

Point délicat : le signe moins devant 3^{4} donne l'opposé du résultat.

CORRIGÉ

Premier nombre. Sans parenthèses, la base est 3. On calcule $3^{4} = 81$, puis on prend l'opposé : $-3^{4} = -81$.

Second nombre. Ici, la base est -3 et l'exposant 4 est pair, donc le résultat est positif : $(-3)^{4} = 81$.

Conclusion. $-3^{4} = -81$ et $(-3)^{4} = 81$: les parenthèses changent le résultat.

Exercice 2

Puissance d'exposant négatif

Donne chaque résultat sous la forme d'un entier ou d'une fraction.

Base entière

Calcule 3^{-3}.

INDICE

Outil : la définition de la puissance d'exposant négatif.

Début : écris 3^{-3} comme l'inverse d'une puissance d'exposant positif.

Point délicat : l'exposant négatif ne rend pas le nombre négatif.

CORRIGÉ

Par définition d'une puissance d'exposant négatif, 3^{-3} est l'inverse de 3^3 :

$$\begin{aligned} 3^{-3} &= \frac{1}{3^3} \\ &= \frac{1}{27} \end{aligned}$$

Le résultat est positif : un exposant négatif donne un inverse, pas un nombre négatif.

Conclusion. $3^{-3} = \frac{1}{27}$.

Inverse d'une fraction

Écris l'inverse de $\frac{3}{7}$ sous la forme d'une puissance, puis calcule-le.

INDICE

Outil : la définition de la puissance d'exposant négatif.

Début : l'inverse d'un nombre non nul est l'une de ses puissances : avec quel exposant ?

Point délicat : vérifie ton résultat : un nombre multiplié par son inverse donne 1.

CORRIGÉ

L'inverse d'un nombre non nul est sa puissance d'exposant -1. Pour une fraction, on échange le numérateur et le dénominateur :

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{-1} = \frac{7}{3}$$

Vérification : $\frac{3}{7} \times \frac{7}{3} = 1$.

Conclusion. L'inverse de $\frac{3}{7}$ s'écrit $\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}$ et vaut $\frac{7}{3}$.

Base négative

Calcule $(-5)^{-2}$.

INDICE

Outil : la définition de la puissance d'exposant négatif.

Début : écris l'inverse de $(-5)^{2}$.

Point délicat : regarde le signe de $(-5)^{2}$ avant de passer à l'inverse.

CORRIGÉ

On commence par la puissance d'exposant positif. L'exposant 2 est pair, donc $(-5)^{2} = 25$ est un nombre positif.

Par définition d'une puissance d'exposant négatif, on passe ensuite à l'inverse :

$$\begin{aligned}(-5)^{-2} &= \frac{1}{(-5)^{2}} \\ &= \frac{1}{25}\end{aligned}$$

Conclusion. $(-5)^{-2} = \dfrac{1}{25}$, un nombre positif.

Fraction et exposant négatif

Calcule $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$.

INDICE

Outil : la définition de la puissance d'exposant négatif.

Début : calcule d'abord $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3}$.

Point délicat : l'inverse d'une fraction s'obtient en échangeant numérateur et dénominateur.

CORRIGÉ

On calcule d'abord la puissance d'exposant 3 : $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3} = \dfrac{1}{8}$.

Par définition, la puissance d'exposant -3 est l'inverse de ce nombre :

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} &= \frac{1}{\frac{1}{8}} \\ &= 8.\end{aligned}$$

Conclusion. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} = 8$, car l'inverse de $\dfrac{1}{8}$ est 8.

Exercice 3

Produit de puissances d'une même base

Écris chaque produit sous la forme d'une seule puissance.

Exposants positifs

$7^3 \times 7^5$

INDICE

Outil : le produit de deux puissances d'un même nombre.

Début : garde la base 7.

Point délicat : les exposants s'additionnent, ils ne se multiplient pas.

CORRIGÉ

Les deux facteurs sont des puissances de 7. La règle du produit de puissances d'un même nombre s'applique : la base ne change pas, les exposants s'ajoutent.

$$\begin{aligned} 7^3 \times 7^5 &= 7^{3+5} \\ &= 7^8 \end{aligned}$$

Conclusion. $7^3 \times 7^5 = 7^8$.

Un exposant négatif

$2^{-6} \times 2^4$, puis donne sa valeur.

INDICE

Outil : le produit de deux puissances d'un même nombre.

Début : écris la somme des exposants $-6 + 4$.

Point délicat : une puissance d'exposant négatif se calcule avec un inverse.

CORRIGÉ

Une seule puissance. La base 2 est commune : les exposants s'additionnent.

$$\begin{aligned} 2^{-6} \times 2^4 &= 2^{-6+4} \\ &= 2^{-2} \end{aligned}$$

Valeur. L'exposant est négatif, donc on passe à l'inverse : $2^{-2} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$.

Conclusion. $2^{-6} \times 2^4 = 2^{-2} = \dfrac{1}{4}$.

Base négative

$(-9)^{2} \times (-9)^{-7}$

INDICE

Outil : le produit de deux puissances d'un même nombre.

Début : la base est -9 : garde-la entre parenthèses.

Point délicat : ajoute un nombre négatif avec des parenthèses : $2 + (-7)$.

CORRIGÉ

La base est -9 dans les deux facteurs. On la garde entre parenthèses et on additionne les exposants :

$$\begin{aligned}&(-9)^{2} \times (-9)^{-7}\\ &= (-9)^{2+(-7)}\\ &= (-9)^{-5}\end{aligned}$$

Conclusion. $(-9)^{2} \times (-9)^{-7} = (-9)^{-5}$.

Exercice 4

Quotient de puissances d'une même base

Écris chaque quotient sous la forme d'une seule puissance.

Exposants positifs

$\dfrac{11^{9}}{11^{4}}$

INDICE

Outil : le quotient de deux puissances d'un même nombre.

Début : garde la base 11.

Point délicat : l'ordre compte : exposant du haut moins exposant du bas.

CORRIGÉ

Avec la règle du quotient de puissances d'un même nombre, on garde la base 11 et on retire l'exposant du bas de celui du haut :

$$\begin{aligned}\frac{11^{9}}{11^{4}} &= 11^{9-4}\\ &= 11^{5}\end{aligned}$$

Conclusion. $\dfrac{11^{9}}{11^{4}} = 11^{5}$.

Un quotient et sa valeur

$\dfrac{3^{2}}{3^{6}}$, puis donne sa valeur.

INDICE

Outil : le quotient de deux puissances d'un même nombre.

Début : écris la différence $2 - 6$, dans cet ordre.

Point délicat : le résultat a un exposant négatif : passe à l'inverse.

CORRIGÉ

Une seule puissance. On soustrait les exposants dans l'ordre, haut moins bas :

$$\begin{aligned}\frac{3^{2}}{3^{6}} &= 3^{2-6}\\ &= 3^{-4}\end{aligned}$$

Valeur. L'exposant -4 est négatif : $3^{-4} = \dfrac{1}{3^{4}} = \dfrac{1}{81}$.

Conclusion. $\dfrac{3^{2}}{3^{6}} = 3^{-4} = \dfrac{1}{81}$.

Deux exposants négatifs

$$\frac{8^{-1}}{8^{-5}}$$

INDICE

Outil : le quotient de deux puissances d'un même nombre.

Début : écris la différence $-1-(-5)$.

Point délicat : soustraire un nombre négatif revient à ajouter son opposé.

CORRIGÉ

On soustrait les exposants dans l'ordre, haut moins bas. Retrancher -5 revient à ajouter 5 :

$$\begin{aligned}\frac{8^{-1}}{8^{-5}} &= 8^{-1-(-5)}\\ &= 8^{-1+5}\\ &= 8^{4}\end{aligned}$$

Conclusion. $\dfrac{8^{-1}}{8^{-5}} = 8^{4}$.

Exercice 5

Puissance d'une puissance, d'un produit, d'un quotient

Une seule propriété par question : nomme-la dans ta réponse.

Puissance d'une puissance

Écris $\left(5^2\right)^4$ sous la forme d'une seule puissance de 5.

INDICE

Outil : la puissance d'une puissance.

Début : garde la base 5.

Point délicat : les exposants se multiplient, ils ne s'additionnent pas.

CORRIGÉ

On utilise la puissance d'une puissance : la base 5 reste la même, et les exposants 2 et 4 se multiplient.

$$\begin{aligned}\left(5^2\right)^4 &= 5^{2\times 4}\\ &= 5^8\end{aligned}$$

Conclusion. $\left(5^2\right)^4 = 5^8$.

Puissance d'un produit

Calcule $(2\times 7)^2$ avec la puissance d'un produit, puis vérifie en calculant 14^2.

INDICE

Outil : la puissance d'un produit.

Début : élève chaque facteur au carré.

Point délicat : le même exposant 2 porte sur les deux facteurs.

CORRIGÉ

Calcul. Par la puissance d'un produit, l'exposant 2 porte sur chacun des deux facteurs :

$$\begin{aligned}(2\times 7)^2 &= 2^2\times 7^2\\ &= 4\times 49\\ &= 196\end{aligned}$$

Vérification. On calcule d'abord le produit, $2\times 7 = 14$, puis $14^2 = 196$. On retrouve le même nombre.

Conclusion. $(2\times 7)^2 = 196$.

Puissance d'un quotient

Calcule $\left(\frac{5}{3}\right)^{2}$.

INDICE

Outil : la puissance d'un quotient.

Début : élève le numérateur, puis le dénominateur, au carré.

Point délicat : l'exposant porte sur les deux termes de la fraction.

CORRIGÉ

Par la puissance d'un quotient, on élève au carré le numérateur et le dénominateur :

$$\begin{aligned}\left(\frac{5}{3}\right)^{2} &= \frac{5^{2}}{3^{2}} \\ &= \frac{25}{9}\end{aligned}$$

Conclusion. $\left(\frac{5}{3}\right)^{2} = \frac{25}{9}$.

Une autre puissance de puissance

Calcule $\left(4^{-1}\right)^{-2}$.

INDICE

Outil : la puissance d'une puissance.

Début : écris le produit des exposants $(-1) \times (-2)$.

Point délicat : le produit de deux nombres négatifs est positif.

CORRIGÉ

Par la puissance d'une puissance, on multiplie les exposants. Le produit de deux nombres négatifs est positif : $(-1) \times (-2) = 2$.

$$\begin{aligned}\left(4^{-1}\right)^{-2} &= 4^{(-1)\times(-2)} \\ &= 4^{2} \\ &= 16\end{aligned}$$

Conclusion. $\left(4^{-1}\right)^{-2} = 16$.

Exercice 6

Puissances de 10

Donne chaque résultat en écriture décimale.

Deux puissances de 10

Écris 10^{6} et 10^{-4} en écriture décimale.

INDICE

Outil : l'écriture décimale des puissances de 10.

Début : pour 10^{6}, compte les zéros après le chiffre 1.

Point délicat : pour 10^{-4}, compte les chiffres après la virgule, le dernier étant 1.

CORRIGÉ

- $10^{6} = 1\,000\,000$: l'exposant 6 est positif, on écrit le chiffre 1 suivi de 6 zéros.
- $10^{-4} = 0{,}0001$: l'exposant est négatif, on écrit 4 chiffres après la virgule, et le dernier est le 1.

Conclusion. 10^{6} s'écrit $1\,000\,000$ et 10^{-4} s'écrit $0{,}0001$.

Exposant positif

Calcule $2{,}45 \times 10^{3}$.

INDICE

Outil : multiplier par une puissance de 10 déplace la virgule.

Début : l'exposant 3 est positif : la virgule va vers la droite.

Point délicat : ajoute un zéro s'il manque un chiffre.

CORRIGÉ

L'exposant 3 est positif : multiplier par 10^{3} déplace la virgule de 3 rangs vers la droite. On ajoute un zéro, car $2{,}45$ n'a que deux chiffres après la virgule.

$$2{,}45 \times 10^{3} = 2\,450$$

Conclusion. Le résultat est $2\,450$.

Exposant négatif

Calcule 813×10^{-5}.

INDICE

Outil : multiplier par une puissance de 10 déplace la virgule.

Début : l'exposant -5 est négatif : la virgule va vers la gauche.

Point délicat : 813 n'a que trois chiffres : ajoute des zéros devant.

CORRIGÉ

L'exposant -5 est négatif : multiplier par 10^{-5} déplace la virgule de 5 rangs vers la gauche. Le nombre 813 n'a que trois chiffres, donc on complète avec des zéros devant.

$$813 \times 10^{-5} = 0{,}00813$$

Conclusion. Le résultat est $0{,}00813$.

Une goutte d'eau

Une goutte d'eau a un volume d'environ 5×10^{-2} centimètre cube. Écris ce volume en écriture décimale.

INDICE

Outil : multiplier par une puissance de 10 déplace la virgule.

Début : écris 5 sous la forme $5{,}0$ et déplace la virgule vers la gauche.

Point délicat : compte bien 2 rangs.

CORRIGÉ

L'exposant -2 est négatif : la virgule se déplace de 2 rangs vers la gauche.

$$5 \times 10^{-2} = 0{,}05$$

Conclusion. La goutte a un volume d'environ $0{,}05$ centimètre cube.

Exercice 7

Écriture scientifique

Donne l'écriture scientifique de chaque nombre.

Un grand nombre

$72\,000\,000$

INDICE

Outil : l'écriture scientifique $a \times 10^p$ avec $1 \leq a < 10$.

Début : place la virgule après le chiffre 7.

Point délicat : compte tous les rangs, zéros compris.

CORRIGÉ

On place la virgule après le premier chiffre, 7, pour obtenir $7{,}2$, compris entre 1 et 10. La virgule se déplace de 7 rangs vers la gauche, donc l'exposant est positif.

$$\begin{aligned} &72\,000\,000 \\ &= 7{,}2 \times 10^{7} \end{aligned}$$

Conclusion. L'écriture scientifique est $7{,}2 \times 10^{7}$.

Un petit nombre

$0{,}00036$

INDICE

Outil : l'écriture scientifique $a \times 10^p$ avec $1 \leq a < 10$.

Début : place la virgule après le chiffre 3.

Point délicat : un nombre plus petit que 1 a un exposant négatif.

CORRIGÉ

On place la virgule après le premier chiffre non nul, 3 : on obtient $3{,}6$. La virgule se déplace de 4 rangs vers la droite. Le nombre est plus petit que 1, donc l'exposant est négatif.

$$0{,}00036 = 3{,}6 \times 10^{-4}$$

Conclusion. L'écriture scientifique est $3{,}6 \times 10^{-4}$.

Un globule rouge

Le diamètre d'un globule rouge est d'environ $0{,}007$ mm. Écris cette longueur en écriture scientifique.

INDICE

Outil : l'écriture scientifique $a \times 10^{p}$ avec $1 \leq a < 10$.

Début : le premier chiffre non nul est 7.

Point délicat : compte les rangs entre la virgule et le chiffre 7.

CORRIGÉ

Le premier chiffre non nul est 7. Pour placer la virgule juste après lui, on la déplace de 3 rangs vers la droite : l'exposant est -3.

$$0{,}007 = 7 \times 10^{-3}$$

Conclusion. Le diamètre est d'environ 7×10^{-3} mm.

Un nombre négatif

$-5\,600$

INDICE

Outil : l'écriture scientifique d'un nombre négatif.

Début : écris d'abord l'écriture scientifique de $5\,600$.

Point délicat : remets le signe moins devant à la fin.

CORRIGÉ

Sans le signe. On place la virgule après le 5 : elle se déplace de 3 rangs vers la gauche, donc $5\,600 = 5{,}6 \times 10^{3}$.

Avec le signe. Le nombre est négatif : on écrit le signe moins devant l'écriture scientifique.

$$-5\,600 = -5{,}6 \times 10^{3}$$

Conclusion. L'écriture scientifique est $-5{,}6 \times 10^{3}$.

Exercice 8

Ordre de grandeur

Pour un nombre écrit $a \times 10^p$, on remplace a par l'entier le plus proche.

Un grand nombre

Donne un ordre de grandeur de $6{,}3 \times 10^4$.

INDICE

Outil : la définition de l'ordre de grandeur.

Début : cherche l'entier le plus proche de $6{,}3$.

Point délicat : la puissance de 10 ne change pas.

CORRIGÉ

Le nombre est déjà en écriture scientifique. L'entier le plus proche de $6{,}3$ est 6, et la puissance de 10 reste la même.

Conclusion. Un ordre de grandeur de $6{,}3 \times 10^4$ est donc 6×10^4.

Un petit nombre

Donne un ordre de grandeur de $8{,}7 \times 10^{-3}$.

INDICE

Outil : la définition de l'ordre de grandeur.

Début : cherche l'entier le plus proche de $8{,}7$.

Point délicat : l'exposant -3 reste le même.

CORRIGÉ

Le nombre est déjà en écriture scientifique. L'entier le plus proche de $8{,}7$ est 9, et l'exposant -3 ne bouge pas.

Conclusion. Un ordre de grandeur de $8{,}7 \times 10^{-3}$ est donc 9×10^{-3}.

Une population

En 2024, le Maroc comptait environ $3{,}68 \times 10^7$ habitants. Donne un ordre de grandeur de cette population.

INDICE

Outil : la définition de l'ordre de grandeur.

Début : cherche l'entier le plus proche de $3{,}68$.

Point délicat : regarde le chiffre des dixièmes pour choisir entre 3 et 4.

CORRIGÉ

Le chiffre des dixièmes de $3{,}68$ est 6 : le nombre est plus proche de 4 que de 3. L'entier le plus proche de $3{,}68$ est 4.

Conclusion. Un ordre de grandeur de la population est donc 4×10^7 habitants, soit environ 40 millions.