BURHAN

Résumé : La proportionnalité

2ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/proportionnalite/resume

Chapitre	Semestre
La proportionnalité	Semestre 2

Représenter une situation dans un repère

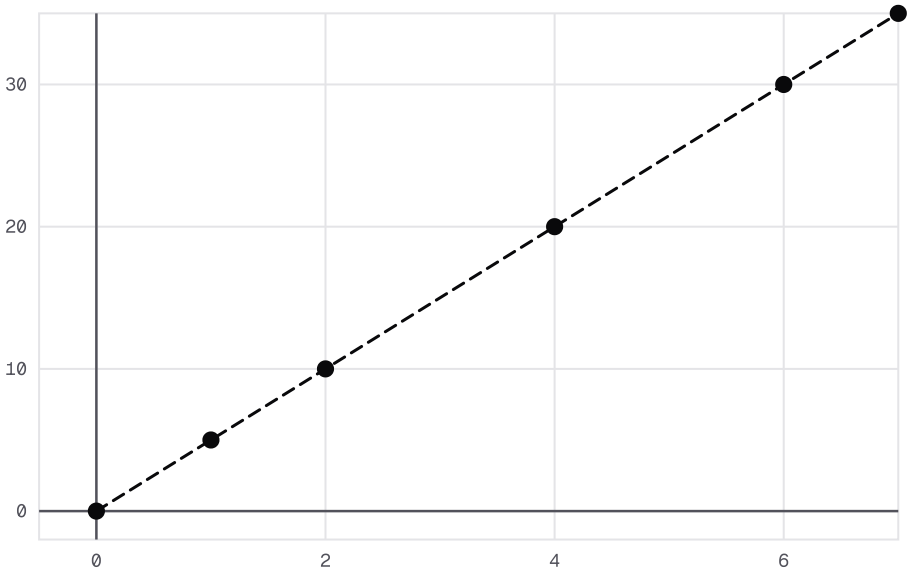
À retenir : Un tableau devient des points

Chaque colonne d'un tableau de valeurs devient un point du repère. L'abscisse vient de la première ligne, l'ordonnée de la seconde. La disposition des points renseigne sur la situation.

Définition : Représentation graphique d'une situation

On considère une situation où une grandeur y dépend d'une grandeur x, donnée par un tableau de valeurs. Dans un repère orthogonal d'origine O, chaque colonne du tableau donne un **point** : son **abscisse** est la valeur de x, son **ordonnée** est la valeur correspondante de y.

L'ensemble de ces points est la **représentation graphique** de la situation.



Une colonne du tableau, un point : masse en abscisse, prix en ordonnée, comme pour les tomates du marché.

Méthode : représenter une situation de proportionnalité

1. **Gradue** chaque axe avec une unité adaptée aux nombres du tableau.

2. **Place** un point par colonne : la première ligne donne l'abscisse, la seconde l'ordonnée.
3. **Trace** la droite qui part de l'origine O et rejoint l'un de ces points.
4. **Vérifie** qu'un autre point du tableau se trouve sur ta droite.

Exemple

Situation. Un cahier coûte 4 dirhams. Pour 1, 3 et 5 cahiers, on paie 4, 12 et 20 dirhams.

Points. On obtient $(1;4)$, $(3;12)$ et $(5;20)$. Prends 1 cm pour un cahier et 1 cm pour 4 dirhams.

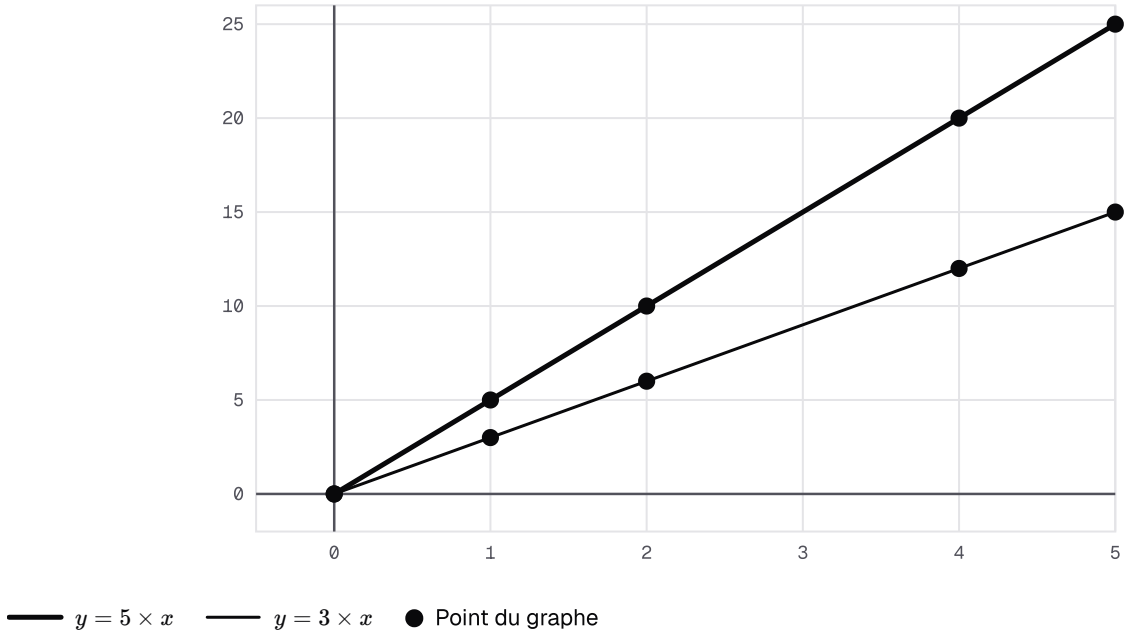
Droite. Trace la droite qui passe par O et par $(5;20)$.

Contrôle. $4 \times 3 = 12$, donc $(3;12)$ est sur cette droite.

Proportionnalité et alignement avec l'origine

Propriété : Proportionnalité et points alignés avec l'origine

Si la grandeur y est **proportionnelle** à la grandeur x, de coefficient a, c'est-à-dire si $y = a \times x$ pour chaque colonne du tableau, alors les points qui représentent la situation sont **alignés avec l'origine** O du repère : ils sont tous sur une même droite qui passe par O.



Deux tableaux de proportionnalité, deux droites issues de l'origine : 5 dirhams le kilo et 3 dirhams le kilo.

Propriété : Points alignés avec l'origine et proportionnalité

Si les points qui représentent un tableau de valeurs, dont les abscisses sont toutes **non nulles**, sont **alignés avec l'origine** O du repère, alors ce tableau est un tableau de proportionnalité.

De plus, d'après la propriété précédente, si ces points ne sont pas tous sur une même droite passant par O, la situation **n'est pas** une situation de proportionnalité.

Remarque : Deux propriétés admises

Ces deux propriétés sont admises. On les a observées sur des exemples, sans les démontrer. La première va du tableau vers le graphique. La seconde fait le chemin inverse, pour des abscisses non nulles.

Méthode : reconnaître une situation de proportionnalité

1. **Place** tous les points de la situation.
2. **Pose** ta règle : les points sont-ils sur une même droite ? Cette droite passe-t-elle par O ?
3. **Conclus** : avec des abscisses non nulles, oui aux deux questions donne une situation de proportionnalité. Non à l'une d'elles, elle ne l'est pas.
4. **Vérifie** ensuite avec les quotients $\frac{y}{x}$: tous égaux, ou non.

Exemple

Tableau. Pour $x = 3$, 6 et 10, on a $y = 7{,}5$, 15 et 25.

Graphique. Les points $(3; 7{,}5)$, $(6; 15)$ et $(10; 25)$ sont sur une même droite passant par O.

Calcul. Les quotients sont égaux :

$$\frac{7{,}5}{3} = \frac{15}{6} = \frac{25}{10} = 2{,}5$$

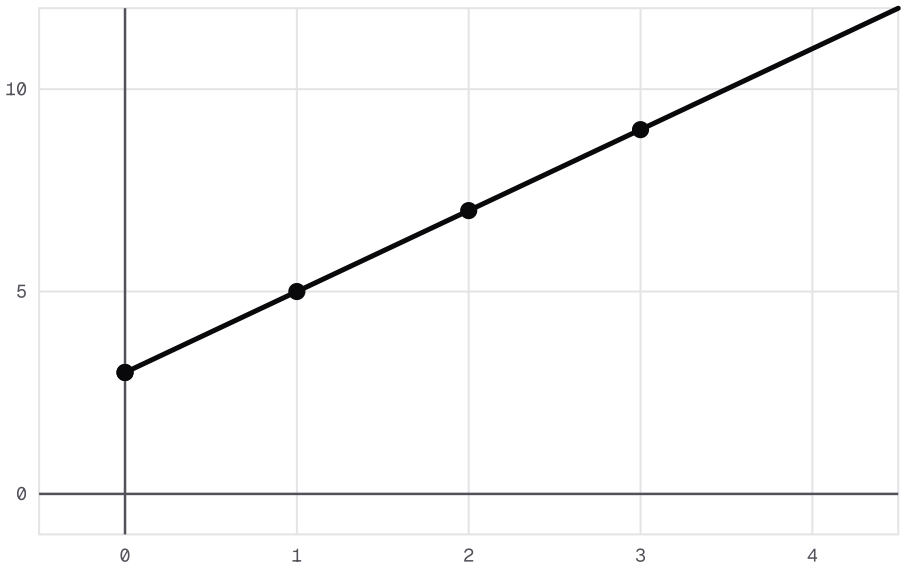
La situation est de proportionnalité, de coefficient $2{,}5$.

Attention : Des points alignés ne suffisent pas

Les points $(1; 5)$, $(2; 7)$ et $(3; 9)$ sont alignés : l'ordonnée gagne 2 quand l'abscisse gagne 1.

Mais leur droite coupe l'axe des ordonnées en $(0; 3)$, pas en O.

Les quotients le confirment : $\frac{5}{1} \neq \frac{7}{2}$. Ce n'est pas une situation de proportionnalité.



Les points (1 ; 5), (2 ; 7) et (3 ; 9) sont bien sur une droite, mais elle rencontre l'axe vertical en (0 ; 3), au-dessus de O.

Attention : Partir de l'origine ne suffit pas

Les points $(2;2)$, $(4;8)$ et $(6;18)$ semblent partir de O. Pourtant, ils ne sont pas sur une même droite.

Leurs quotients valent 1, 2 et 3 : ils ne sont pas égaux. Ce n'est pas une situation de proportionnalité.

Lire le coefficient et des valeurs

Méthode : lire sur la droite

1. **Coefficient** : lis l'ordonnée du point de la droite qui a pour abscisse 1.
2. **Une valeur de y** : monte depuis l'abscisse donnée jusqu'à la droite, puis lis sur l'axe des ordonnées.
3. **Une valeur de x** : avance depuis l'ordonnée donnée jusqu'à la droite, puis lis sur l'axe des abscisses.
4. **Contrôle** chaque lecture par le calcul $y = a \times x$.

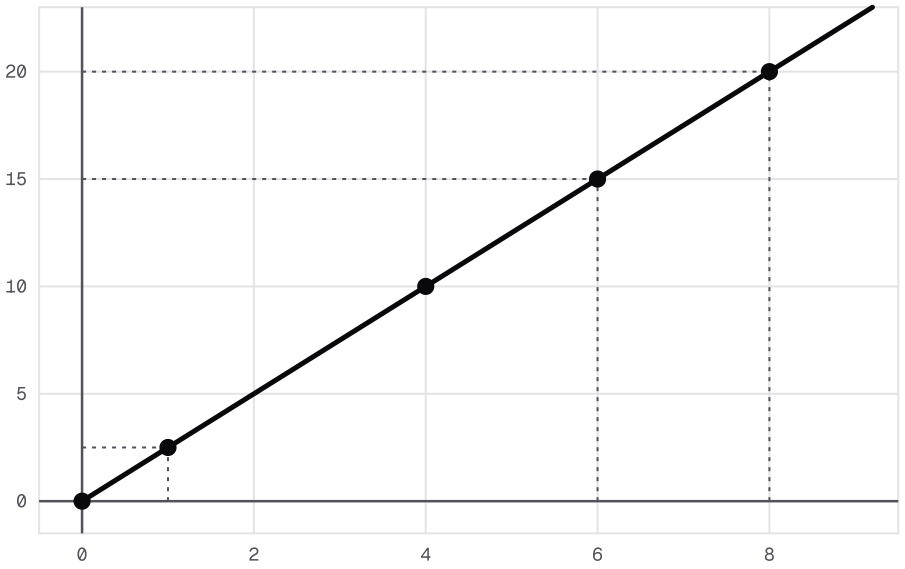
Exemple

Droite. Sur ton cahier, trace la droite qui passe par O et par $A(4;10)$.

Coefficient. À l'abscisse 1, on lit environ $2{,}5$. Contrôle : $10 \div 4 = 2{,}5$.

Valeurs.

- Pour $x = 6$, on lit $y \approx 15$, et $2{,}5 \times 6 = 15$.
- Pour $y = 20$, on lit $x \approx 8$, et $20 \div 2{,}5 = 8$.



Trois lectures sur la droite issue de O passant par A(4 ; 10) : 2,5 à l'abscisse 1, 15 à l'abscisse 6, et l'abscisse 8 pour l'ordonnée 20.

Attention : Une lecture n'est jamais exacte

Le trait du crayon a une épaisseur, et l'œil se trompe un peu. Une valeur lue sur un graphique est donc approchée : écris « environ » ou $\approx$. Seul le calcul avec le coefficient donne la valeur exacte.

Comparer deux situations

Méthode : comparer deux droites

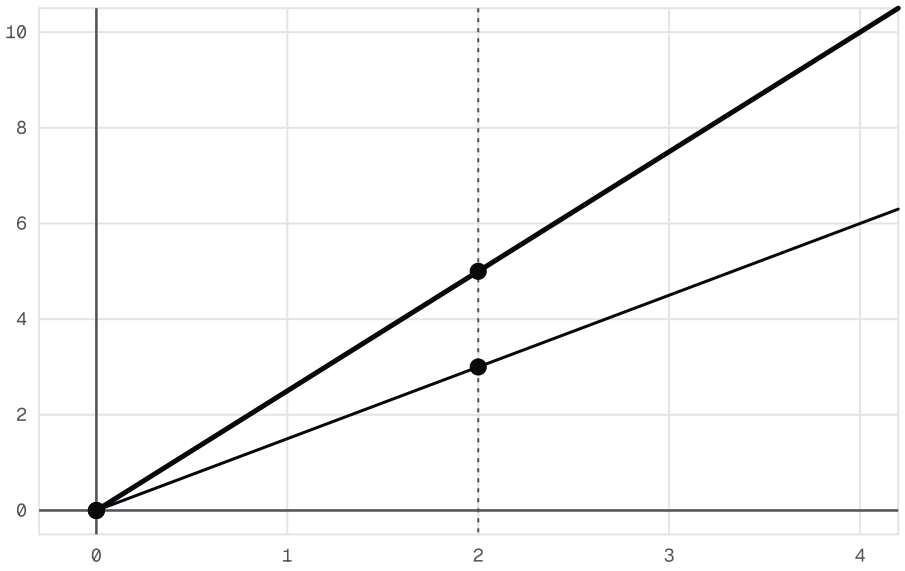
1. **Trace** les deux droites dans un seul repère, avec les mêmes unités.
2. **Choisis** une abscisse positive et lis l'ordonnée sur chaque droite.
3. **Conclus** : la droite la plus haute a le plus grand coefficient.
4. **Traduis** dans la situation : prix plus élevé, vitesse plus grande, consommation plus forte.

Exemple

Deux droites. La droite d_1 passe par O et $A(2;5)$. La droite d_2 passe par O et $B(2;3)$.

Lecture. À l'abscisse 2, la droite d_1 est au-dessus de d_2, car $5 > 3$.

Coefficients. $\dfrac{5}{2} = 2{,}5$ et $\dfrac{3}{2} = 1{,}5$: le coefficient de d_1 est le plus grand.



d_1 d_2 Point plein A Point plein B Point du graphe

À l'abscisse 2, la droite d1 passe par A, à la hauteur 5, et la droite d2 par B, à la hauteur 3 : d1 est au-dessus.

Vitesse moyenne, échelles, pourcentages

Méthode : résoudre un problème

1. **Nomme** les deux grandeurs et dis pourquoi elles sont proportionnelles.
2. **Convertis** : une seule unité par grandeur, et les durées en heures décimales.
3. **Trouve** le coefficient : la vitesse moyenne, ou $\frac{t}{100}$ pour t pour cent. L'échelle est la longueur sur la carte divisée par la longueur réelle, en même unité. À l'échelle $\frac{1}{n}$, multiplie par n une longueur de la carte pour obtenir la vraie longueur.
4. **Calcule** la valeur demandée, puis réponds par une phrase avec l'unité.

Exemple

Énoncé. Un autocar parcourt 90 km en 1 h 15 min.

Durée. Un quart d'heure vaut $0{,}25$ h. La durée du trajet est donc $1{,}25$ h.

Vitesse moyenne. Le quotient de la distance par la durée donne :

$$90 \div 1{,}25 = 72$$

L'autocar roule en moyenne à 72 kilomètres par heure.

Exemple

Énoncé. La maquette d'un voilier est à l'échelle $\frac{1}{50}$. Son mât mesure 24 cm.

Échelle. Elle vaut $\frac{1}{50}$: la longueur sur la maquette divisée par la longueur réelle, en même unité, donne $\frac{1}{50}$. La vraie longueur vaut donc 50 fois celle de la maquette.

Calcul.

$$24 \times 50 = 1\,200$$

Réponse. Le vrai mât mesure $1\,200$ cm, soit 12 m.

Exemple

Énoncé. Un fromage blanc contient 8 pour cent de matières grasses. Combien en contient un pot de 250 grammes ?

Coefficient. « 8 pour cent de » correspond au coefficient $\frac{8}{100}$.

Calcul.

$$\frac{8}{100} \times 250 = 20$$

Réponse. Le pot contient 20 grammes de matières grasses.

Attention **: Convertir avant de calculer**

Une durée de 30 minutes s'écrit $0{,}5$ heure, et non $0{,}30$ heure. Une heure compte 60 minutes, pas 100.

Sur une maquette, exprime les deux longueurs dans la même unité avant de diviser.

Attention **: Un pourcentage multiplie**

Un loyer de $2\,000$ dirhams augmente de 5 pour cent. L'augmentation n'est pas de 5 dirhams. Elle vaut :

$$\frac{5}{100} \times 2\,000 = 100$$

Le nouveau loyer est donc $2\,100$ dirhams, et non $2\,005$ dirhams.

Quel outil pour quelle question ?

Méthode **: Quel outil pour quelle question ?**

- **Représenter** : un point par colonne, puis la droite par O si la situation est de proportionnalité.
- **Reconnaître** : des points d'abscisses non nulles alignés avec O, confirmés par des quotients égaux.
- **Refuser** la proportionnalité : des points non alignés, ou une droite qui évite O.
- **Lire** : le coefficient à l'abscisse 1. Toute lecture est approchée, puis contrôlée.
- **Comparer** : à une même abscisse positive, la droite la plus haute l'emporte.

- **Résoudre** : unités cohérentes, coefficient, calcul, phrase avec l'unité.

Relation de proportionnalité, de coefficient a

$$y = a \times x$$

Coefficient tiré d'un point d'abscisse x non nulle

$$a = \frac{y}{x}$$

Vitesse moyenne : distance d, durée T en heures

$$v = \frac{d}{T}$$

Échelle e : longueur l sur la carte ou la maquette, divisée par la longueur réelle L, même unité ; si e vaut 1/n, alors L vaut n fois l

$$e = \frac{l}{L}$$

t pour cent d'une quantité Q

$$\frac{t}{100} \times Q$$

Produits en croix de deux colonnes d'un tableau de proportionnalité

$$y_1 \times x_2 = y_2 \times x_1$$

À retenir : Coin devoir

En devoir, chaque conclusion donne sa raison. Écris par exemple : « les abscisses sont non nulles et les points sont alignés avec l'origine, donc la situation est de proportionnalité ».

Donne toute lecture avec « environ », puis contrôle-la par un calcul.

Termine un problème par une phrase avec l'unité.

Exemple : Une question de devoir rédigée

Question. Ce tableau est-il un tableau de proportionnalité ? Justifie.

x	4	6	10
y	6	9	16

Réponse rédigée. Les quotients valent $\frac{6}{4} = 1{,}5$, $\frac{9}{6} = 1{,}5$ et $\frac{16}{10} = 1{,}6$. Ils ne sont pas tous égaux.

Ce n'est donc pas un tableau de proportionnalité. Le point $(10; 16)$ n'est pas sur la droite qui passe par O et $(4; 6)$.