BURHAN

La proportionnalité

2ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/proportionnalite/cours

Chapitre	Semestre
La proportionnalité	Semestre 2

La route du cycliste

Samir roule à vélo sur une route plate. Il garde une allure régulière : chaque heure, il parcourt la même distance. Voici ce qu'indique son compteur.

Durée (h)	1	2	3	4
Distance (km)	16	32	48	64

Place ces valeurs dans un repère : la durée sur l'axe horizontal, la distance sur l'axe vertical. Que vas-tu obtenir ?

Devine : Une prédiction

Tu places les quatre points du tableau de Samir dans un repère d'origine O. Comment sont-ils disposés ?

A. Ils dessinent une ligne courbe qui monte.

Faux.
Chaque heure ajoute toujours 16 km : les points montent de façon régulière, sans se courber.

B. Ils sont sur une même droite qui passe par O.

Juste.
Bonne prédiction. Tu la contrôleras à la fin de la section sur l'alignement.

C. Ils sont sur une droite qui ne passe pas par O.

Faux.
En 0 heure, Samir n'a parcouru aucun kilomètre. Le point $(0;0)$ suit la même régularité.

D. Ils sont dispersés, sans ordre.

Faux.
Chaque heure ajoute 16 km : la disposition est très régulière.

Correction
Les points $(1;16)$, $(2;32)$, $(3;48)$ et $(4;64)$ sont sur une même droite. Cette droite passe par l'origine O.

Chaque heure de plus fait monter le point de 16 km.

Ce chapitre t'apprend à lire ce que cette droite dit de la situation.

Dans ce chapitre, tu places dans un repère les valeurs d'un tableau. Tu apprends à reconnaître une situation de proportionnalité sur un graphique. Tu lis un coefficient et des valeurs sur une droite.

Tu compares aussi deux situations dans un même repère. Enfin, tu résous des problèmes de vitesse, d'échelle et de pourcentage.

Rappels de 1re année : proportionnalité et repère

Le tableau de proportionnalité

Rappel de 1re année : deux grandeurs sont **proportionnelles** quand on passe de l'une à l'autre en multipliant toujours par le même nombre a. Ce nombre est le **coefficient de proportionnalité**.

On écrit $y = a \times x$ pour chaque colonne du tableau. Les quotients $\frac{y}{x}$ sont alors tous égaux à a.

Vérifie : Quel tableau ?

Lequel de ces tableaux est un tableau de proportionnalité ?

A. x : $2, 3, 5$; y : $6, 9, 16$

Faux.

Faux : $\frac{6}{2} = 3$, mais $\frac{16}{5} \neq 3$, car $3 \times 5 = 15$.

B. x : $2, 4, 6$; y : $5, 7, 9$

Faux.

Faux : on ajoute 2 à chaque fois, on ne multiplie pas. Les produits en croix diffèrent : $5 \times 4 = 20$ et $2 \times 7 = 14$.

C. x : $3, 5, 8$; y : $12, 20, 32$

Juste.

Juste : chaque valeur de y vaut $4 \times x$.

D. x : $1, 2, 3$; y : $3, 5, 7$

Faux.

Faux : $\frac{3}{1} = 3$, mais $\frac{5}{2} \neq 3$.

Correction

Dans le troisième tableau, les quotients sont égaux :

$$\frac{12}{3} = \frac{20}{5} = \frac{32}{8} = 4$$

C'est donc un tableau de proportionnalité, de coefficient $a = 4$.

Exemple : la quatrième proportionnelle

Rappel de 1re année : pour compléter un tableau de proportionnalité, on utilise le coefficient ou les produits en croix.

x	6	10
y	21	?

Ici, le coefficient vaut :

$$a = \frac{21}{6} = 3{,}5$$

La valeur manquante vaut donc $3{,}5 \times 10 = 35$.

Contrôle par les produits en croix : $6 \times 35 = 210$ et $21 \times 10 = 210$.

Le repère du plan

Rappel de 1re année : un **repère orthogonal** est formé de deux axes perpendiculaires. Ils se coupent en l'**origine** O. L'axe horizontal porte les **abscisses**, l'axe vertical porte les **ordonnées**.

Un point a deux **coordonnées**, écrites $(x ; y)$: d'abord l'abscisse, puis l'ordonnée.

Vérifie : Lire des coordonnées

Le point $A(4 ; 6)$ est placé dans un repère d'origine O. Que sais-tu de ce point ?

A. Il est sur l'axe des ordonnées, à la hauteur 6.

Faux.

Faux : un point de l'axe des ordonnées a une abscisse nulle. Ici, l'abscisse vaut 4.

B. Son abscisse est 6 et son ordonnée est 4.

Faux.

Faux : l'ordre est fixé, l'abscisse vient d'abord.

C. Il est à 10 unités de l'origine.

Faux.

Faux : la somme $4 + 6$ n'est pas une distance. On avance de 4, puis on monte de 6.

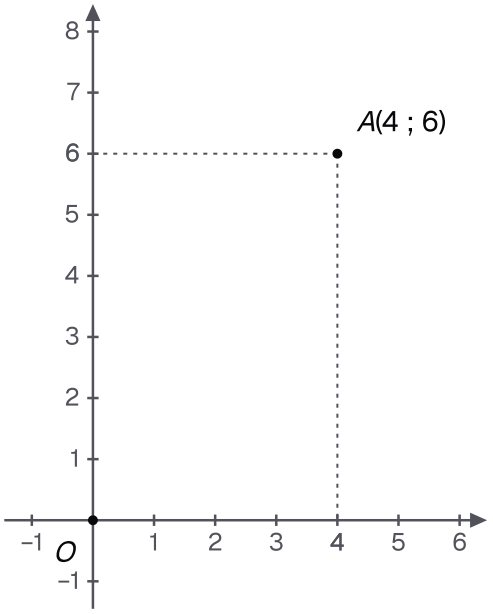
D. Son abscisse est 4 et son ordonnée est 6.

Juste.

Juste : l'abscisse d'abord, l'ordonnée ensuite.

Correction

Pour placer $A(4 ; 6)$, on part de O. On avance de 4 unités le long de l'axe horizontal. Puis on monte de 6 unités, parallèlement à l'axe vertical.



Le point A(4 ; 6) : on avance de 4 sur l'axe des abscisses, puis on monte de 6.

À retenir : l'ordre des coordonnées

Dans $(x; y)$, l'abscisse vient toujours d'abord. Les points $(2; 5)$ et $(5; 2)$ sont deux points différents.

Le point-virgule sépare les deux coordonnées, car la virgule sert déjà aux nombres décimaux, comme dans $(1{,}5; 3)$.

À toi

À toi : Compléter un tableau

Voici un tableau de proportionnalité : pour $x = 2$, 5 et 7, on a $y = 6$, 15 et 21. Donne son coefficient, puis la valeur de y pour $x = 9$.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Le coefficient est le quotient $\frac{y}{x}$ d'une colonne.
Indice 2
Calcule $\frac{6}{2}$, puis multiplie 9 par ce nombre.
Indice 3
Point délicat : contrôle avec une autre colonne, par exemple $\frac{15}{5}$.

Réponse
Coefficient. On divise une valeur de y par la valeur de x de sa colonne :

$$a = \frac{6}{2} = 3$$

Contrôle : $\frac{15}{5} = 3$ et $\frac{21}{7} = 3$.

Valeur pour $x = 9$. On multiplie par le coefficient :

$$y = 3 \times 9 = 27$$

Conclusion. Le coefficient vaut 3, et la valeur cherchée est $y = 27$.

Ce qui est nouveau cette année. Chaque colonne d'un tableau peut devenir un point d'un repère. La disposition de ces points dit alors si la situation est de proportionnalité.

Représenter une situation dans un repère

Placer les points d'un tableau

Au marché, les tomates sont vendues 5 dirhams le kilogramme. Le prix payé dépend de la masse achetée.

Masse (kg)	1	2	4	6
Prix (dirhams)	5	10	20	30

On veut traduire ce tableau par des points d'un repère.

À toi : Une colonne, un point

On place la masse en abscisse et le prix en ordonnée. Quel point donne la colonne « 4 kg, 20 dirhams » ?

A. Le point $(4; 5)$
Faux.
Faux : 5 dirhams est le prix d'un kilogramme, pas celui de 4 kg.

B. Le point $(20; 4)$
Faux.
Faux : l'abscisse est la masse, elle vient d'abord.

C. Le point $(4; 20)$
Juste.
Juste : abscisse 4, la masse ; ordonnée 20, le prix.

D. Le point $(4; 24)$
Faux.
Faux : 24 est la somme $4 + 20$, qui n'a pas de sens ici.

Correction
La colonne donne l'abscisse 4, la masse en kilogrammes. Elle donne l'ordonnée 20, le prix en dirhams. C'est le point $(4; 20)$.

Définition : Représentation graphique d'une situation

On considère une situation où une grandeur y dépend d'une grandeur x, donnée par un tableau de valeurs. Dans un repère orthogonal d'origine O, chaque colonne du tableau donne un **point** : son **abscisse** est la valeur de x, son **ordonnée** est la valeur correspondante de y.

L'ensemble de ces points est la **représentation graphique** de la situation.

Exemple : les points du marché

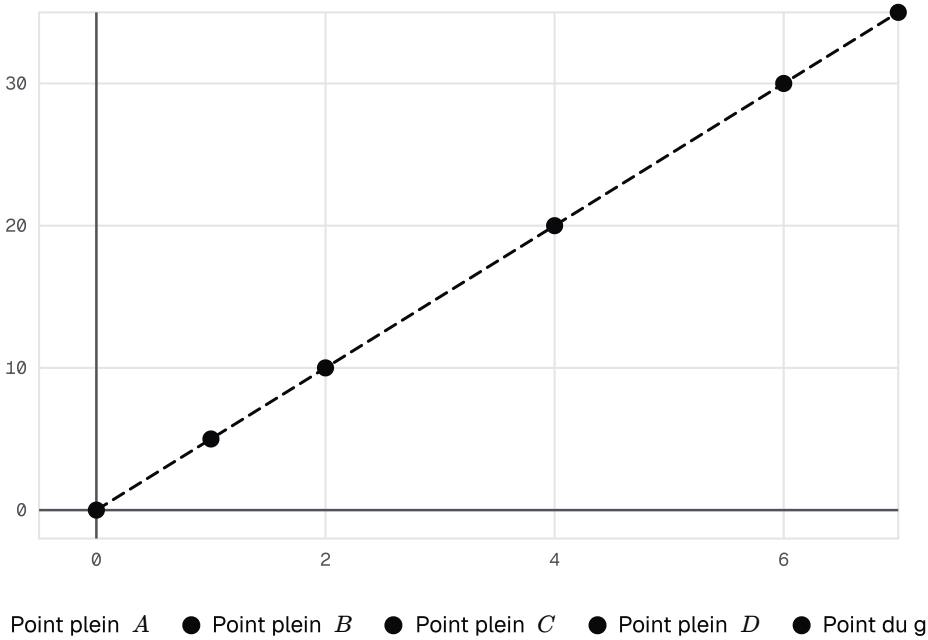
Les quatre colonnes du tableau donnent quatre points : $A(1;5)$, $B(2;10)$, $C(4;20)$ et $D(6;30)$.

Ensemble, ils forment la représentation graphique de la situation. L'abscisse de chaque point est une masse ; son ordonnée est le prix correspondant.

Choisir les unités

Avant de placer les points, on choisit une unité sur chaque axe. Les masses vont de 1 à 6 kg : 1 cm pour 1 kg convient.

Les prix vont jusqu'à 30 dirhams : 1 cm pour 5 dirhams suffit. Les deux axes peuvent avoir des unités différentes.



Les points du marché

Les quatre points semblent rangés sur une même droite, qui passe aussi par l'origine. Est-ce un hasard ?

La section suivante répond à cette question. Pour l'instant, retiens qu'un coup d'œil ne prouve rien.

Vérifie : Que dit ce point ?

Sur le même graphique, on ajoute le point $E(3;15)$. Que signifie-t-il pour les tomates ?

A. 3 kg de tomates coûtent 15 dirhams.

Juste.

Juste : l'abscisse est la masse, l'ordonnée est le prix.

B. 15 kg de tomates coûtent 3 dirhams.

Faux.

Faux : tu as inversé l'abscisse et l'ordonnée.

C. Le kilogramme coûte 3 dirhams.

Faux.

Faux : le kilogramme coûte 5 dirhams. Le nombre 3 est une masse.

D. On paie 18 dirhams en tout.

Faux.

Faux : la somme $3+15$ ne correspond à aucune grandeur de la situation.

Correction

Le point $E(3;15)$ a pour abscisse 3 et pour ordonnée 15 : 3 kg de tomates coûtent 15 dirhams.

Contrôle avec le prix du kilogramme :

$$5\times 3=15$$

À toi

À toi : Les oignons

Au même marché, les oignons coûtent 3 dirhams le kilogramme. Écris les points qui représentent des achats de 2 kg, 5 kg et 8 kg. Quelle unité choisirais-tu sur l'axe des ordonnées ?

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Calcule d'abord le prix de chaque achat.

Indice 2

Le prix de 2 kg vaut 3×2. Fais de même pour 5 kg et 8 kg.

Indice 3

Point délicat : l'abscisse est la masse, l'ordonnée est le prix, dans cet ordre.

Réponse

Prix. On multiplie chaque masse par 3 :

- $3\times 2=6$;
- $3\times 5=15$;

- $3 \times 8 = 24$.

Points. On obtient $(2;6)$, $(5;15)$ et $(8;24)$.

Unité. Les prix vont jusqu'à 24 dirhams : 1 cm pour 3 dirhams convient, par exemple.

À retenir : représenter un tableau

Chaque colonne du tableau donne un point. La première grandeur se lit en abscisse, la seconde en ordonnée. Choisis d'abord une unité adaptée sur chaque axe, puis place les points un par un.

Proportionnalité : des points alignés avec l'origine

Observer deux situations

Reprends les tomates à 5 dirhams le kilogramme. Au même marché, les carottes coûtent 3 dirhams le kilogramme.

Masse (kg)	1	2	4
Tomates (dirhams)	5	10	20
Carottes (dirhams)	3	6	12

Les deux tableaux sont de proportionnalité. On place leurs points dans un même repère, puis on pose une règle. Des points sont **alignés** quand une même règle passe par tous.

Devine : La règle sur les points

Tu poses une règle sur les points des tomates, puis sur ceux des carottes. Que constates-tu ?

A. Chaque série est alignée, mais sa droite ne passe pas par O.
Faux.
Faux : pour 0 kg, on paie 0 dirham. Le point $(0;0)$ prolonge chaque série.

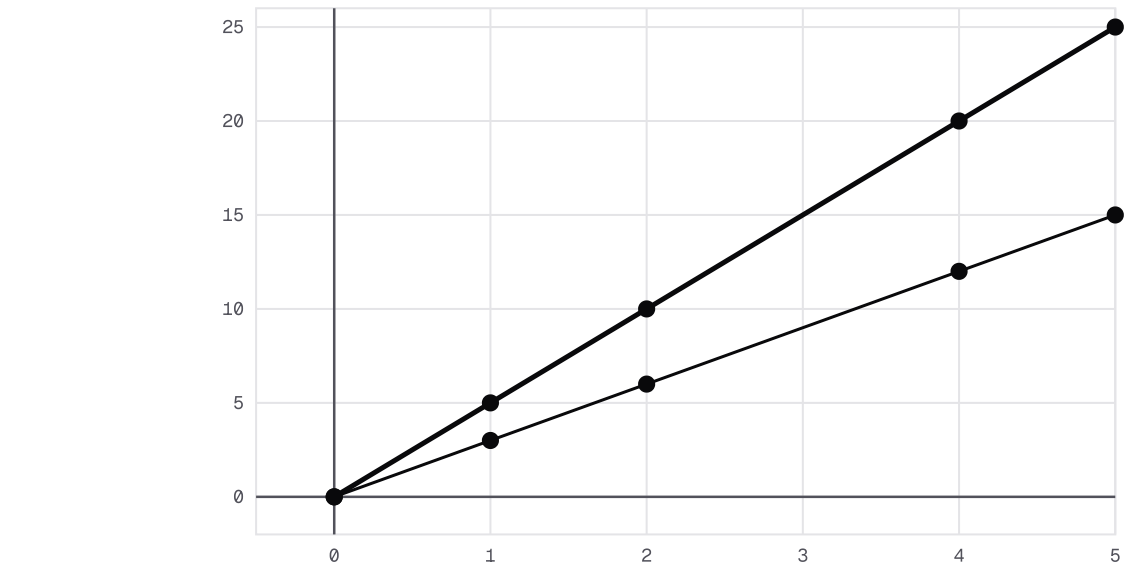
B. Les six points sont sur une seule droite.
Faux.
Faux : pour 1 kg, les tomates sont à la hauteur 5 et les carottes à la hauteur 3.

C. Chaque série est alignée sur une droite qui passe par O.
Juste.
Juste : deux droites différentes, qui passent toutes deux par l'origine.

D. Aucune série n'est alignée.
Faux.
Faux : la règle passe par les trois points de chaque série.

Correction

> Les points des tomates sont alignés sur une droite qui passe par O. Ceux des carottes aussi, sur une autre droite qui passe par O.
>
> La droite des tomates monte plus vite : son coefficient 5 dépasse 3.



Tomates et carottes : deux droites qui passent par l'origine

La propriété

Propriété : Proportionnalité et points alignés avec l'origine

Si la grandeur y est **proportionnelle** à la grandeur x, de coefficient a, c'est-à-dire si $y = a \times x$ pour chaque colonne du tableau, alors les points qui représentent la situation sont **alignés avec l'origine** O du repère : ils sont tous sur une même droite qui passe par O.

Remarque : Une propriété admise

Cette propriété est admise. Tu l'utilises sans la démontrer. Sur un exemple, les quotients égaux montrent que la situation est de proportionnalité ; la règle montre alors l'alignement avec O.

Exemple : contrôler par les quotients

Pour les carottes, les quotients sont égaux :

$$\frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{12}{4} = 3$$

Le prix est proportionnel à la masse, de coefficient 3. La propriété « proportionnalité et points alignés avec l'origine » place donc les points $(1;3)$, $(2;6)$ et $(4;12)$ sur une droite qui passe par O.

Tracer avec un seul point

La droite passe toujours par O. Pour la tracer, il suffit donc d'un seul autre point. Le plus simple est le point d'abscisse 1 : son ordonnée est le coefficient a, car $a \times 1 = a$.

Pour un coefficient $2{,}5$, on trace la droite qui passe par O et par $(1;2{,}5)$.

Méthode : représenter une situation de proportionnalité

1. **Gradue** les deux axes : la première grandeur en abscisse, la seconde en ordonnée. Prends une unité qui fait tenir toutes les valeurs.
2. **Place** chaque colonne du tableau comme un point.
3. **Trace** à la règle la droite qui part de O et passe par l'un de ces points. Le point $(1;a)$ est le plus commode.
4. **Vérifie** qu'un deuxième point du tableau tombe sur ta droite. Sinon, cherche l'erreur de placement.

Vérifie : Le point utile

Une situation de proportionnalité a pour coefficient 4. Avec l'origine O, quel point permet de tracer sa droite ?

A. Le point $(1;4)$
Juste.
Juste : pour $x = 1$, on a $y = 4 \times 1 = 4$.

B. Le point $(4;1)$
Faux.
Faux : pour $x = 4$, on a $y = 4 \times 4 = 16$, pas 1.

C. Le point $(0;4)$
Faux.
Faux : pour $x = 0$, on a $y = 0$. Ce point n'est pas sur la droite.

D. Le point $(4;4)$
Faux.
Faux : $4 \times 4 = 16$, pas 4.

Correction
On place $(1;4)$, car $4 \times 1 = 4$. On trace la droite qui passe par O et par ce point.

> Contrôle avec $x = 3$: comme $4 \times 3 = 12$, le point $(3; 12)$ doit être sur la droite.

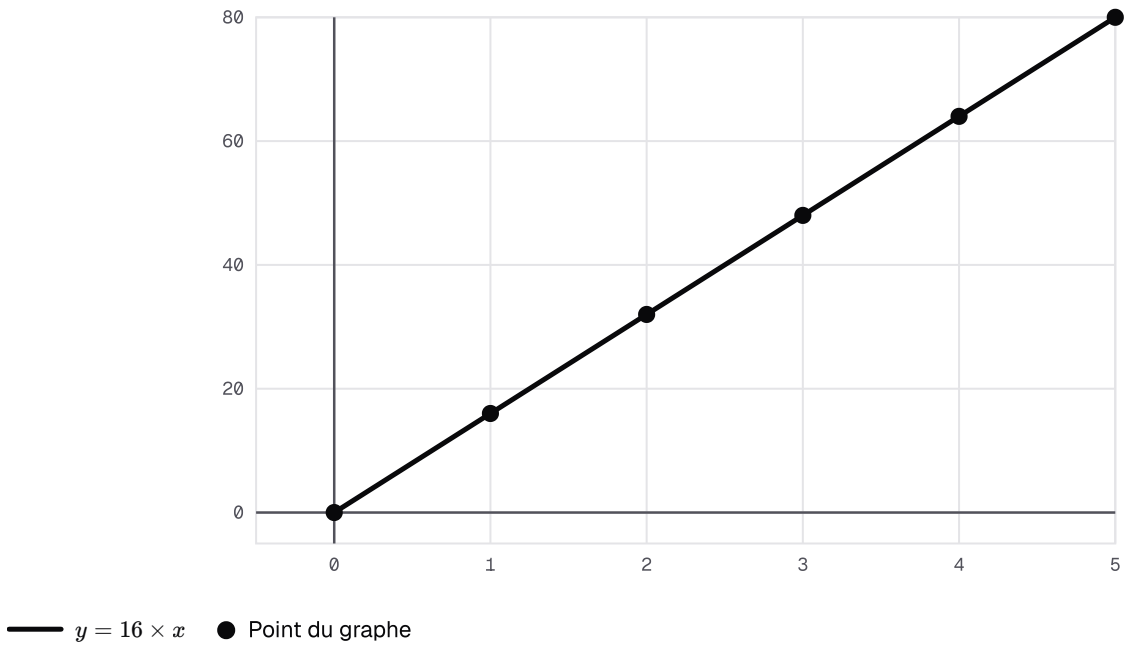
Retour au cycliste

Reviens au tableau de Samir. Les quotients sont égaux :

$$\frac{16}{1} = \frac{32}{2} = \frac{48}{3} = \frac{64}{4} = 16$$

La distance est proportionnelle à la durée, de coefficient 16.

Avec la propriété « proportionnalité et points alignés avec l'origine », tu en déduis : les points de Samir sont sur une droite issue de O. Ta prédiction du début est confirmée.



Le trajet de Samir

À toi

> **À toi : Les bananes**
>
> Au marché, les bananes coûtent 12 dirhams le kilogramme. Explique comment tracer la droite qui représente le prix selon la masse. Le point $(0{,}5; 6)$ est-il sur cette droite ?
>
> Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.
>
> **Indice 1**
> La droite passe par O : il te faut un seul autre point.
> **Indice 2**

Le point d'abscisse 1 a pour ordonnée le coefficient. Pour le point proposé, calcule $12 \times 0{,}5$.

Indice 3

Point délicat : un point est sur la droite seulement si le calcul donne exactement son ordonnée.

Réponse

Tracé. Le prix est proportionnel à la masse, de coefficient 12. On trace la droite qui passe par O et par $(1;12)$.

Le point $(0{,}5;6)$. Pour $x = 0{,}5$, on calcule le prix :

$$12 \times 0{,}5 = 6$$

Conclusion. Le point $(0{,}5;6)$ est sur la droite : un demi-kilogramme de bananes coûte 6 dirhams.

À retenir : proportionnalité et origine

Une situation de proportionnalité se représente par des points alignés avec l'origine. Pour tracer la droite, place O et un seul autre point, par exemple $(1;a)$. Contrôle toujours avec un deuxième point.

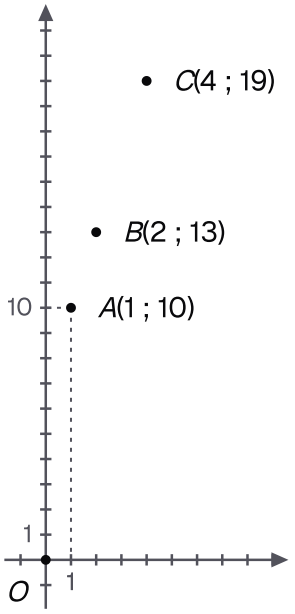
Reconnaître une situation de proportionnalité

Trois séries de points

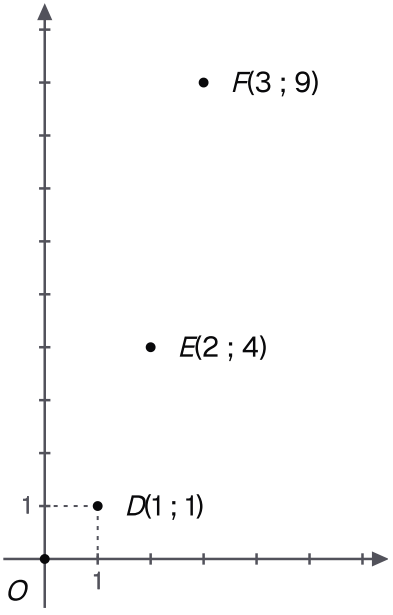
Voici trois séries de points, chacune placée dans un repère d'origine O.

- Série 1 : $(1;10)$, $(2;13)$ et $(4;19)$.
- Série 2 : $(1;1)$, $(2;4)$ et $(3;9)$.
- Série 3 : $(2;7)$, $(4;14)$ et $(6;21)$.

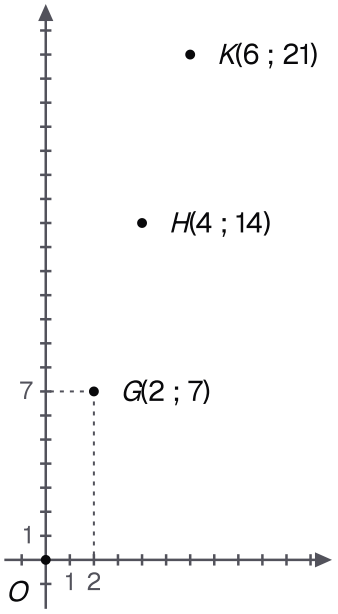
Une seule de ces séries représente une situation de proportionnalité.



Série 1 : les trois points (1 ; 10), (2 ; 13) et (4 ; 19), placés sans aucun trait qui les relie.



Série 2 : les points (1 ; 1), (2 ; 4) et (3 ; 9), seuls dans leur repère.



Série 3 : les points (2 ; 7), (4 ; 14) et (6 ; 21), à examiner avant de répondre.

Devine : Laquelle ?

Laquelle de ces séries représente une situation de proportionnalité ?

A. La série 1

Faux.

Faux : ses points sont alignés, mais leur droite coupe l'axe des ordonnées en $(0; 7)$, pas en O.

B. La série 2

Faux.

Faux : la série semble partir de l'origine, mais ses points ne sont pas alignés.

C. La série 3

Juste.

Juste : ses points sont alignés sur une droite qui passe par O.

D. Aucune des trois

Faux.

Faux : une série remplit les deux conditions.

Correction

C'est la série 3. Ses quotients sont égaux :

$$\frac{7}{2} = \frac{14}{4} = \frac{21}{6}$$

Sur le graphique, ses points sont alignés avec O.

La série 1 est alignée, mais pas avec l'origine. La série 2 n'est pas alignée. La propriété suivante permet de conclure à partir du graphique.

La propriété réciproque

Propriété : Points alignés avec l'origine et proportionnalité

Si les points qui représentent un tableau de valeurs, dont les abscisses sont toutes **non nulles**, sont **alignés avec l'origine** O du repère, alors ce tableau est un tableau de proportionnalité.

De plus, d'après la propriété précédente, si ces points ne sont pas tous sur une même droite passant par O, la situation **n'est pas** une situation de proportionnalité.

Remarque : Une propriété admise

Cette propriété est admise. Tu l'utilises sans la démontrer. Elle s'applique à des points dont l'abscisse n'est pas 0 ; c'est le cas dans tout ce chapitre.

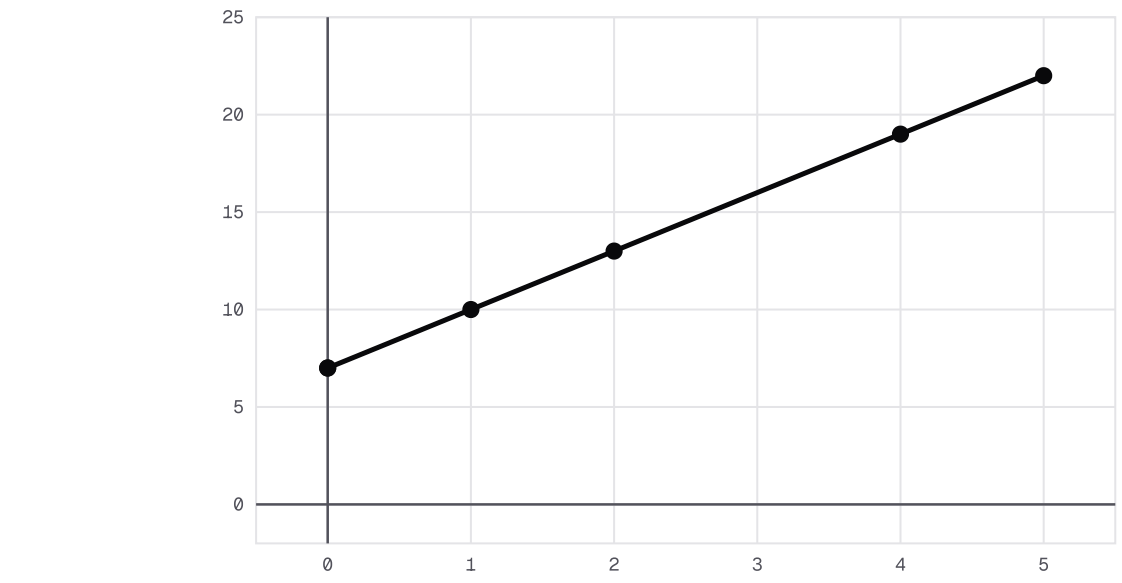
Pour conclure « proportionnelle », il faut deux conditions : des points alignés, et une droite qui passe par O.

Le taxi

Un taxi fait payer 7 dirhams de prise en charge, puis 3 dirhams par kilomètre. La prise en charge est une somme payée dès la montée dans le taxi. Une course de x km coûte $7 + 3 \times x$ dirhams.

Distance (km)	1	2	4
Prix (dirhams)	10	13	19

C'est la série 1 de l'activité.



Le tarif du taxi

Attention : alignés, mais pas avec l'origine

✗ « Les points du taxi sont alignés, donc le prix est proportionnel à la distance. »

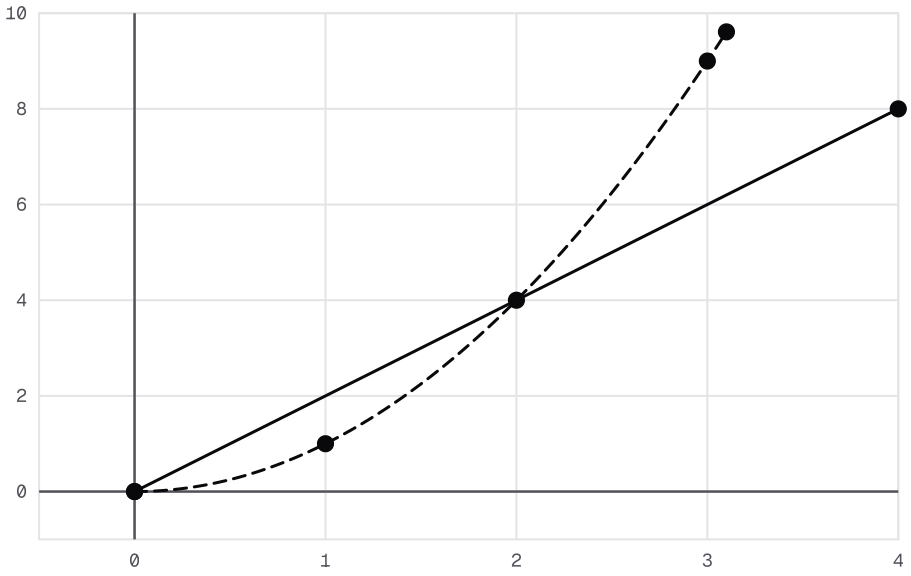
✓ Leur droite ne passe pas par O : pour 0 km, elle donne 7 dirhams, la prise en charge.

Les quotients le confirment : $\frac{10}{1} = 10$, mais $\frac{13}{2} = 6{,}5$. Le prix n'est pas proportionnel à la distance.

L'aire du carré

Un carré de côté c cm a une aire de $c \times c$ centimètres carrés. Pour des côtés de 1, 2 et 3 cm, les aires valent 1, 4 et 9 centimètres carrés. C'est la série 2 de l'activité.

On trace la droite qui passe par O et par le point $(2;4)$. Puis on regarde où sont les deux autres points.



L'aire du carré selon son côté

Attention : passer par l'origine ne suffit pas

✗ « Un carré de côté 0 a une aire nulle : les points partent de O, donc l'aire est proportionnelle au côté. »

✓ Aucune droite ne porte à la fois $(1;1)$, $(2;4)$ et $(3;9)$.

Les quotients diffèrent : $\frac{1}{1} = 1$, $\frac{4}{2} = 2$ et $\frac{9}{3} = 3$. Il n'y a donc pas de proportionnalité entre le côté et l'aire.

Reconnaître : la méthode

Méthode : reconnaître une situation de proportionnalité sur un graphique

1. **Place** les points de la situation, ou lis-les sur le graphique.
2. **Pose** ta règle : tous les points tiennent-ils sur une seule droite ? Et celle-ci passe-t-elle par O ?
3. **Conclus** avec la raison : deux « oui » donnent une situation de proportionnalité. Un seul « non » suffit pour dire qu'elle ne l'est pas.
4. **Confirme** par le calcul : les quotients $\frac{y}{x}$ sont égaux pour une situation de proportionnalité, et différents sinon.

Exemple : confirmer la série 3

Le graphique de la série 3 montre trois points alignés avec O. On confirme : $\frac{7}{2} = 3{,}5$, $\frac{14}{4} = 3{,}5$ et $\frac{21}{6} = 3{,}5$.

Les produits en croix aussi : $7 \times 4 = 28$ et $2 \times 14 = 28$. La situation est de proportionnalité, de coefficient $3{,}5$.

À toi

Trouve l'erreur : Une conclusion à vérifier

Nadia place les points $(1;4)$, $(2;6)$ et $(3;8)$. Elle écrit : « Les points sont alignés, donc c'est une situation de proportionnalité. » Que penses-tu de sa conclusion ?

A. Elle a raison : des points alignés suffisent.

Faux.

Faux : l'alignement ne suffit pas, la droite doit aussi passer par O.

B. Elle se trompe : les points ne sont pas alignés.

Faux.

Faux : de point en point, on avance de 1 et on monte de 2. Les points sont alignés.

C. On ne peut rien dire sans un tableau plus long.

Faux.

Faux : trois points suffisent ici pour conclure.

D. Elle se trompe : leur droite ne passe pas par O.

Juste.

Juste : la droite passe par $(0;2)$. Et $\frac{4}{1} \neq \frac{6}{2}$.

Correction

Les points sont alignés : à chaque pas, on avance de 1 et on monte de 2.

En reculant d'un pas depuis $(1;4)$, on arrive en $(0;2)$, pas en O. La situation n'est donc pas de proportionnalité.

Les quotients le confirment : $\frac{4}{1} = 4$ et $\frac{6}{2} = 3$.

À toi : Un tableau à juger

Un tableau donne, pour $x = 2$, 5 et 8, les valeurs $y = 3$, $7{,}5$ et 12. Ses points sont-ils alignés avec l'origine ? Justifie par le calcul.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Compare les quotients $\frac{y}{x}$ des trois colonnes.

Indice 2
Calcule $\frac{3}{2}$, $\frac{7{,}5}{5}$ et $\frac{12}{8}$.
Indice 3
Point délicat : ici, on va du tableau vers le graphique ; c'est la propriété « proportionnalité et points alignés avec l'origine » qui sert.

Réponse
Quotients. Ils valent $\frac{3}{2} = 1{,}5$, $\frac{7{,}5}{5} = 1{,}5$ et $\frac{12}{8} = 1{,}5$. Le tableau est donc de proportionnalité, de coefficient $1{,}5$.

Conclusion. La propriété « proportionnalité et points alignés avec l'origine » s'applique : les points du tableau sont sur une droite qui passe par O.

Lire le coefficient et des valeurs sur la droite

Le point d'abscisse 1

Au marché, une affiche représente le prix des fraises selon la masse. C'est une droite qui passe par O et par le point $P(4;30)$: 4 kg coûtent 30 dirhams. Le prix est donc proportionnel à la masse.

Combien coûte un seul kilogramme ?

Devine : Le prix d'un kilogramme

D'après l'affiche, combien coûte un kilogramme de fraises ?

A. 4 dirhams
Faux.
Faux : 4 est une masse, l'abscisse du point P.

B. 26 dirhams
Faux.
Faux : la différence $30 - 4$ mélange un prix et une masse.

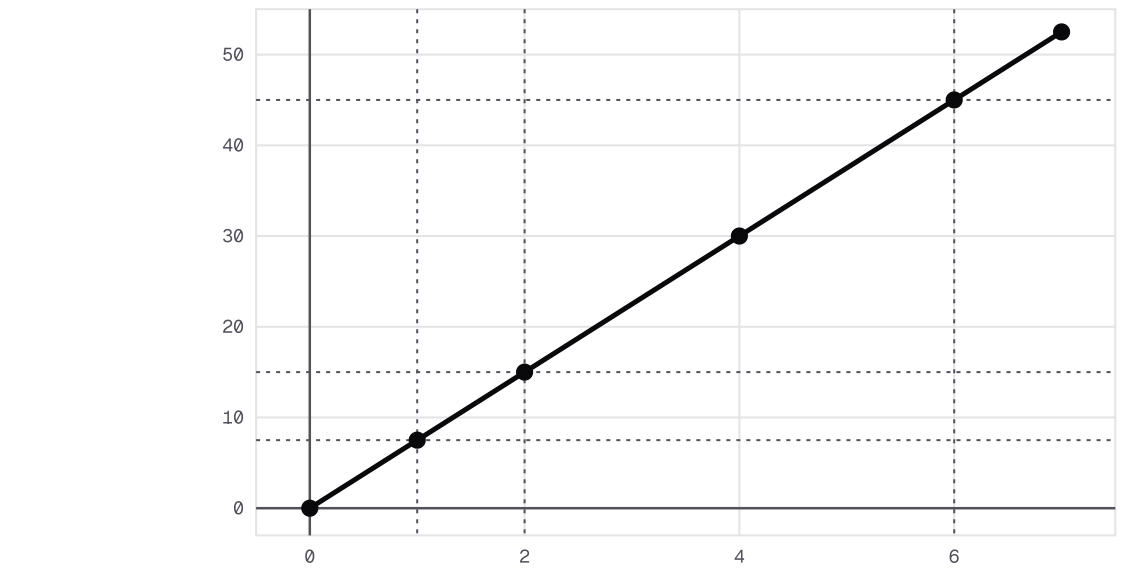
C. 30 dirhams
Faux.
Faux : 30 dirhams est le prix de 4 kg, pas d'un seul.

D. $7{,}5$ dirhams
Juste.
Juste : $30 \div 4 = 7{,}5$.

Correction
Le prix d'un kilogramme se lit sur la droite, à l'abscisse 1. Par le calcul :

$$30 \div 4 = 7{,}5$$

> Un kilogramme coûte $7{,}5$ dirhams : c'est le coefficient a.



Lire sur la droite des fraises

Sur le graphique, les pointillés partent de l'abscisse 1. Ils montent jusqu'à la droite, puis vont vers l'axe des ordonnées. On lit environ $7{,}5$.

Le calcul $30 \div 4 = 7{,}5$ confirme cette lecture. Le coefficient est l'ordonnée du point d'abscisse 1.

Lire dans les deux sens

Méthode : lire sur la droite d'une situation de proportionnalité

1. **Le coefficient** : repère le point de la droite qui a pour abscisse 1 ; son ordonnée est le coefficient. Tu peux aussi diviser l'ordonnée d'un point bien placé par son abscisse.
2. **Une valeur de y** : pars de l'abscisse connue, monte jusqu'à la droite, puis lis l'ordonnée sur l'axe vertical.
3. **Une valeur de x** : pars de l'ordonnée connue, avance horizontalement jusqu'à la droite, puis descends lire l'abscisse.
4. **Contrôle** chaque lecture, qui est approchée, par le calcul $y = a \times x$.

Exemple : deux lectures contrôlées

- **De la masse au prix.** Pour 2 kg, on lit un prix d'environ 15 dirhams. Contrôle : $7{,}5 \times 2 = 15$.

- **Du prix à la masse.** Pour 45 dirhams, on lit une masse d'environ 6 kg. Contrôle : $45 \div 7{,}5 = 6$.

Vérifie : Dans quel sens lire ?

Avec 60 dirhams, quelle masse de fraises peut-on acheter ? Comment le trouver sur un graphique assez grand ?

A. Partir de 60 sur l'axe des abscisses et monter jusqu'à la droite.

Faux.

Faux : 60 est un prix, il se place sur l'axe des ordonnées.

B. Partir de 60 sur l'axe des ordonnées et aller horizontalement jusqu'à la droite.

Juste.

Juste : on lit ensuite l'abscisse, qui est la masse.

C. Calculer $60 \times 7{,}5$ et lire ce nombre en abscisse.

Faux.

Faux : $60 \times 7{,}5 = 450$ n'est pas une masse. Pour passer du prix à la masse, on divise.

D. Tracer la droite qui passe par O et par le point $(60; 0)$.

Faux.

Faux : ce point est sur l'axe des abscisses. Il ne sert pas ici.

Correction

Le prix 60 se place sur l'axe des ordonnées. On va horizontalement jusqu'à la droite, puis on lit l'abscisse : environ 8 kg.

Contrôle par le calcul :

$$60 \div 7{,}5 = 8$$

Avec 60 dirhams, on peut acheter 8 kg de fraises.

Une lecture est approchée

Attention : une lecture graphique est approchée

✗ « Sur le graphique, $3{,}5$ kg de fraises coûtent 26 dirhams. »

✓ La lecture dépend du trait et de l'œil : écris « environ 26 dirhams », ou ≈ 26. Puis contrôle : $7{,}5 \times 3{,}5 = 26{,}25$. Le prix exact est $26{,}25$ dirhams.

Un point qui semble sur la droite ne le prouve pas : c'est le calcul qui décide.

Vérifie : Contrôler une lecture

Hiba lit sur l'affiche que 5 kg de fraises coûtent environ 38 dirhams. Sa lecture est-elle acceptable ? Quel est le prix exact ?

Indice 1
Une lecture se contrôle par le calcul $y = a \times x$, avec $a = 7{,}5$.
Indice 2
Calcule $7{,}5 \times 5$, puis compare avec 38.

Réponse
Le calcul donne le prix exact :

$$7{,}5 \times 5 = 37{,}5$$

Les 5 kg coûtent donc $37{,}5$ dirhams.

La lecture « environ 38 dirhams » est une bonne valeur approchée : l'écart n'est que de $0{,}5$ dirham.

Remarque : Coin devoir : rédiger une lecture graphique

En devoir, une lecture se rédige en deux temps. Par exemple :

« Par lecture graphique, 6 kg de fraises coûtent environ 45 dirhams. Contrôle par le calcul : $7{,}5 \times 6 = 45$. »

La phrase dit que la valeur est lue, puis le calcul la confirme.

À toi

À toi : Une autre droite

Une droite passe par O et par le point $Q(5; 12)$. Trouve son coefficient. Donne ensuite y pour $x = 2{,}5$, puis x pour $y = 18$.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Le coefficient est le quotient de l'ordonnée de Q par son abscisse.
Indice 2
Calcule $12 \div 5$, puis utilise $y = a \times x$.
Indice 3
Point délicat : pour trouver x à partir de y, divise par le coefficient.

Réponse
Coefficient. On divise l'ordonnée de Q par son abscisse :

$$a = 12 \div 5 = 2{,}4$$

Valeur de y pour $x = 2{,}5$. On multiplie par le coefficient :

$$y = 2{,}4 \times 2{,}5 = 6$$

Valeur de x pour $y = 18$. On divise par le coefficient :

$$x = 18 \div 2{,}4 = 7{,}5$$

Sur un graphique, tu lirais des valeurs proches, puis tu les contrôlerais ainsi.

À retenir : lire puis contrôler

Le coefficient est l'ordonnée du point d'abscisse 1. Une valeur lue sur un graphique est toujours approchée : écris « environ » ou $\approx$. Contrôle-la ensuite par le calcul avec le coefficient.

Comparer deux situations sur un même graphique

Deux droites, un même repère

Deux magasins vendent des olives. Au magasin A, 3 kg coûtent 96 dirhams. Au magasin B, 2 kg coûtent 50 dirhams.

Dans chaque magasin, le prix est proportionnel à la masse. On trace les deux droites dans le même repère, avec les mêmes unités.

Devine : Quel magasin ?

Pour une même masse d'olives, quel magasin est le moins cher ?

A. Le magasin B
Juste.
Juste : 1 kg y coûte 25 dirhams, contre 32 dirhams au magasin A.

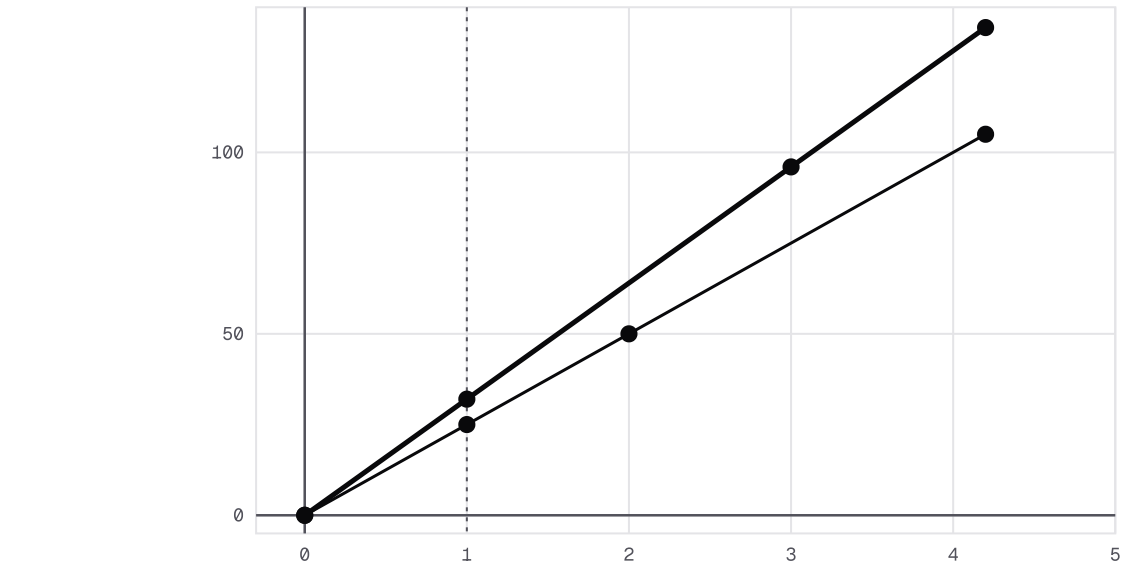
B. Le magasin A
Faux.
Faux : 96 dépasse 50, mais pour 3 kg contre 2 kg. Il faut comparer à masse égale.

C. Les deux, au même prix
Faux.
Faux : les prix d'un kilogramme diffèrent.

D. Cela dépend de la masse
Faux.
Faux : pour toute masse positive, le même magasin reste le moins cher.

Correction
Au magasin A, 1 kg coûte $96 \div 3 = 32$ dirhams. Au magasin B, 1 kg coûte $50 \div 2 = 25$ dirhams.

> Pour toute masse positive, le magasin B est donc le moins cher : sa droite est en dessous de celle de A.



Les olives des magasins A et B

Méthode : comparer deux situations de proportionnalité

1. **Dessine** les deux situations dans un seul repère : mêmes axes, mêmes graduations.
2. **Fixe** une abscisse positive commune, par exemple 1, et relève l'ordonnée de chaque droite.
3. **Compare** : pour $x > 0$, la droite placée plus haut correspond au coefficient le plus grand.
4. **Interprète** la réponse avec les mots de la situation : le magasin le plus cher, le véhicule le plus rapide.

Lire et conclure

Exemple : les olives à masse égale

Pour $x = 1$, on lit environ 32 sur la droite A et environ 25 sur la droite B. Les calculs confirment : $96 \div 3 = 32$ et $50 \div 2 = 25$.

Pour 4 kg, A demande $32 \times 4 = 128$ dirhams et B demande $25 \times 4 = 100$ dirhams. Le magasin B fait économiser 28 dirhams.

Vérifie : Une différence de prix

On achète $2{,}5$ kg d'olives. Combien économise-t-on au magasin B plutôt qu'au magasin A ?

A. 7 dirhams

Faux.

Faux : 7 dirhams est l'écart pour 1 kg seulement.

B. $17{,}5$ dirhams

Juste.

Juste : $80 - 62{,}5 = 17{,}5$.

C. 30 dirhams

Faux.

Faux : recalcule les deux prix, $32 \times 2{,}5$ et $25 \times 2{,}5$.

D. $62{,}5$ dirhams

Faux.

Faux : c'est le prix au magasin B, pas l'économie.

Correction

Prix au magasin A. $32 \times 2{,}5 = 80$ dirhams.

Prix au magasin B. $25 \times 2{,}5 = 62{,}5$ dirhams.

Économie. On soustrait les deux prix :

$$80 - 62{,}5 = 17{,}5$$

On peut aussi écrire $7 \times 2{,}5 = 17{,}5$: l'écart est proportionnel à la masse.

À toi

À toi : Un troisième magasin

Au magasin C, 5 kg d'olives coûtent 140 dirhams. Où se place la droite de C par rapport à celles de A et de B ? Justifie.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Calcule le prix d'un kilogramme au magasin C.

Indice 2

Divise 140 par 5, puis compare le résultat à 32 et à 25.

Indice 3

Point délicat : la comparaison vaut pour les abscisses positives.

Réponse

Au magasin C, 1 kg coûte $140 \div 5 = 28$ dirhams. On range les trois coefficients :

$$25 < 28 < 32$$

Conclusion. Pour les abscisses positives, la droite de C est entre celle de B, en dessous, et celle de A, au-dessus.

À retenir : comparer sur un graphique

Pour comparer deux situations de proportionnalité, lis les deux droites à une même abscisse positive. Celle qui passe au-dessus de l'autre correspond au coefficient le plus grand. Contrôle ta conclusion par le calcul des deux coefficients.

Vitesse moyenne, échelles, pourcentages

La vitesse moyenne d'un train

Rappel de 1re année : à allure régulière, la distance parcourue est proportionnelle à la durée. Le coefficient est la **vitesse moyenne** : la distance divisée par la durée.

Un train relie deux villes distantes de 120 km en 1 h 30 min. On cherche sa vitesse moyenne en kilomètres par heure.

Vérifie : Une durée en heures

Pour calculer une vitesse en kilomètres par heure, comment écrire 1 h 30 min en heures ?

A. $1{,}30$ h

Faux.

Faux : une heure compte 60 minutes, pas 100. Donc 30 minutes ne font pas $0{,}30$ heure.

B. $1{,}3$ h

Faux.

Faux : c'est le même nombre que $1{,}30$. Or 30 minutes valent la moitié d'une heure.

C. 90 h

Faux.

Faux : 90 est la durée en minutes, pas en heures.

D. $1{,}5$ h

Juste.

Juste : 30 minutes font une demi-heure, soit $0{,}5$ h.

Correction

Une heure compte 60 minutes. Donc 30 minutes valent $\dfrac{30}{60} = 0{,}5$ heure.

Ainsi, 1 h 30 min s'écrivent $1{,}5$ h. On peut maintenant diviser la distance par cette durée.

Exemple : la vitesse et le tableau du train

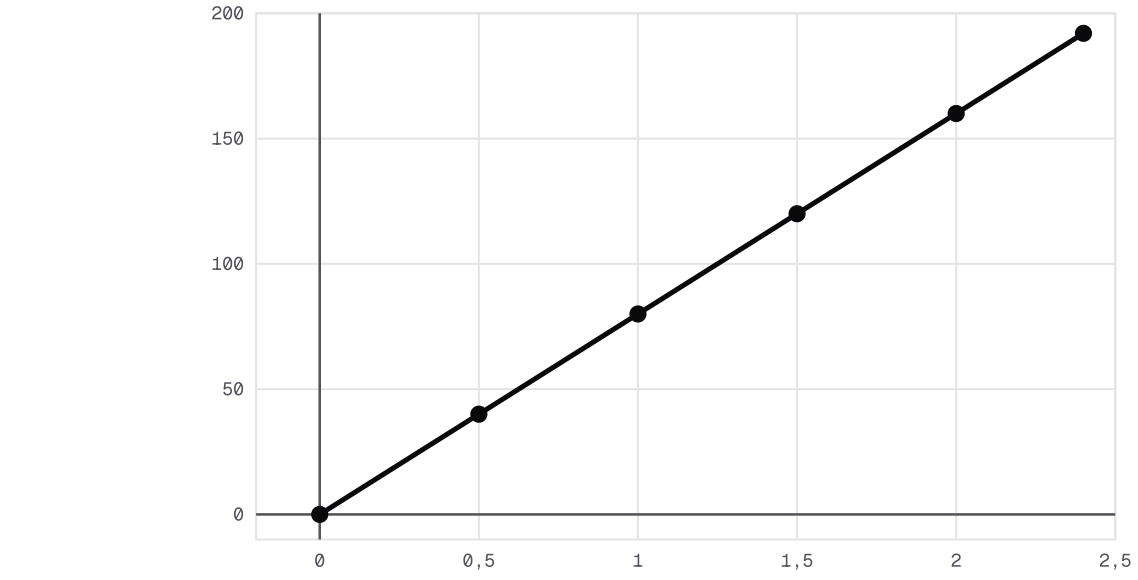
La vitesse moyenne, en kilomètres par heure, vaut :

$$120 \div 1{,}5 = 80$$

À cette allure, la distance est proportionnelle à la durée, de coefficient 80.

Durée (h)	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2
Distance (km)	40	80	120	160

Les quotients valent tous 80. Par exemple, $\dfrac{40}{0{,}5} = 80$.



Le trajet du train

Attention : des unités cohérentes avant de calculer

✗ « 40 minutes, c'est $0{,}40$ heure. »

✓ Une heure compte 60 minutes : 40 minutes valent $\dfrac{40}{60} = \dfrac{2}{3}$ d'heure. Convertis toujours la durée avant de calculer une vitesse en kilomètres par heure.

De même, pour une échelle, écris les deux distances dans la même unité.

Une carte de randonnée

Une carte de randonnée porte l'échelle $\frac{1}{25\,000}$. Rappel de 1re année : l'échelle est le quotient de la longueur sur la carte par la longueur réelle, dans la même unité. Ici, 1 cm sur la carte représente $25\,000$ cm dans la réalité.

Pour passer de la carte à la réalité, on multiplie donc la longueur sur la carte par $25\,000$. Sur la carte, un sentier mesure 6 cm.

Vérifie : La longueur du sentier

Quelle est la longueur réelle de ce sentier de 6 cm sur la carte ?

A. $1{,}5$ km

Juste.

Juste : $150\,000$ cm font $1{,}5$ km.

B. 150 km

Faux.

Faux : $150\,000$ cm font $1\,500$ m, soit $1{,}5$ km, pas 150 km.

C. 15 km

Faux.

Faux : revois la conversion des centimètres en kilomètres.

D. $0{,}15$ km

Faux.

Faux : $0{,}15$ km font 150 m, dix fois moins que la vraie longueur.

Correction

La longueur réelle vaut, en centimètres :

$$6 \times 25\,000 = 150\,000$$

Or 1 km vaut $100\,000$ cm. Le sentier mesure donc $150\,000 \div 100\,000 = 1{,}5$ km.

Exemple : de la réalité à la carte

Une randonnée de 4 km se trace sur la même carte. On convertit d'abord : 4 km valent $400\,000$ cm.

Pour passer de la réalité à la carte, on divise par $25\,000$:

$$400\,000 \div 25\,000 = 16$$

Le tracé mesure 16 cm sur la carte.

Une réduction de prix

Rappel de 1re année : prendre « t pour cent » d'une quantité, c'est la multiplier par $\frac{t}{100}$. Un magasin fait une réduction de 30 pour cent sur tous ses vêtements. La réduction est proportionnelle au prix, de coefficient $\frac{30}{100} = 0{,}3$.

Prix (dirhams)	50	100	200
Réduction (dirhams)	15	30	60

À toi : Le prix d'une veste

Une veste coûte 240 dirhams avant la réduction de 30 pour cent. Combien coûte-t-elle après ?

A. 210 dirhams

Faux.

Faux : tu as retiré 30 dirhams. Or la réduction vaut 30 pour cent du prix.

B. 72 dirhams

Faux.

Faux : 72 dirhams est le montant de la réduction, pas le nouveau prix.

C. 168 dirhams

Juste.

Juste : $240 - 72 = 168$.

D. 312 dirhams

Faux.

Faux : une réduction fait baisser le prix. Tu as ajouté 72.

Correction

Réduction. $0{,}3 \times 240 = 72$ dirhams.

Nouveau prix. $240 - 72 = 168$ dirhams.

Contrôle. Après la réduction, il reste 70 pour cent du prix : $0{,}7 \times 240 = 168$.

Attention : un pourcentage multiplie, il ne s'ajoute pas

✗ « Une hausse de 25 pour cent sur 80 dirhams donne $80 + 25 = 105$ dirhams. »

✓ Le pourcentage est un coefficient : la hausse vaut $\frac{25}{100} \times 80 = 20$ dirhams. Le nouveau prix vaut donc 100 dirhams.

Le même pourcentage donne une hausse plus grande sur un prix plus élevé.

Résoudre un problème

Méthode : résoudre un problème de proportionnalité

1. **Nomme** les deux grandeurs et justifie qu'elles sont proportionnelles : un tableau, un graphique ou l'énoncé le dit.
2. **Convertis** : une durée en heures pour une vitesse en km/h ; les deux longueurs d'une échelle dans la même unité.
3. **Trouve** le coefficient : la distance divisée par la durée pour une vitesse, $\frac{t}{100}$ pour « t pour cent de ». Pour une échelle $\frac{1}{n}$, la longueur réelle vaut n fois la longueur sur la carte : multiplie par n de la carte à la réalité, divise par n dans l'autre sens.
4. **Calcule** la valeur cherchée : multiplie ou divise par le coefficient. Réponds par une phrase avec l'unité.

À toi : Le même train, plus longtemps

Le train roule 2 h 15 min à la vitesse moyenne de 80 km/h. Quelle distance parcourt-il ?

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
La distance est proportionnelle à la durée, de coefficient 80.
Indice 2
Écris d'abord la durée en heures, puis multiplie par 80.
Indice 3
Point délicat : 15 minutes valent un quart d'heure, soit $0{,}25$ h, et non $0{,}15$ h.

Réponse
Durée en heures. 15 minutes valent $\frac{15}{60} = 0{,}25$ h. La durée vaut donc $2{,}25$ h.

Distance. On multiplie la vitesse moyenne par la durée :

$$80 \times 2{,}25 = 180$$

Conclusion. Le train parcourt 180 km.

Remarque : Coin devoir : rédiger un problème d'échelle

En devoir, la réponse à un problème est une phrase avec l'unité. Par exemple :

« L'échelle vaut $\frac{1}{25\,000}$: pour passer de la carte à la réalité, on multiplie par $25\,000$. Pour 10 cm sur la carte : $10 \times 25\,000 = 250\,000$ cm, soit $2{,}5$ km. Le chemin mesure $2{,}5$ km. »

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir : quel outil pour quelle question

- **Représenter un tableau** : une colonne donne un point, x en abscisse et y en ordonnée.
- **Reconnaître la proportionnalité** : des points alignés, et une droite qui passe par O. Confirme par les quotients.
- **Tracer** : l'origine et un seul autre point, par exemple $(1; a)$.
- **Lire** : le coefficient au point d'abscisse 1. Chaque lecture est approchée, puis contrôlée par le calcul.
- **Comparer** : pour $x > 0$, la droite du dessus a le coefficient le plus grand.
- **Résoudre** : des unités cohérentes, le coefficient, puis une phrase avec l'unité.

Le mot du prof. Un graphique te donne une idée rapide d'une situation. Il ne remplace jamais le calcul. Lis, écris « environ », puis contrôle : ce réflexe te servira en sciences, en géographie et dans la vie de tous les jours.

Vérifie : Un dernier tri

Une situation donne les points $(2; 5)$, $(4; 10)$ et $(6; 16)$. Que conclus-tu ?

A. Proportionnalité, de coefficient $2{,}5$.

Faux.

Faux : $2{,}5 \times 6 = 15$, pas 16.

B. Ce n'est pas de la proportionnalité.

Juste.

Juste : $\dfrac{5}{2} = \dfrac{10}{4}$, mais $\dfrac{16}{6} \neq \dfrac{5}{2}$.

C. Points alignés, mais pas avec O.

Faux.

Faux : de $(2; 5)$ à $(4; 10)$, on monte de 5 ; de $(4; 10)$ à $(6; 16)$, on monte de 6.

D. On ne peut pas conclure.

Faux.

Faux : le calcul des quotients suffit.

Correction

Les quotients valent $\dfrac{5}{2} = 2{,}5$, $\dfrac{10}{4} = 2{,}5$ et $\dfrac{16}{6} \approx 2{,}67$. Ils ne sont pas tous égaux : ce n'est pas une situation de proportionnalité.

> Les abscisses étant non nulles, la propriété « points alignés avec l'origine et proportionnalité » permet de conclure : ces points ne sont pas alignés avec O.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « La proportionnalité » (2ac · general · mathematiques)