BURHAN

Résumé : Ordre et opérations

2ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/ordre-et-operations/resume

Chapitre	Semestre
Ordre et opérations	Semestre 2

Comparer deux nombres

Définition : Comparer deux nombres

Soit a et b deux nombres rationnels.

- Dire que a est **strictement inférieur** à b, et écrire $a < b$, signifie que la différence $a - b$ est **strictement négative**.
- Dire que a est **inférieur ou égal** à b, et écrire $a \leq b$, signifie que la différence $a - b$ est **négative ou nulle**.

On écrit aussi $b > a$ à la place de $a < b$, et $b \geq a$ à la place de $a \leq b$.

Pour comparer a et b, on cherche donc le signe de $a - b$:

- si $a - b > 0$, alors $a > b$;
- si $a - b = 0$, alors $a = b$;
- si $a - b < 0$, alors $a < b$.

Méthode : Comparer deux nombres par le signe de leur différence

1. **Différence** : calcule $a - b$.
2. **Signe** : regarde si ce résultat est strictement positif, nul ou strictement négatif.
3. **Phrase de réponse** : $a - b > 0$ donne $a > b$; $a - b = 0$ donne $a = b$; $a - b < 0$ donne $a < b$.

Exemple

Compare $\frac{4}{5}$ et $0{,}78$. On calcule la différence :

$$\begin{aligned} \frac{4}{5} - 0{,}78 &= 0{,}8 - 0{,}78 \\ &= 0{,}02 \end{aligned}$$

Cette différence est strictement positive. Donc $\frac{4}{5} > 0{,}78$.

Attention : comparer deux nombres négatifs

De deux nombres négatifs, celui qui est le plus loin de zéro est le plus petit.

Ainsi $-9 < -2$, car $-9 - (-2) = -7$ et ce résultat est strictement négatif.

On a $9 > 2$, mais $-9 < -2$: le signe compte.

Propriété : Comparer en passant par un troisième nombre

Soit a, b et c trois nombres rationnels.

Si $a < b$ et $b < c$, alors $a < c$.

La propriété reste vraie lorsqu'on remplace partout $<$ par $\leq$.

Exemple

On sait que $-\frac{5}{3} < 0$ et que $0 < 0{,}4$. Avec la propriété du troisième nombre, on conclut : $-\frac{5}{3} < 0{,}4$.

Méthode : Comparer en passant par un nombre intermédiaire

1. **Repère** : trouve un nombre simple, souvent 0 ou 1, qui se place entre les deux.
2. **Deux comparaisons** : compare chacun des deux nombres à ce repère.
3. **Réponse** : utilise la propriété du troisième nombre.

Exemple

Compare $\frac{8}{9}$ et $\frac{13}{11}$.

- On a $8 < 9$, donc $\frac{8}{9} < \frac{9}{9}$, c'est-à-dire $\frac{8}{9} < 1$.
- On a $13 > 11$, donc $\frac{13}{11} > \frac{11}{11}$, c'est-à-dire $\frac{13}{11} > 1$.

Le nombre 1 est entre les deux. Donc $\frac{8}{9} < \frac{13}{11}$.

Comparer des écritures fractionnaires

Propriété : Écritures fractionnaires de même dénominateur

Soit a et b deux nombres rationnels, et d un nombre **strictement positif**.

Si $a < b$, alors $\frac{a}{d} < \frac{b}{d}$.

Deux écritures fractionnaires qui ont le **même dénominateur strictement positif** sont rangées dans le même ordre que leurs numérateurs. La propriété reste vraie avec $\leq$.

Exemple

Compare $\frac{-11}{6}$ et $\frac{-7}{6}$.

Les dénominateurs sont égaux et strictement positifs. Or $-11 < -7$. Donc $\frac{-11}{6} < \frac{-7}{6}$.

Attention : oublier un dénominateur négatif

Avec un dénominateur négatif, ranger les numérateurs ne suffit pas.

Ainsi $\frac{2}{-5} = \frac{-2}{5}$ et $\frac{4}{-5} = \frac{-4}{5}$. On a $2 < 4$, mais $\frac{2}{-5} > \frac{4}{-5}$, car $-2 > -4$.

Commence donc par réécrire chaque fraction avec un dénominateur strictement positif.

Méthode : Comparer deux écritures fractionnaires

1. **Dénominateurs** : rends chaque dénominateur strictement positif, par exemple $\frac{3}{-4} = \frac{-3}{4}$.
2. **Dénominateur commun** : transforme les deux fractions pour qu'elles aient le même.
3. **Numérateurs** : range-les ; les fractions se rangent dans le même ordre.
4. **Réponse** : écris la conclusion avec les fractions de l'énoncé.

Exemple

Compare $\frac{5}{12}$ et $\frac{7}{18}$. On réduit au dénominateur 36 :

$$\frac{5}{12} = \frac{5 \times 3}{12 \times 3} = \frac{15}{36}$$
$$\frac{7}{18} = \frac{7 \times 2}{18 \times 2} = \frac{14}{36}$$

Le dénominateur 36 est strictement positif et $15 > 14$. Donc $\frac{5}{12} > \frac{7}{18}$.

Attention : comparer seulement les numérateurs

Ranger les numérateurs ne marche que pour deux dénominateurs égaux, strictement positifs.

Ainsi $2 < 3$, mais $\frac{2}{3} > \frac{3}{5}$. En effet, $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$ et $\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$.

Méthode : Comparer deux quotients à la calculatrice

1. **Affichage** : à la calculatrice, arrondis les deux quotients au même rang, par exemple tous les deux au millième.

2. **Lecture** : compare les chiffres de gauche à droite.
3. **Décision** : conclus seulement si les deux affichages ne sont pas les mêmes.
4. **Secours** : sinon, compare les valeurs exactes, par la différence ou avec un dénominateur commun.

Exemple

Compare $\frac{8}{11}$ et $\frac{13}{18}$.

Une fois arrondis au millième, les affichages sont $\frac{8}{11} \approx 0{,}727$ et $\frac{13}{18} \approx 0{,}722$.

Ils sont différents : $0{,}727 > 0{,}722$. Donc $\frac{8}{11} > \frac{13}{18}$.

Attention : une valeur approchée trop courte

Un arrondi peut cacher une différence. Une fois arrondis au centième, $\frac{2}{3}$ et $0{,}67$ s'affichent tous les deux $0{,}67$.

Pourtant $\frac{2}{3} < 0{,}67$, car $\frac{2}{3} = \frac{200}{300}$ et $0{,}67 = \frac{201}{300}$, avec $200 < 201$.

Quand les affichages coïncident, reviens aux valeurs exactes.

Ordre et addition

Propriété : Ordre et addition

Soit a, b et c trois nombres rationnels.

Si $a < b$, alors $a + c < b + c$ et $a - c < b - c$.

On peut **ajouter** ou **retrancher** un même nombre aux deux membres d'une inégalité : le sens de l'inégalité ne change pas. La propriété reste vraie avec $\leq$.

Exemple

Les **membres** d'une inégalité sont ses deux côtés. On sait que $x < 6{,}5$.

- On ajoute 2 aux deux membres (ordre et addition) : $x + 2 < 8{,}5$.
- On retranche 4 aux deux membres (ordre et addition) : $x - 4 < 2{,}5$.

Méthode : Obtenir une inégalité par addition ou soustraction

1. **Nombre choisi** : cherche ce qu'il faut ajouter ou retrancher à chaque membre.
2. **Nouvelle inégalité** : écris-la en gardant le même symbole.

3. **Justification** : précise « ordre et addition ».

Propriété : Additionner deux inégalités membre à membre

Soit a, b, c et d quatre nombres rationnels.

Si $a < b$ et $c < d$, alors $a + c < b + d$.

Deux inégalités **de même sens** s'additionnent membre à membre. La propriété reste vraie avec $\leq$.

Exemple

La première partie d'une randonnée mesure a kilomètres, avec $a < 3{,}2$. La seconde mesure b kilomètres, avec $b < 4{,}5$.

Ces deux inégalités sont de même sens : on peut les ajouter membre à membre. On obtient $a + b < 7{,}7$.

La randonnée mesure donc moins de $7{,}7$ kilomètres.

Attention : soustraire deux inégalités membre à membre

On a le droit d'additionner deux inégalités de même sens. Les soustraire membre à membre est une faute.

Exemple : $6 < 9$ et $2 < 8$. Or $6 - 2 = 4$ et $9 - 8 = 1$, avec $4 > 1$.

Les deux inégalités de départ vont dans le même sens, mais le résultat va dans le sens contraire : on ne soustrait pas.

Ordre et multiplication

Propriété : Ordre et multiplication par un nombre strictement positif

Soit a et b deux nombres rationnels, et c un nombre **strictement positif**.

Si $a < b$, alors $a \times c < b \times c$ et $\dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$.

On peut **multiplier** ou **diviser** les deux membres d'une inégalité par un même nombre **strictement positif** : le sens de l'inégalité ne change pas. La propriété reste vraie avec $\leq$.

Exemple

On sait que $t < 15$.

- On multiplie les deux membres par 4, qui est strictement positif (ordre et multiplication) : $4 \times t < 4 \times 15$, soit $4t < 60$.

- On divise les deux membres par 5, qui est strictement positif (ordre et multiplication) : $\frac{t}{5} < \frac{15}{5}$, soit $\frac{t}{5} < 3$.

Méthode : Obtenir une inégalité par multiplication ou division

1. **Facteur** : repère le nombre qui multiplie ou divise chaque membre.
2. **Signe** : contrôle qu'il est strictement positif ; sinon, cette règle ne sert pas.
3. **Nouvelle inégalité** : garde le même symbole et précise « ordre et multiplication ».

Attention : multiplier par un nombre négatif

La règle « ordre et multiplication » ne s'applique pas à un nombre négatif.

Ainsi $3 < 4$, mais $3 \times (-2) = -6$ et $4 \times (-2) = -8$, avec $-6 > -8$: ici, le sens n'est pas conservé.

Regarde donc toujours le signe du facteur avant de multiplier.

Enchaîner les règles

Méthode : Comparer deux expressions en enchaînant les règles

1. **Départ** : écris l'inégalité que l'énoncé te donne.
2. **Une règle par ligne** : souvent, multiplie d'abord par le nombre strictement positif, puis ajoute ou retranche.
3. **Justification** : écris le nom de la règle à côté de chaque ligne.
4. **Fin** : réponds par une phrase qui compare les deux expressions.

Exemple

On sait que $a < b$. Compare $4a + 7$ et $4b + 7$.

- On multiplie les deux membres par 4, qui est strictement positif (ordre et multiplication) : $4a < 4b$.
- On ajoute 7 aux deux membres (ordre et addition) : $4a + 7 < 4b + 7$.

Donc $4a + 7$ est le plus petit des deux.

Exemple

Un taxi fait payer 7 dirhams, plus $1{,}5$ dirham par kilomètre. Une course de d kilomètres coûte $1{,}5 \times d + 7$ dirhams. On sait que $d < 12$.

- Ordre et multiplication par $1{,}5$, qui est strictement positif : $1{,}5 \times d < 18$.
- Ordre et addition, on ajoute 7 : $1{,}5 \times d + 7 < 25$.

La course coûte moins de 25 dirhams.

Remarque : Bien rédiger

À chaque étape, écris l'inégalité obtenue. Écris aussi la règle employée : ordre et addition, ou ordre et multiplication. Termine par une phrase qui répond à la question.

Ce qu'il faut retenir

Méthode : Quelle technique pour quelle question ?

1. **Deux nombres quelconques** : calcule leur différence et cherche son signe.
2. **Deux fractions de même dénominateur strictement positif** : compare leurs numérateurs.
3. **Deux fractions de dénominateurs différents** : réduis-les au même dénominateur.
4. **Deux quotients difficiles** : utilise la calculatrice, puis un calcul exact si les affichages ne se séparent pas.
5. **Un nombre plus petit que 1 et un autre plus grand** : passe par un nombre intermédiaire.
6. **Une inégalité connue à transformer** : applique une règle à la fois et nomme-la.

Comparer par la différence

$$a < b \text{ signifie } a - b < 0$$

Troisième nombre

$$a < b \text{ et } b < c, \text{ donc } a < c$$

Même dénominateur

$$d > 0 \text{ et } a < b, \text{ donc } \frac{a}{d} < \frac{b}{d}$$

Ordre et addition

$$a < b, \text{ donc } a + c < b + c$$

Membre à membre

$$a < b \text{ et } c < d, \text{ donc } a + c < b + d$$

Ordre et multiplication

$$c > 0 \text{ et } a < b, \text{ donc } a \times c < b \times c$$

À retenir : Le sens d'une inégalité

Le sens ne change pas quand tu ajoutes ou retranches un même nombre aux deux membres. Il ne change pas non plus quand tu multiplies ou divises par un nombre strictement positif. Avec un nombre négatif, la règle ne s'applique pas : calcule, ne devine pas.