BURHAN

Ordre et opérations

2ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/ordre-et-operations/cours

Chapitre	Semestre
Ordre et opérations	Semestre 2

Quelle offre coûte le moins cher ?

Au marché, deux vendeurs proposent le même jus d'orange, en bouteilles identiques.

- Offre A : 3 bouteilles pour 20 DH.
- Offre B : 4 bouteilles pour 27 DH.

Une bouteille coûte $\frac{20}{3}$ DH dans l'offre A et $\frac{27}{4}$ DH dans l'offre B.

Devine : La bouteille la moins chère

Sans calculer au centime près, devine : dans quelle offre la bouteille coûte-t-elle le moins cher ?

A. Dans l'offre A

Juste.

Bien vu. Une bouteille A coûte $\frac{80}{12}$ DH, une bouteille B coûte $\frac{81}{12}$ DH.

B. Dans l'offre B

Faux.

L'offre B donne plus de bouteilles, mais elle coûte aussi plus cher. Il faut comparer le prix d'une seule bouteille.

C. Le prix est le même

Faux.

Les deux prix sont très proches, mais ils ne sont pas égaux : $\frac{20}{3}$ vaut $\frac{80}{12}$ et $\frac{27}{4}$ vaut $\frac{81}{12}$.

D. On ne peut pas comparer

Faux.

On peut comparer deux fractions. Ce chapitre te donne plusieurs outils pour le faire.

Correction

La bouteille de l'offre A est la moins chère.

On écrit les deux prix avec le dénominateur 12 :

$$\frac{20}{3} = \frac{80}{12}$$
$$\frac{27}{4} = \frac{81}{12}$$

> Comme $80 < 81$, la bouteille A coûte moins cher, de $\frac{1}{12}$ DH seulement.

Comparer deux prix, deux températures ou deux distances : c'est le sujet de ce chapitre. Tu vas apprendre plusieurs façons de comparer deux nombres. Tu verras aussi ce que devient une comparaison quand on ajoute ou quand on multiplie.

Pour les deux bouteilles, la partie sur les fractions te donnera la méthode, sans calculatrice.

Comparer deux nombres

Comparer par la différence

Comparer deux nombres, c'est dire lequel est le plus petit. Une **inégalité** est une écriture qui compare deux nombres avec $<$, $>$, $\leq$ ou $\geq$. Les deux côtés d'une inégalité sont ses **membres**.

Un **nombre rationnel** est un nombre qui s'écrit sous forme de fraction, comme $\frac{3}{4}$, -2 ou $1{,}5$. Dans ce chapitre, tous les nombres sont rationnels.

Le nombre 0 est à la fois positif et négatif. Un nombre **strictement négatif** est négatif et différent de 0. De même, un nombre **strictement positif** est positif et différent de 0.

> **Vérifie : Deux villes en hiver**
>
> Un matin d'hiver, il fait -2 °C à Ifrane et 4 °C à Fès. Quelle ville est la plus froide ? Pour le savoir, on calcule la différence $-2 - 4$ (Ifrane moins Fès). Que vaut-elle ?
>
> **A.** 2
> **Faux.**
> Tu as calculé $4 + (-2)$. Ici, on retranche 4 à -2.
>
> **B.** -6
> **Juste.**
> Oui : $-2 - 4 = -6$. La différence est strictement négative, et Ifrane est la ville la plus froide.
>
> **C.** 6
> **Faux.**
> Tu as oublié le signe. Partir de -2 et descendre encore de 4 donne -6.
>
> **D.** -2
> **Faux.**
> Tu n'as pas retranché 4. Le résultat est $-2 - 4 = -6$.
>
> **Correction**
> On calcule la différence :
>
> $$-2 - 4 = -6$$

Ce résultat est strictement négatif. Il traduit le fait que -2 est plus petit que 4 : il fait plus froid à Ifrane.

Le signe de la différence suffit donc pour ranger les deux températures.

Définition : Comparer deux nombres

Soit a et b deux nombres rationnels.

- Dire que a est **strictement inférieur** à b, et écrire $a < b$, signifie que la différence $a - b$ est **strictement négative**.
- Dire que a est **inférieur ou égal** à b, et écrire $a \leq b$, signifie que la différence $a - b$ est **négative ou nulle**.

On écrit aussi $b > a$ à la place de $a < b$, et $b \geq a$ à la place de $a \leq b$.

Pour comparer a et b, on cherche donc le signe de $a - b$: si $a - b > 0$, alors $a > b$; si $a - b = 0$, alors $a = b$; si $a - b < 0$, alors $a < b$.

Exemple : Comparer $\dfrac{5}{4}$ et $1{,}3$

On calcule la différence, avec $\dfrac{5}{4}$ écrit sous forme décimale :

$$\begin{aligned} \frac{5}{4} - 1{,}3 &= 1{,}25 - 1{,}3 \\ &= -0{,}05 \end{aligned}$$

Cette différence est strictement négative. Donc $\dfrac{5}{4} < 1{,}3$.

La méthode de la différence

Méthode : Comparer deux nombres par le signe de leur différence

1. **Calcule** la différence : le premier nombre moins le second.
2. **Cherche son signe** : strictement positif, nul ou strictement négatif.
3. **Conclus par une phrase** :
   - différence strictement positive : le premier nombre est le plus grand ;
   - différence nulle : les deux nombres sont égaux ;
   - différence strictement négative : le premier nombre est le plus petit.

Vérifie : La conclusion de Sami

Sami compare $\frac{4}{7}$ et $\frac{5}{9}$. Il calcule :

$$\begin{aligned}\frac{4}{7}-\frac{5}{9} &= \frac{36}{63}-\frac{35}{63}\\ &= \frac{1}{63}\end{aligned}$$

Que doit-il conclure ?

A. $\frac{4}{7}<\frac{5}{9}$

Faux.

La différence $\frac{1}{63}$ est strictement positive. Le premier nombre est donc le plus grand.

B. $\frac{4}{7}=\frac{5}{9}$

Faux.

Deux nombres égaux ont une différence nulle. Ici, la différence vaut $\frac{1}{63}$, et pas 0.

C. $\frac{4}{7}>\frac{5}{9}$

Juste.

Oui. La différence est strictement positive, donc le premier nombre est le plus grand.

D. On ne peut rien conclure, l'écart est trop petit

Faux.

Un petit écart reste un écart. Seul le signe compte : ici, il est positif.

Correction

La différence $\frac{4}{7}-\frac{5}{9}=\frac{1}{63}$ est un nombre strictement positif.

Donc $\frac{4}{7}>\frac{5}{9}$.

Attention : comparer deux nombres négatifs

Ne compare pas les nombres sans leur signe. Par exemple, $4{,}5>2$, mais $-4{,}5<-2$.

La différence le confirme :

$$-4{,}5-(-2)=-2{,}5$$

Ce résultat est strictement négatif. Entre deux nombres négatifs, le plus petit est le plus éloigné de 0.

Passer par un troisième nombre

Exemple : Deux paquets de dattes

Un paquet de dattes pèse $0{,}95$ kg. Un autre pèse $\frac{7}{6}$ kg.

Le premier pèse moins de 1 kg : $0{,}95 < 1$.

Le second pèse plus de 1 kg, car $\frac{7}{6} - 1 = \frac{1}{6}$ est strictement positif.

Le nombre 1 se place entre les deux : le premier paquet est donc le plus léger.

Propriété : Comparer en passant par un troisième nombre

Soit a, b et c trois nombres rationnels.

Si $a < b$ et $b < c$, alors $a < c$.

La propriété reste vraie lorsqu'on remplace partout $<$ par $\leq$.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. On l'appelle la **propriété du troisième nombre**. En clair : si a est plus petit que b, et b plus petit que c, alors a est plus petit que c.

Exemple : Passer par zéro

Compare $-\frac{3}{4}$ et $\frac{2}{9}$.

- Le premier nombre est strictement négatif : $-\frac{3}{4} < 0$.
- Le second est strictement positif : $0 < \frac{2}{9}$.

D'après la propriété du troisième nombre :

$$-\frac{3}{4} < \frac{2}{9}.$$

Méthode : Comparer en passant par un nombre intermédiaire

1. **Choisis** un nombre simple, comme 0 ou 1, qui semble placé entre les deux nombres.
2. **Compare** chacun des deux nombres à ce nombre simple.
3. **Conclus** avec la propriété du troisième nombre.

À toi

> **À toi : passer par 1**
>
> Compare $\frac{8}{7}$ et $\frac{9}{10}$ en passant par le nombre 1.

Indice 1

Compare chaque nombre à 1 : calcule la différence de chaque nombre avec 1.

Indice 2

$\frac{8}{7} - 1 = \frac{1}{7}$ et $\frac{9}{10} - 1 = -\frac{1}{10}$.

Indice 3

Le signe de chaque différence dit de quel côté de 1 se trouve le nombre. Écris les deux inégalités dans le même sens avant de conclure.

Réponse

Position de $\frac{9}{10}$. La différence $\frac{9}{10} - 1 = -\frac{1}{10}$ est strictement négative, donc $\frac{9}{10} < 1$.

Position de $\frac{8}{7}$. La différence $\frac{8}{7} - 1 = \frac{1}{7}$ est strictement positive, donc $1 < \frac{8}{7}$.

Conclusion. Le nombre 1 est entre les deux. D'après la propriété du troisième nombre, $\frac{9}{10} < \frac{8}{7}$.

À retenir

Pour comparer deux nombres, tu disposes de deux outils.

- **La différence** : son signe donne l'ordre des deux nombres.
- **Un nombre intermédiaire** : un nombre simple, comme 0 ou 1, placé entre les deux.

Comparer des écritures fractionnaires

Même dénominateur

Devine : Les parts du gâteau

Un gâteau est coupé en 8 parts égales. Nadia mange 3 parts, soit $\frac{3}{8}$ du gâteau. Youssef en mange 5, soit $\frac{5}{8}$ du gâteau. Qui a mangé le plus ?

A. Nadia

Faux.

Nadia a mangé 3 parts, Youssef 5 parts de même taille. Youssef a mangé plus.

B. Ils ont mangé autant

Faux.

Les parts ont la même taille, mais Youssef en a pris plus.

C. On ne peut pas savoir sans la taille du gâteau

Faux.

Les deux fractions portent sur le même gâteau. On compare donc des parts de même taille.

D. Youssef

Juste.

> Oui. Les parts ont la même taille, et 5 parts font plus que 3 parts.
>
> **Correction**
> Youssef a mangé le plus.
>
> Les deux fractions ont le même dénominateur 8 : les parts ont la même taille. Comme $3 < 5$, on a $\frac{3}{8} < \frac{5}{8}$.

Deux fractions de même dénominateur parlent de parts de même taille. Il suffit alors de compter les parts : on compare les numérateurs. Le dénominateur doit être strictement positif, comme ici.

Propriété : Écritures fractionnaires de même dénominateur

Soit a et b deux nombres rationnels, et d un nombre **strictement positif**.

Si $a < b$, alors $\frac{a}{d} < \frac{b}{d}$.

Deux écritures fractionnaires qui ont le **même dénominateur strictement positif** sont rangées dans le même ordre que leurs numérateurs. La propriété reste vraie avec $\leq$.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Tu l'appliques chaque fois que les dénominateurs sont égaux et strictement positifs.

Exemple : Avec des numérateurs négatifs

Compare $\frac{-7}{9}$ et $\frac{-4}{9}$.

Le dénominateur commun 9 est strictement positif. Les numérateurs vérifient $-7 < -4$.

Donc $\frac{-7}{9} < \frac{-4}{9}$.

Dénominateurs différents

Méthode : Comparer deux écritures fractionnaires

1. **Regarde les dénominateurs** : si l'un est négatif, réécris la fraction avec un dénominateur strictement positif.
2. **Mets les deux fractions au même dénominateur**, strictement positif.
3. **Compare les numérateurs** : les fractions sont rangées dans le même ordre.

4. **Conclus** avec les fractions de départ.

Exemple : Comparer $\dfrac{5}{6}$ et $\dfrac{7}{9}$

Rappel. On ne change pas une fraction si on multiplie son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul.

Le plus petit dénominateur commun à 6 et à 9 est 18, car $6 \times 3 = 18$ et $9 \times 2 = 18$.

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \times 3}{6 \times 3} = \frac{15}{18}$$
$$\frac{7}{9} = \frac{7 \times 2}{9 \times 2} = \frac{14}{18}$$

Le dénominateur 18 est strictement positif, et $15 > 14$. Donc $\frac{5}{6} > \frac{7}{9}$.

Attention : comparer seulement les numérateurs

On ne compare les numérateurs que si les dénominateurs sont égaux et strictement positifs.

Par exemple, $2 < 3$, mais $\frac{2}{3} > \frac{3}{5}$. En effet, $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$ et $\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$.

Il faut d'abord réduire au même dénominateur.

Attention : un dénominateur négatif

Avec un dénominateur négatif, l'ordre des numérateurs ne suffit pas. Par exemple, $1 < 5$, mais $\frac{1}{-4} > \frac{5}{-4}$.

En effet, $\frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$ et $\frac{5}{-4} = -\frac{5}{4}$, et $-\frac{1}{4} > -\frac{5}{4}$.

Réécris d'abord chaque fraction avec un dénominateur strictement positif.

Trouve l'erreur : Le raisonnement de Lina

Lina écrit : « $\frac{4}{5} < \frac{7}{10}$, car $4 < 7$. » Que penses-tu de son raisonnement ?

A. Elle compare des numérateurs sans même dénominateur

Juste.

Oui. Avec le dénominateur 10, $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$, et $8 > 7$. Sa conclusion est fausse.

B. Il fallait comparer les dénominateurs : $5 < 10$

Faux.

Comparer les dénominateurs ne suffit pas non plus. On réduit d'abord au même dénominateur.

C. Son raisonnement est juste

Faux.

Sa conclusion est fausse : $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$, qui est plus grand que $\frac{7}{10}$.

D. Elle aurait dû comparer 4 et 10

Faux.

Comparer un numérateur à un dénominateur ne sert à rien ici. On met les deux fractions au même dénominateur.

Correction

Le raisonnement est faux. Les dénominateurs 5 et 10 sont différents : on ne compare pas seulement les numérateurs.

On écrit $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$. Comme $8 > 7$, on a $\frac{4}{5} > \frac{7}{10}$.

Avec la calculatrice

Méthode : Comparer deux quotients à la calculatrice

Une **valeur approchée** est un nombre proche de la vraie valeur. Par exemple, $0{,}67$ est la valeur approchée de $\frac{2}{3}$ arrondie au centième.

1. **Calcule** à la calculatrice une valeur approchée de chaque quotient, arrondie au même rang.
2. **Compare les deux affichages** chiffre par chiffre, de gauche à droite.
3. **Conclus** si les deux affichages ne sont pas les mêmes.
4. **Sinon, fais un calcul exact** : une différence, ou une réduction au même dénominateur.

Exemple : Comparer $\dfrac{13}{7}$ et $\dfrac{15}{8}$

Une fois arrondis au millième, $\frac{13}{7}$ donne $1{,}857$ et $\frac{15}{8}$ donne $1{,}875$.

Les deux affichages commencent par $1{,}8$. Les chiffres des centièmes sont différents : $5 < 7$.

Donc $\frac{13}{7} < \frac{15}{8}$.

Attention : une valeur approchée trop courte

Deux nombres différents peuvent avoir le même affichage. Une fois arrondis au centième, $\frac{4}{9}$ et $\frac{11}{25}$ donnent tous les deux $0{,}44$.

Pourtant, ces nombres ne sont pas égaux :

$$\frac{4}{9} - \frac{11}{25} = \frac{100}{225} - \frac{99}{225}$$
$$= \frac{1}{225}$$

Cette différence est strictement positive. Donc $\frac{4}{9} > \frac{11}{25}$.

Si les affichages ne se séparent pas, fais un calcul exact.

Vérifie : Deux affichages différents

Une fois arrondis au centième, $\frac{3}{4}$ donne $0{,}75$ et $\frac{7}{9}$ donne $0{,}78$. Peut-on conclure ?

A. Non : les deux affichages sont trop proches

Faux.

Les affichages ne sont pas les mêmes : les chiffres des centièmes diffèrent, $5 < 8$. Cela suffit pour conclure.

B. Oui : $\frac{3}{4} > \frac{7}{9}$

Faux.

Regarde les centièmes : $5 < 8$, donc $0{,}75 < 0{,}78$. L'ordre est dans l'autre sens.

C. Oui : $\frac{3}{4} < \frac{7}{9}$

Juste.

Oui. Les affichages ne sont pas les mêmes, et $0{,}75 < 0{,}78$.

D. Non : il faut toujours un calcul exact

Faux.

Un calcul exact sert quand les affichages sont les mêmes. Ici, ils sont différents.

Correction

Les deux affichages ne sont pas les mêmes, et $0{,}75 < 0{,}78$. Donc $\frac{3}{4} < \frac{7}{9}$.

Le calcul exact le confirme : $\frac{3}{4} = \frac{27}{36}$ et $\frac{7}{9} = \frac{28}{36}$.

À toi : deux recettes

Une recette demande $\frac{7}{12}$ L de lait. Une autre demande $\frac{5}{8}$ L de lait. Laquelle en demande le plus ?

Indice 1

Les dénominateurs sont différents : cherche un dénominateur commun à 12 et à 8.

Indice 2

Le nombre 24 convient : $\frac{7}{12} = \frac{14}{24}$ et $\frac{5}{8} = \frac{15}{24}$.

Indice 3

Compare les numérateurs. Conclus ensuite avec les fractions de départ, pas avec les vingt-quatrièmes.

Réponse

Même dénominateur. On réduit au dénominateur 24, strictement positif : $\frac{7}{12} = \frac{14}{24}$ et $\frac{5}{8} = \frac{15}{24}$.

Comparaison. Comme $14 < 15$, on a $\frac{7}{12} < \frac{5}{8}$.

Conclusion. La seconde recette demande le plus de lait.

Rédiger une comparaison

Remarque : Coin devoir

Question : compare $\frac{3}{4}$ et $\frac{7}{10}$.

En devoir, tu écris :

- On réduit au même dénominateur 20 : $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$ et $\frac{7}{10} = \frac{14}{20}$.
- Le dénominateur 20 est strictement positif, et $15 > 14$.
- D'après la règle des fractions de même dénominateur, $\frac{3}{4} > \frac{7}{10}$.

Termine toujours par une phrase de conclusion, avec les fractions de départ.

À retenir

- **Même dénominateur** strictement positif : compare les numérateurs.
- **Dénominateurs différents** : réduis d'abord au même dénominateur.
- **Calculatrice** : conclus si les affichages ne sont pas les mêmes ; sinon, calcule exactement.

Ordre et addition

Ajouter un même nombre

Devine : Deux tirelires

Amine a 35 DH dans sa tirelire. Salma a 42 DH. Leur grand-mère donne 10 DH à chacun. Qui a le plus d'argent maintenant ?

A. Amine

Faux.

Amine avait moins, et il reçoit la même somme que Salma. Il a 45 DH, et Salma 52 DH.

B. Ils ont autant

Faux.

Ils reçoivent la même somme, mais l'écart de départ reste : 7 DH.

C. Salma

Juste.

Oui. Salma a 52 DH, Amine 45 DH : l'écart de 7 DH n'a pas changé.

D. Cela dépend de la somme donnée

Faux.

Chacun reçoit la même somme, ici 10 DH. Salma garde 7 DH de plus.

Correction

Salma a le plus d'argent.

Au départ, $35 < 42$. Après le cadeau, $35 + 10 = 45$ et $42 + 10 = 52$, et $45 < 52$.

Donner la même somme aux deux enfants ne change pas l'ordre.

Exemple : Ajouter, retrancher

Pars de l'inégalité $-3 < 2$.

- On ajoute 5 aux deux membres : $-3 + 5 = 2$ et $2 + 5 = 7$, et $2 < 7$.
- On retranche 4 aux deux membres : $-3 - 4 = -7$ et $2 - 4 = -2$, et $-7 < -2$.

Dans les deux cas, le sens de l'inégalité reste le même.

Propriété : Ordre et addition

Soit a, b et c trois nombres rationnels.

Si $a < b$, alors $a + c < b + c$ et $a - c < b - c$.

On peut **ajouter** ou **retrancher** un même nombre aux deux membres d'une inégalité : le sens de l'inégalité ne change pas. La propriété reste vraie avec $\leq$.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. On l'appelle la règle « ordre et addition ».

Exemple : Utiliser la règle

On sait que $x < 9$.

- Ordre et addition, on ajoute 6 : $x + 6 < 15$.

- Ordre et addition, on retranche $2{,}5$: $x - 2{,}5 < 6{,}5$.

À chaque ligne, tu nommes la règle utilisée.

La méthode

Méthode : Obtenir une inégalité par addition ou soustraction

1. **Repère** le nombre à ajouter ou à retrancher aux deux membres.
2. **Écris** la nouvelle inégalité, sans changer son sens.
3. **Nomme la règle** utilisée : ordre et addition.

Vérifie : Ajouter 3

On sait que $a \geq -4$. On ajoute 3 aux deux membres. Quelle inégalité obtient-on ?

A. $a + 3 \leq -1$
Faux.
Ajouter un nombre ne change pas le sens : le signe $\geq$ reste $\geq$.

B. $a + 3 \geq -1$
Juste.
Oui : $-4 + 3 = -1$, et le sens ne change pas.

C. $a + 3 \geq 1$
Faux.
Vérifie le calcul : $-4 + 3 = -1$, et pas 1.

D. $a \geq -1$
Faux.
Tu as ajouté 3 à un seul membre. Il faut l'ajouter aux deux.

Correction
Ordre et addition : on ajoute 3 aux deux membres de $a \geq -4$. On obtient $a + 3 \geq -4 + 3$, soit $a + 3 \geq -1$.

Additionner deux inégalités

Deux inégalités ont le **même sens** quand elles utilisent toutes les deux $<$ (ou $\leq$), ou toutes les deux $>$ (ou $\geq$). Par exemple, $x < 2$ et $y \leq 6$ ont le même sens. Mais $x < 2$ et $y > 6$ n'ont pas le même sens.

Exemple : Deux inégalités de même sens

Pars de $3 < 5$ et de $-1 < 4$: ces deux inégalités ont le même sens.

- Membres de gauche : $3 + (-1) = 2$.
- Membres de droite : $5 + 4 = 9$.

On obtient $2 < 9$: le sens est conservé.

Propriété : Additionner deux inégalités membre à membre

Soit a, b, c et d quatre nombres rationnels.

Si $a < b$ et $c < d$, alors $a + c < b + d$.

Deux inégalités **de même sens** s'additionnent membre à membre. La propriété reste vraie avec $\leq$.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. On dit qu'on additionne les deux inégalités **membre à membre**.

Additionner en pratique

Exemple : Un livre et un cahier

Un livre coûte x DH, avec $x < 45$. Un cahier coûte y DH, avec $y < 12$.

1. **Vérifie le sens** : les deux inégalités utilisent $<$, elles ont le même sens.
2. **Additionne** les membres de gauche, puis ceux de droite : $x + y < 45 + 12$, soit $x + y < 57$.
3. **Nomme la règle** : on additionne membre à membre.

Le livre et le cahier coûtent ensemble moins de 57 DH.

Attention : pas de soustraction membre à membre

Deux inégalités de même sens s'additionnent. Elles ne se soustraient pas.

Par exemple, $6 < 10$ et $1 < 8$. Mais $6 - 1 = 5$ et $10 - 8 = 2$, et $5 > 2$: le sens a changé.

Pour retrancher, utilise seulement un même nombre, avec la règle « ordre et addition ».

À toi

> **À toi : deux règles d'addition**
>
> On sait que $m < 7$ et $n < -2$.
>
> 1. Compare $m - 3$ et 4.

2. Compare $m + n$ et 5.

Indice 1
Question 1 : retranche un même nombre aux deux membres de $m < 7$. Question 2 : additionne membre à membre les deux inégalités, qui ont le même sens.
Indice 2
Question 1 : $7 - 3 = 4$.
Indice 3
Question 2 : $7 + (-2) = 5$. Vérifie que tu n'as pas changé le sens.

Réponse

1. Ordre et addition : on retranche 3 aux deux membres de $m < 7$. Donc $m - 3 < 4$.
2. Les inégalités $m < 7$ et $n < -2$ ont le même sens : on les additionne membre à membre. On obtient $m + n < 7 + (-2)$, soit $m + n < 5$.

À retenir

- **Ordre et addition** : ajouter ou retrancher un même nombre aux deux membres ne change pas le sens.
- **Membre à membre** : deux inégalités de même sens s'additionnent.
- Deux inégalités ne se soustraient pas membre à membre.

Ordre et multiplication

Multiplier par un même nombre

Devine : Doubler les deux membres

Pars de $-6 < 4$. Multiplie les deux membres par 2. Que devient l'inégalité ?

A. $-12 > 8$: le sens change
Faux.
Multiplier par 2 ne retourne pas l'inégalité : -12 reste plus petit que 8.

B. $-12 < 8$: le sens reste
Juste.
Oui : $-6 \times 2 = -12$ et $4 \times 2 = 8$, et $-12 < 8$.

C. $12 < 8$
Faux.
Vérifie le signe : $-6 \times 2 = -12$, et pas 12. De plus, $12 < 8$ est faux.

D. On ne peut pas savoir
Faux.

Il suffit de calculer les deux produits : -12 et 8.

Correction
$-6 \times 2 = -12$ et $4 \times 2 = 8$. On obtient $-12 < 8$: le sens de l'inégalité est conservé.

Exemple : Multiplier, diviser

Pars encore de $-6 < 4$.

- On multiplie par $0{,}5$: $-6 \times 0{,}5 = -3$ et $4 \times 0{,}5 = 2$, et $-3 < 2$.
- On divise par 4 : $-6 \div 4 = -1{,}5$ et $4 \div 4 = 1$, et $-1{,}5 < 1$.

Les nombres 2, $0{,}5$ et 4 sont strictement positifs. Dans chaque cas, le sens reste le même.

Propriété : Ordre et multiplication par un nombre strictement positif

Soit a et b deux nombres rationnels, et c un nombre **strictement positif**.

Si $a < b$, alors $a \times c < b \times c$ et $\dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$.

On peut **multiplier** ou **diviser** les deux membres d'une inégalité par un même nombre **strictement positif** : le sens de l'inégalité ne change pas. La propriété reste vraie avec $\leq$.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. On l'appelle la règle « ordre et multiplication ».

Exemple : Stylos et cahiers

Un stylo coûte s DH et un cahier coûte c DH, avec $s < c$. Tu achètes 12 stylos ou 12 cahiers.

Le nombre 12 est strictement positif. Ordre et multiplication : $12s < 12c$.

Douze stylos coûtent moins cher que douze cahiers.

La méthode

Méthode : Obtenir une inégalité par multiplication ou division

1. **Repère** le nombre par lequel tu multiplies ou tu divises les deux membres.
2. **Vérifie** que ce nombre est strictement positif.
3. **Écris** la nouvelle inégalité, sans changer son sens, et **nomme la règle** : ordre et multiplication.

Exemple : Une recette pour une personne

Une recette pour 4 personnes demande f grammes de farine, avec $f < 600$.

Le nombre 4 est strictement positif. Ordre et multiplication, on divise les deux membres par 4 : $\frac{f}{4} < 150$.

Pour une personne, il faut moins de 150 g de farine.

Vérifie : Multiplier par 4

On sait que $y > 1{,}5$. On multiplie les deux membres par 4. Quelle inégalité obtient-on ?

A. $y > 6$

Faux.

Tu as multiplié un seul membre. Il faut multiplier les deux : $4y$ à gauche.

B. $4y < 6$

Faux.

Le nombre 4 est strictement positif : le sens ne change pas.

C. $\frac{y}{4} > 6$

Faux.

Tu as divisé à gauche et multiplié à droite. On fait la même opération des deux côtés.

D. $4y > 6$

Juste.

Oui : $4 \times 1{,}5 = 6$, et le sens est conservé.

Correction

Le nombre 4 est strictement positif.

Ordre et multiplication : $4 \times y > 4 \times 1{,}5$, soit $4y > 6$.

Vérifier le signe

Trouve l'erreur : La rédaction de Rachid

Avant de multiplier, regarde toujours le signe du nombre. Rachid écrit : « On sait que $x < 5$. Ordre et multiplication par -3 : $-3x < -15$. » Que penses-tu de sa rédaction ?

A. Il fallait diviser au lieu de multiplier

Faux.

Diviser par -3 poserait le même problème : ce nombre est négatif.

B. Sa rédaction est juste

Faux.

Le nombre -3 est négatif. La règle « ordre et multiplication » ne s'applique pas.

C. La règle ne vaut pas pour -3, qui est négatif

Juste.

Oui. La règle exige un nombre strictement positif. Avec $x = 0$, on a $-3x = 0$, et $0 < -15$ est faux.

D. Il fallait écrire $-3x < 15$

Faux.

Ce n'est pas mieux : avec $x = -10$, on a $-3x = 30$, et $30 < 15$ est faux.

Correction

La rédaction est fausse. La règle « ordre et multiplication » demande un nombre strictement positif, et -3 est négatif.

Contre-exemple : $x = 0$ vérifie $x < 5$. Pourtant $-3 \times 0 = 0$, et $0 < -15$ est faux.

Ce chapitre ne donne aucune règle pour un nombre négatif.

Attention : multiplier par un nombre négatif

La règle « ordre et multiplication » ne s'applique qu'à un nombre **strictement positif**. Avec un nombre négatif, cette règle ne s'applique pas.

Par exemple, $3 < 4$, mais $3 \times (-2) = -6$ et $4 \times (-2) = -8$, et $-6 > -8$: ici, le sens n'est pas conservé.

Avant de multiplier ou de diviser, vérifie donc toujours le signe du nombre.

À toi

À toi : multiplier et diviser

On sait que $t \leq 2{,}5$.

1. Compare $6t$ et 15.
2. Compare $\dfrac{t}{5}$ et $0{,}5$.

Indice 1

Pour chaque question, cherche le nombre qui multiplie ou qui divise t.

Indice 2

$6 \times 2{,}5 = 15$ et $2{,}5 \div 5 = 0{,}5$.

Indice 3

Les nombres 6 et 5 sont strictement positifs : garde le signe $\leq$.

Réponse

1. Ordre et multiplication par 6, strictement positif : $6t \leq 6 \times 2{,}5$, soit $6t \leq 15$.

2. Ordre et multiplication, on divise par 5, strictement positif : $\frac{t}{5} \leq \frac{2{,}5}{5}$, soit $\frac{t}{5} \leq 0{,}5$.

À retenir

- **Ordre et multiplication** : multiplier ou diviser les deux membres par un même nombre strictement positif ne change pas le sens.
- Avec un nombre négatif, cette règle ne s'applique pas : vérifie toujours le signe.

Enchaîner les règles

Une règle à la fois

Devine : Par quoi commencer ?

On sait que $a < b$. On veut passer de $a < b$ à une comparaison de $3a - 1$ et $3b - 1$. Quelles opérations faut-il faire, et dans quel ordre ?

A. Retrancher 1, puis multiplier par 3

Faux.
Ce chemin donne $3(a - 1) = 3a - 3$, et pas $3a - 1$.

B. Multiplier par -1, puis par 3

Faux.
Multiplier par -1 n'est pas une règle du chapitre : -1 est négatif.

C. Comparer seulement 3 et 1

Faux.
Les nombres 3 et 1 sont les mêmes des deux côtés. Ce sont a et b qui font la différence.

D. Multiplier par 3, puis retrancher 1

Juste.
Oui : on obtient d'abord $3a < 3b$, puis $3a - 1 < 3b - 1$.

Correction
On multiplie d'abord par 3, strictement positif : $3a < 3b$.

On retranche ensuite 1 aux deux membres : $3a - 1 < 3b - 1$.

Chaque étape utilise une seule règle.

Exemple : Comparer $4x + 3$ et $4y + 3$

On sait que $x \leq y$.

- Ordre et multiplication, par 4 qui est strictement positif : $4x \leq 4y$.

- Ordre et addition, on ajoute 3 : $4x + 3 \leq 4y + 3$.

Donc $4x + 3$ est inférieur ou égal à $4y + 3$.

Méthode : Comparer deux expressions en enchaînant les règles

1. **Pars** de l'inégalité connue, par exemple $a < b$.
2. **Applique une seule règle à la fois** : souvent la multiplication par un nombre strictement positif d'abord, puis l'addition ou la soustraction.
3. **Nomme** la règle à chaque étape.
4. **Conclus par une phrase** qui compare les deux expressions.

Une situation

Une salle de sport demande 50 DH à l'inscription, puis 80 DH par mois. Leila s'abonne n mois et Omar p mois, avec $n < p$. Leila paie $80n + 50$ DH, et Omar paie $80p + 50$ DH.

Exemple : Qui paie le moins ?

- Ordre et multiplication, par 80 qui est strictement positif : $80n < 80p$.
- Ordre et addition, on ajoute 50 : $80n + 50 < 80p + 50$.

Leila paie donc moins qu'Omar.

Vérifie : Quelle règle à cette étape ?

On sait que $x < y$. Une élève passe de $\frac{x}{2} < \frac{y}{2}$ à $\frac{x}{2} - 7 < \frac{y}{2} - 7$. Quelle règle utilise-t-elle ?

A. Ordre et addition
Juste.
Oui : elle retranche 7 aux deux membres.

B. Ordre et multiplication
Faux.
Aucun membre n'est multiplié à cette étape. Elle retranche 7 aux deux membres.

C. Comparer par la différence
Faux.
Elle ne calcule aucune différence entre les deux membres. Elle retranche 7 de chaque côté.

D. Passer par un troisième nombre
Faux.
Aucun nombre n'est placé entre les deux membres. Elle retranche 7 de chaque côté.

Correction

Elle utilise la règle « ordre et addition » : retrancher un même nombre, ici 7, aux deux membres ne change pas le sens.

L'étape d'avant, de $x < y$ à $\frac{x}{2} < \frac{y}{2}$, utilisait la règle « ordre et multiplication ».

À toi

Exemple : Avec une division

On sait que $m \leq 9$. Compare $\frac{m}{3} - 4$ et -1.

- Ordre et multiplication, on divise par 3, strictement positif : $\frac{m}{3} \leq 3$.
- Ordre et addition, on retranche 4 : $\frac{m}{3} - 4 \leq -1$.

Donc $\frac{m}{3} - 4$ est inférieur ou égal à -1.

À toi : deux règles enchaînées

On sait que $u \geq 4$. Compare $5u + 2$ et 22.

Indice 1

Commence par la règle « ordre et multiplication » : par quel nombre faut-il multiplier ?

Indice 2

$5 \times 4 = 20$, donc $5u \geq 20$.

Indice 3

Ajoute ensuite 2 aux deux membres, sans changer le sens.

Réponse

Multiplication. Le nombre 5 est strictement positif. Ordre et multiplication : $5u \geq 20$.

Addition. Ordre et addition, on ajoute 2 aux deux membres : $5u + 2 \geq 22$.

Conclusion. Le nombre $5u + 2$ est supérieur ou égal à 22.

Rédiger un enchaînement

Remarque : Coin devoir

Question : on sait que $a < b$. Compare $2a + 5$ et $2b + 5$.

En devoir, tu écris :

- On sait que $a < b$.
- Le nombre 2 est strictement positif. D'après la règle « ordre et multiplication », $2a < 2b$.

- D'après la règle « ordre et addition », on ajoute 5 aux deux membres : $2a + 5 < 2b + 5$.
- Conclusion : $2a + 5$ est strictement inférieur à $2b + 5$.

> **À retenir**
>
> Pour comparer deux expressions, pars de l'inégalité connue. Applique une seule règle par ligne, et nomme-la. Termine par une phrase qui compare les deux expressions.

Ce qu'il faut retenir

> **À retenir : Quelle technique pour quelle question ?**
>
> - **Comparer deux nombres** : calcule leur différence, ou passe par 0 ou 1.
> - **Comparer deux fractions** : même dénominateur strictement positif, puis compare les numérateurs.
> - **Comparer deux quotients** : la calculatrice, puis un calcul exact si les affichages sont les mêmes.
> - **Obtenir une inégalité** : ajoute ou retranche un même nombre ; multiplie ou divise par un même nombre strictement positif.
> - **Comparer deux expressions** : enchaîne les règles, une à la fois.

> **Méthode : Pour réussir une comparaison**
>
> 1. **Lis la question** : deux nombres, deux fractions ou deux expressions ?
> 2. **Choisis la technique** dans la liste ci-dessus.
> 3. **Écris une règle par ligne**, en la nommant.
> 4. **Vérifie le signe** du nombre avant de multiplier ou de diviser.
> 5. **Conclus par une phrase** qui répond à la question.

Tu sais maintenant comparer des prix, des températures et des quantités. Tu sais aussi garder une inégalité juste pendant un calcul. Ces règles te serviront dans les prochains chapitres.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Ordre et opérations » (2ac · general · mathematiques)