BURHAN

Opérations sur les nombres rationnels

2ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/operations-sur-les-rationnels/resume

Chapitre	Semestre
Opérations sur les nombres rationnels	Semestre 1

Même dénominateur

Propriété : Somme et différence de deux nombres rationnels de même dénominateur

Soit a, b et d trois nombres entiers relatifs, avec $d \neq 0$.

Pour **additionner** deux nombres rationnels de même dénominateur, on additionne les numérateurs et on garde le dénominateur :

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d}.$$

Pour les **soustraire**, on soustrait les numérateurs et on garde le dénominateur :

$$\frac{a}{d} - \frac{b}{d} = \frac{a-b}{d}.$$

Exemple : des numérateurs négatifs

Le dénominateur 9 reste ; on additionne les numérateurs :

$$\begin{aligned} \frac{-7}{9} + \frac{4}{9} &= \frac{-7+4}{9} \\ &= \frac{-3}{9} \end{aligned}$$

On simplifie par 3 : $\frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$.

Pour une différence, le geste ne change pas :

$$\begin{aligned} \frac{5}{8} - \frac{11}{8} &= \frac{5-11}{8} \\ &= \frac{-6}{8} \end{aligned}$$

On simplifie par 2 : $\frac{-6}{8} = -\frac{3}{4}$.

L'opposé d'un nombre rationnel

Définition : Opposé d'un nombre rationnel

Deux nombres sont **opposés** lorsque leur somme est égale à 0.

Soit a et b deux nombres entiers relatifs, avec $b \neq 0$. L'opposé du nombre rationnel $\frac{a}{b}$ est le nombre $-\frac{a}{b}$, et

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}.$$

Ainsi $\frac{a}{b} + \left(-\frac{a}{b}\right) = 0$. Le nombre 0 est son propre opposé.

À retenir : En clair

L'**opposé** d'un nombre non nul a le signe contraire. Le signe moins se place devant la fraction, au numérateur ou au dénominateur :

$$-\frac{2}{7} = \frac{-2}{7} = \frac{2}{-7}$$

Dans un résultat, garde un dénominateur positif.

Exemple : soustraire un nombre négatif

L'opposé de $\frac{-5}{6}$ est $\frac{5}{6}$, car leur somme est nulle :

$$\frac{-5}{6} + \frac{5}{6} = \frac{0}{6} = 0$$

Retirer un nombre négatif revient à ajouter son opposé :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} - \left(-\frac{3}{4}\right) &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \\ &= \frac{4}{4} = 1 \end{aligned}$$

Attention : Le moins devant une fraction

Un signe moins placé devant une fraction agit sur la fraction **entière**. Si tu réunis le calcul sur un seul numérateur, ce moins change le signe de chaque terme de ce numérateur.

Mets des parenthèses :

$$\begin{aligned} \frac{3}{5} - \frac{4-6}{5} &= \frac{3-(4-6)}{5} \\ &= \frac{3+2}{5} = 1 \end{aligned}$$

Écrire $\frac{3-4-6}{5}$ est faux : le signe du 6 n'a pas été changé.

Dénominateurs différents

Propriété : Somme et différence de deux nombres rationnels quelconques

Pour additionner ou soustraire deux nombres rationnels de dénominateurs différents, on les écrit d'abord avec un **même dénominateur**, puis on applique la règle du même dénominateur.

Soit a, b, c et d des nombres entiers relatifs, avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$:

$$\begin{aligned}&\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\\&=\frac{a\times d}{b\times d}+\frac{c\times b}{d\times b}\\&=\frac{a\times d+c\times b}{b\times d}.\end{aligned}$$

Soustraire un nombre rationnel, c'est ajouter son opposé : pour tous nombres rationnels x et y,

$$x-y=x+(-y).$$

Méthode : additionner ou soustraire deux fractions

1. **Dénominateurs positifs.** Un signe moins au dénominateur passe au numérateur.
2. **Dénominateur commun.** Choisis un nombre non nul, multiple de chaque dénominateur ; le plus petit rend les calculs plus courts.
3. **Écritures équivalentes.** Multiplie le haut et le bas de chaque fraction par un même nombre.
4. **Numérateurs.** Additionne-les ou soustrais-les ; le dénominateur commun ne bouge pas.
5. **Simplification.** Rends la fraction **irréductible** : on ne peut plus la simplifier.

Exemple : Exemple guidé

Calculons $\frac{7}{10}-\frac{5}{6}$.

- Plus petit multiple commun de 10 et 6 : 30.
- Écritures sur 30 : $\frac{7}{10}=\frac{21}{30}$ et $\frac{5}{6}=\frac{25}{30}$.
- Différence des numérateurs : $\frac{21}{30}-\frac{25}{30}=\frac{-4}{30}$.
- Simplification par 2 : $\frac{-4}{30}=-\frac{2}{15}$.

Exemple : un dénominateur négatif, puis trois termes

Le signe d'abord : $\frac{1}{-4}=-\frac{1}{4}$. Ensuite le dénominateur 12 :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{4}+\frac{5}{6}&=-\frac{3}{12}+\frac{10}{12}\\&=\frac{7}{12}\end{aligned}$$

Avec trois termes, un seul dénominateur commun suffit :

$$\begin{aligned}&\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\\&=\frac{4}{6}-\frac{3}{6}+\frac{5}{6}\\&=\frac{6}{6}=1\end{aligned}$$

Attention : Additionner les dénominateurs

Les dénominateurs ne s'additionnent pas : $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\neq\frac{3}{8}$.

Le bon calcul passe par le dénominateur 15 :

$$\begin{aligned}\frac{2}{5}+\frac{1}{3}&=\frac{6}{15}+\frac{5}{15}\\&=\frac{11}{15}\end{aligned}$$

Attention : Simplifier dans une somme

Un **facteur** est un nombre multiplié ; un **terme** est un nombre ajouté. On ne simplifie que des facteurs communs au haut et au bas.

Dans $\frac{3+4}{3+8}$, le 3 est un terme : $\frac{3+4}{3+8}=\frac{7}{11}$, et $\frac{7}{11}\neq\frac{4}{8}$.

Avec un produit, barrer est juste :

$$\frac{3\times4}{3\times8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

Multiplier

Propriété : Produit de deux nombres rationnels

Pour **multiplier** deux nombres rationnels, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Soit a, b, c et d des nombres entiers relatifs, avec $b\neq0$ et $d\neq0$:

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}.$$

Le signe du produit suit la **règle des signes** : le produit de deux nombres de même signe est positif ; le produit de deux nombres de signes contraires est négatif.

En particulier, pour tout nombre entier relatif k :

$$k\times\frac{a}{b}=\frac{k\times a}{b}.$$

Remarque : Rappel de 1AC : la règle des signes

Si deux facteurs non nuls ont le même signe, le produit est positif. S'ils ont des signes contraires, il est négatif. Si l'un des facteurs est nul, le produit est nul.

Même signe, donc produit positif :

$$\left(-\frac{3}{4}\right) \times \left(-\frac{2}{9}\right) = \frac{3 \times 2}{4 \times 9} = \frac{6}{36}$$

On simplifie par 6 : $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Méthode : multiplier en simplifiant d'abord

1. **Signe.** La règle des signes donne le signe du résultat.
2. **Produits en attente.** Écris le produit des numérateurs sur le produit des dénominateurs, sans effectuer.
3. **Facteurs communs.** Décompose chaque nombre, puis barre les facteurs présents en haut et en bas.
4. **Calcul final.** Multiplie ce qui reste.

Exemple : Exemple guidé

Calculons $\frac{-10}{21} \times \frac{14}{15}$.

Les signes sont contraires : le produit est négatif. On garde les produits en attente :

$$\frac{-10}{21} \times \frac{14}{15} = -\frac{10 \times 14}{21 \times 15}$$

Décomposition de chaque nombre :

$$-\frac{10 \times 14}{21 \times 15} = -\frac{2 \times 5 \times 2 \times 7}{3 \times 7 \times 3 \times 5}$$

On barre 5 et 7 : il reste $-\frac{2 \times 2}{3 \times 3} = -\frac{4}{9}$.

Exemple : multiplier par un entier

Avec un entier, seul le numérateur est multiplié :

$$6 \times \frac{5}{8} = \frac{6 \times 5}{8} = \frac{30}{8}$$

On simplifie par 2 : $\frac{30}{8} = \frac{15}{4}$.

Méthode : fraction d'une quantité

1. **Fraction d'une quantité.** Prendre les $\frac{a}{b}$ d'une quantité, c'est la multiplier par $\frac{a}{b}$.
2. **Fraction d'une fraction.** Multiplie les deux fractions.
3. **Part qui reste.** Le tout vaut 1 : retire de 1 la somme des parts déjà prises.
4. **Phrase réponse.** Conclus par une phrase, avec l'unité.

Exemple : réservoir, somme, budget

Un réservoir de 60 litres est rempli aux $\frac{3}{4}$. Il contient $\frac{3}{4} \times 60 = \frac{180}{4} = 45$ litres.

Les $\frac{2}{3}$ des $\frac{3}{5}$ d'une somme valent $\frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$ de cette somme.

Tu dépenses $\frac{1}{5}$ puis $\frac{1}{2}$ d'un budget. La part qui reste vaut :

$$1 - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$$

Inverse et quotient

Définition : Inverse d'un nombre rationnel non nul

Deux nombres sont **inverses** l'un de l'autre lorsque leur produit est égal à 1.

Soit x un nombre rationnel **non nul**. Son inverse se note $\frac{1}{x}$: c'est le nombre tel que $x \times \frac{1}{x} = 1$.

Soit a et b deux nombres entiers relatifs **non nuls**. L'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$, car

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{a \times b}{b \times a} = 1.$$

Le nombre 0 n'a pas d'inverse : le produit de 0 par n'importe quel nombre est égal à 0, jamais à 1.

Exemple : trouver un inverse

L'inverse de $-\frac{4}{7}$ est $-\frac{7}{4}$, car :

$$\left(-\frac{4}{7}\right) \times \left(-\frac{7}{4}\right) = \frac{28}{28} = 1$$

L'inverse de 5 est $\frac{1}{5}$, car $5 \times \frac{1}{5} = 1$.

Attention : Opposé ou inverse ?

Ne confonds pas les deux mots. L'opposé de $\frac{5}{8}$ est $-\frac{5}{8}$: leur somme vaut 0. L'inverse de $\frac{5}{8}$ est $\frac{8}{5}$: leur produit vaut 1.

Un nombre et son inverse ont le même signe : l'inverse de $-\frac{5}{8}$ est $-\frac{8}{5}$. Le nombre 0 a un opposé, lui-même, mais aucun inverse.

Propriété : Quotient de deux nombres rationnels

Diviser par un nombre rationnel non nul, c'est **multiplier par son inverse**.

Soit a, b, c et d des nombres entiers relatifs, avec $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$:

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} &= \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} \\ &= \frac{a \times d}{b \times c}.\end{aligned}$$

Ce quotient s'écrit aussi avec un trait de fraction :

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}.$$

En particulier, pour tout nombre entier relatif a et tout nombre entier relatif non nul b :

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}.$$

Méthode : diviser par une fraction

1. **Diviseur non nul.** Vérifie que tu ne divises pas par 0.
2. **Inverse du diviseur.** Remplace la division par la multiplication par l'inverse du diviseur.
3. **Produit.** Termine avec la méthode du produit, puis simplifie.

Exemple : Exemple guidé

Calculons $\frac{-6}{5} \div \frac{9}{10}$. Le diviseur n'est pas nul ; son inverse est $\frac{10}{9}$.

On multiplie par cet inverse ; le produit est négatif ; on simplifie par 15 :

$$\begin{aligned}\frac{-6}{5} \div \frac{9}{10} &= \frac{-6}{5} \times \frac{10}{9} \\ &= -\frac{60}{45} = -\frac{4}{3}\end{aligned}$$

Exemple : un quotient de deux nombres négatifs

Le diviseur $-\frac{21}{4}$ n'est pas nul. Deux nombres négatifs donnent un quotient positif :

$$\left(-\frac{7}{8}\right) \div \left(-\frac{21}{4}\right) = \frac{7}{8} \times \frac{4}{21} = \frac{28}{168}$$

On simplifie par 28 : $\frac{28}{168} = \frac{1}{6}$.

Exemple : le trait de fraction

Un trait de fraction est aussi une division : $\frac{7}{3} = 7 \div 3 = 7 \times \frac{1}{3}$.

Attention : Inverser la bonne fraction

Seul le **diviseur**, le nombre placé après le signe de division, est remplacé par son inverse. Ainsi :

$$\frac{3}{7} \div \frac{5}{2} = \frac{3}{7} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{35}$$

Calculer $\frac{7}{3} \times \frac{5}{2}$ est faux : le **dividende**, le nombre divisé, a été inversé.

Calculs enchaînés

Propriété : Priorités et distributivité avec des nombres rationnels

Les règles de calcul connues pour les nombres décimaux relatifs restent vraies pour les nombres rationnels.

- **Priorités** : on effectue d'abord les calculs entre parenthèses ; puis les multiplications et les divisions, de gauche à droite ; enfin les additions et les soustractions, de gauche à droite.
- **Distributivité** : pour tous nombres rationnels k, x et y,

$$k \times (x + y) = k \times x + k \times y$$

et

$$k \times (x - y) = k \times x - k \times y.$$

Méthode : une expression avec plusieurs opérations

1. **Repérage.** Cherche où sont les parenthèses. Le trait d'une fraction se lit comme une paire de parenthèses autour du haut, et une autre autour du bas.
2. **Un calcul à la fois.** Fais seulement le calcul prioritaire ; recopie tout le reste tel quel.
3. **Écriture à étages.** Une **écriture à étages** est une fraction dont le haut ou le bas contient des fractions. Calcule le haut, puis le bas, puis divise.

4. **Fin.** Simplifie le résultat.

Exemple : la multiplication d'abord

Dans $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$, la multiplication passe en premier :

$$\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

La soustraction vient ensuite, sur le dénominateur 12 :

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} - \frac{1}{6} &= \frac{9}{12} - \frac{2}{12} \\ &= \frac{7}{12} \end{aligned}$$

Exemple : une écriture à étages

Calculons $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}{\frac{7}{4}}$.

Le haut. $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{5}{10} + \frac{2}{10} = \frac{7}{10}$.

Le bas. Il vaut déjà $\frac{7}{4}$.

La division, par l'inverse du bas :

$$\begin{aligned} \frac{7}{10} \div \frac{7}{4} &= \frac{7}{10} \times \frac{4}{7} \\ &= \frac{28}{70} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Donc $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}{\frac{7}{4}} = \frac{2}{5}$.

Exemple : calculer astucieusement

Le nombre $\frac{4}{7}$ se trouve dans les deux produits. La distributivité permet de le mettre en facteur :

$$\begin{aligned} &\frac{4}{7} \times \frac{3}{5} + \frac{4}{7} \times \frac{2}{5} \\ &= \frac{4}{7} \times \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{5} \right) \\ &= \frac{4}{7} \times 1 = \frac{4}{7} \end{aligned}$$

Attention : Oublier les priorités

La multiplication passe avant l'addition :

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times 6 &= \frac{1}{3}+4\\ &= \frac{13}{3}\end{aligned}$$

Additionner d'abord donnerait 6, et $6 \neq \frac{13}{3}$: ce calcul est faux.

Quelle règle pour quel calcul ?

Méthode : Quelle règle pour quel calcul ?

- **Même dénominateur** : opère sur les numérateurs, garde le dénominateur.
- **Dénominateurs différents** : cherche d'abord un dénominateur commun.
- **Soustraction** : ajoute l'opposé.
- **Produit** : le signe d'abord, puis simplifie avant de multiplier.
- **Division** : multiplie par l'inverse du diviseur ; le diviseur n'est jamais 0.
- **Plusieurs opérations** : parenthèses, puis $\times$ et $\div$, puis $+$ et $-$.
- **Fraction d'une quantité** : multiplie la quantité par la fraction.

Même dénominateur, d non nul

$$\frac{a}{d}+\frac{b}{d}=\frac{a+b}{d}$$

Dénominateurs différents, b et d non nuls

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\times d+c\times b}{b\times d}$$

Soustraire, c'est ajouter l'opposé

$$x-y=x+(-y)$$

Écritures de l'opposé, b non nul

$$-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}$$

Produit, b et d non nuls

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$$

Inverse, a et b non nuls

$$\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=1$$

Quotient, b, c et d non nuls

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$$

Distributivité

$$k\times(x+y)=k\times x+k\times y$$

Les propriétés de ce chapitre sont admises : elles prolongent les règles de calcul de la 1AC. L'opposé et l'inverse sont des définitions.