BURHAN

Opérations sur les nombres rationnels : exercices, niveau examen

2ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/operations-sur-les-rationnels/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Opérations sur les nombres rationnels	Niveau examen	5

Exercice 1 — 6 pts

Différence, produit, puis quotient

On donne $A = \dfrac{7}{12} - \dfrac{5}{8}$ et $B = \left(-\dfrac{10}{9}\right) \times \dfrac{21}{25}$.

1 — 2 pts

Calcule A et donne le résultat sous forme irréductible.

INDICE

Outil : cherche le plus petit multiple commun de 12 et de 8.

CORRIGÉ

Dénominateur commun. Parmi les multiples de 12, le premier qui est aussi multiple de 8 est 24.

On multiplie la première fraction en haut et en bas par 2, la seconde par 3 :

$$\begin{aligned} A &= \frac{14}{24} - \frac{15}{24} \\ &= \frac{-1}{24} \\ &= -\frac{1}{24} \end{aligned}$$

Conclusion. $A = -\dfrac{1}{24}$.

2 — 2 pts

Calcule B en simplifiant avant de multiplier.

INDICE

Outil : décompose chaque numérateur et chaque dénominateur en produit de facteurs.

CORRIGÉ

Signe. Les deux facteurs sont de signes contraires : le produit est négatif.

Décomposition. On garde les produits en attente : $10 = 2 \times 5$, $21 = 3 \times 7$, $9 = 3 \times 3$ et $25 = 5 \times 5$.

$$\begin{aligned} B &= -\frac{10 \times 21}{9 \times 25} \\ &= -\frac{2 \times 5 \times 3 \times 7}{3 \times 3 \times 5 \times 5} \\ &= -\frac{14}{15} \end{aligned}$$

On a barré un facteur 3 et un facteur 5. Il reste $2 \times 7 = 14$ en haut et $3 \times 5 = 15$ en bas.

Conclusion. $B = -\dfrac{14}{15}$.

3 2 pts

En déduire le quotient $B \div A$.

INDICE

Outil : le diviseur est A ; cherche son inverse.

CORRIGÉ

Diviseur non nul : $A = -\dfrac{1}{24}$, et $-\dfrac{1}{24} \neq 0$.

Inverse. On échange le numérateur et le dénominateur, le signe ne change pas : l'inverse de $-\dfrac{1}{24}$ est -24.

Produit. Diviser par A, c'est multiplier par -24. Les deux facteurs sont négatifs : le produit est positif.

$$\begin{aligned} B \div A &= \left(-\frac{14}{15}\right) \times (-24) \\ &= \frac{14 \times 24}{15} \end{aligned}$$

Simplification. $24 = 3 \times 8$ et $15 = 3 \times 5$: on simplifie par 3.

$$\begin{aligned} \frac{14 \times 24}{15} &= \frac{14 \times 8}{5} \\ &= \frac{112}{5} \end{aligned}$$

Conclusion. $B \div A = \dfrac{112}{5}$.

Exercice 2 — 6 pts

Priorités et écriture à étages

1 — 2 pts

Calcule $E = \frac{5}{4} - \frac{3}{4} \div \frac{9}{2}$ en respectant les priorités.

INDICE

Outil : relis l'ordre des calculs.

CORRIGÉ

Diviseur non nul : $\frac{9}{2} \neq 0$.

Division d'abord. Elle passe avant la soustraction. On multiplie par l'inverse $\frac{2}{9}$:

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} \div \frac{9}{2} &= \frac{3}{4} \times \frac{2}{9} \\ &= \frac{6}{36} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Soustraction ensuite. Il reste $E = \frac{5}{4} - \frac{1}{6}$, que l'on écrit sur 12 :

$$\begin{aligned} E &= \frac{15}{12} - \frac{2}{12} \\ &= \frac{13}{12} \end{aligned}$$

Conclusion. $E = \frac{13}{12}$.

2 — 1,5 pts

On pose $F = \dfrac{1 - \frac{2}{5}}{1 + \frac{4}{5}}$. Calcule le numérateur, puis le dénominateur de F.

INDICE

Début : écris $1 = \dfrac{5}{5}$.

CORRIGÉ

On écrit le nombre 1 sous la forme $\dfrac{5}{5}$.

Numérateur.

$$\begin{aligned} 1 - \frac{2}{5} &= \frac{5}{5} - \frac{2}{5} \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Dénominateur.

$$\begin{aligned} 1 + \frac{4}{5} &= \frac{5}{5} + \frac{4}{5} \\ &= \frac{9}{5} \end{aligned}$$

Conclusion. Le numérateur de F vaut $\dfrac{3}{5}$ et son dénominateur vaut $\dfrac{9}{5}$.

3 — 1,5 pts

En déduire F sous forme irréductible.

INDICE

Ensuite : divise le numérateur par le dénominateur, en multipliant par l'inverse.

CORRIGÉ

Le dénominateur $\dfrac{9}{5}$ n'est pas nul : on peut diviser.

D'après la question 2, F est le quotient de $\dfrac{3}{5}$ par $\dfrac{9}{5}$. On multiplie par l'inverse $\dfrac{5}{9}$:

$$\begin{aligned} F &= \frac{3}{5} \times \frac{5}{9} \\ &= \frac{15}{45} \end{aligned}$$

Simplification. $45 = 15 \times 3$: on simplifie par 15.

$$\frac{15}{45} = \frac{1}{3}$$

Conclusion. $F = \dfrac{1}{3}$.

4 1 pts

Calcule le produit $E \times F$.

INDICE

Outil : produit de deux fractions.

CORRIGÉ

On reprend les résultats des questions 1 et 3. Le numérateur du produit est 13×1, son dénominateur est 12×3 :

$$\begin{aligned} E \times F &= \frac{13}{12} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{13 \times 1}{12 \times 3} \\ &= \frac{13}{36} \end{aligned}$$

Le nombre 13 ne divise pas 36, et 13 n'a pas d'autre diviseur que 1 et lui-même : la fraction est irréductible.

Conclusion. $E \times F = \frac{13}{36}$.

Exercice 3 — 8 pts

La récolte d'olives

Une coopérative récolte $1\,200$ kg d'olives. Elle vend les $\frac{5}{8}$ de la récolte au marché. Elle presse les $\frac{2}{3}$ du reste pour faire de l'huile. Elle donne les olives restantes à une association.

1 — 2 pts

Calcule la masse d'olives vendue au marché.

INDICE

Outil : les $\frac{5}{8}$ d'une masse, c'est cette masse multipliée par $\frac{5}{8}$.

CORRIGÉ

La masse vendue est les $\frac{5}{8}$ de $1\,200$ kg :

$$\begin{aligned} \frac{5}{8} \times 1\,200 &= \frac{5 \times 1\,200}{8} \\ &= \frac{6\,000}{8} \\ &= 750 \end{aligned}$$

Conclusion. La coopérative vend 750 kg d'olives au marché.

2 — 1,5 pts

Quelle fraction de la récolte reste-t-il après la vente ?

INDICE

Outil : la récolte entière correspond à 1.

CORRIGÉ

La récolte entière correspond à 1, soit $\frac{8}{8}$. On retire la part vendue :

$$\begin{aligned} 1 - \frac{5}{8} &= \frac{8}{8} - \frac{5}{8} \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Conclusion. Il reste $\frac{3}{8}$ de la récolte après la vente.

3 — 2,5 pts

En déduire la fraction de la récolte qui est pressée, puis la masse pressée.

INDICE

Point délicat : de quelle quantité prend-on les $\frac{2}{3}$?

CORRIGÉ

Fraction pressée. On presse les $\frac{2}{3}$ du reste, et ce reste vaut $\frac{3}{8}$ de la récolte. On calcule donc les $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{8}$:

$$\begin{aligned}\frac{2}{3} \times \frac{3}{8} &= \frac{6}{24} \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

On presse $\frac{1}{4}$ de la récolte.

Masse pressée.

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} \times 1\,200 &= \frac{1\,200}{4} \\ &= 300\end{aligned}$$

Conclusion. La coopérative presse 300 kg d'olives, soit $\frac{1}{4}$ de la récolte.

4 — 2 pts

Quelle fraction de la récolte est donnée à l'association ? Vérifie le résultat avec les masses.

INDICE

Outil : retire de 1 la somme des deux fractions déjà utilisées.

CORRIGÉ

Parts déjà utilisées. On additionne la part vendue et la part pressée, avec $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$:

$$\begin{aligned}\frac{5}{8} + \frac{1}{4} &= \frac{5}{8} + \frac{2}{8} \\ &= \frac{7}{8}\end{aligned}$$

Part donnée. On retire cette somme de la récolte entière :

$$1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$$

Masse donnée.

$$\frac{1}{8} \times 1\,200 = 150$$

Vérification. Les trois masses redonnent toute la récolte : $750 + 300 + 150 = 1\,200$.

Conclusion. L'association reçoit $\frac{1}{8}$ de la récolte, soit 150 kg.

Exercice 4 — 6 pts

Opposé, inverse et signe moins

On donne $x = \dfrac{7}{-12}$.

1 — 1,5 pts

Écris x avec un dénominateur positif. Donne ensuite l'opposé de x et l'inverse de x.

INDICE

Début : un signe moins au dénominateur peut passer devant la fraction.

CORRIGÉ

Dénominateur positif. Le signe moins du dénominateur passe devant la fraction : $\dfrac{7}{-12} = -\dfrac{7}{12}$, donc $x = -\dfrac{7}{12}$.

Opposé. On change le signe : l'opposé de x est $\dfrac{7}{12}$. En effet, $-\dfrac{7}{12} + \dfrac{7}{12} = 0$.

Inverse. On échange le numérateur et le dénominateur, sans changer le signe : l'inverse de x est $-\dfrac{12}{7}$. En effet :

$$\begin{aligned}\left(-\frac{7}{12}\right) \times \left(-\frac{12}{7}\right) &= \frac{84}{84} \\ &= 1\end{aligned}$$

Conclusion. On a $x = -\dfrac{7}{12}$. L'opposé de x est $\dfrac{7}{12}$ et son inverse est $-\dfrac{12}{7}$.

2 — 1,5 pts

En déduire $D = \dfrac{3}{4} - \dfrac{7}{-12}$, en remplaçant la soustraction par l'addition de l'opposé.

INDICE

Outil : retirer un nombre revient à ajouter son opposé.

CORRIGÉ

D'après la question 1, $\dfrac{7}{-12} = -\dfrac{7}{12}$, et l'opposé de ce nombre est $\dfrac{7}{12}$.

Soustraire, c'est ajouter l'opposé : $D = \dfrac{3}{4} + \dfrac{7}{12}$.

Dénominateur commun. $12 = 4 \times 3$, donc $\dfrac{3}{4} = \dfrac{9}{12}$:

$$\begin{aligned}D &= \frac{9}{12} + \frac{7}{12} \\ &= \frac{16}{12}\end{aligned}$$

Simplification. 16 et 12 sont tous deux multiples de 4. On simplifie par 4 :

$$\frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

Conclusion. $D = \dfrac{4}{3}$.

3 1,5 pts

On pose $K = \dfrac{5}{6} - \dfrac{1-9}{12}$. Hamza écrit $K = \dfrac{10-1-9}{12}$ et trouve 0. Explique son erreur, puis calcule K sous forme irréductible.

INDICE

Point délicat : sur quels nombres agit le signe moins placé devant la seconde fraction ?

CORRIGÉ

Première étape. $\dfrac{5}{6} = \dfrac{10}{12}$: sur ce point, Hamza a raison.

L'erreur. Le signe moins placé devant $\dfrac{1-9}{12}$ agit sur toute la fraction, donc sur tout son numérateur. Sur un seul trait de fraction, il faut écrire $10-(1-9)$, avec des parenthèses. Hamza n'a pas changé le signe du 9.

Calcul juste.

$$\begin{aligned} K &= \frac{10-(1-9)}{12} \\ &= \frac{10-(-8)}{12} \\ &= \frac{18}{12} \end{aligned}$$

On simplifie par 6 : $\dfrac{18}{12} = \dfrac{3}{2}$. Comme $\dfrac{3}{2} \neq 0$, le résultat de Hamza est faux.

Conclusion. $K = \dfrac{3}{2}$, et non 0 : Hamza a oublié les parenthèses autour de $1-9$.

4 1,5 pts

Les nombres D et $\frac{3}{4}$ sont-ils opposés ? Sont-ils inverses l'un de l'autre ?

INDICE

Outil : deux nombres opposés ont une somme nulle ; deux nombres inverses ont un produit égal à 1.

CORRIGÉ

Deux nombres sont opposés lorsque leur somme est nulle, et inverses lorsque leur produit vaut 1.

D'après la question 2, $D = \frac{4}{3}$.

Somme.

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} + \frac{3}{4} &= \frac{16}{12} + \frac{9}{12} \\ &= \frac{25}{12} \end{aligned}$$

Or $\frac{25}{12} \neq 0$. Ils ne sont pas opposés.

Produit.

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} &= \frac{12}{12} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ils sont inverses.

Conclusion. Les nombres D et $\frac{3}{4}$ sont inverses l'un de l'autre, mais ils ne sont pas opposés.

Exercice 5 6 pts

La cuve d'eau de pluie

Une cuve récupère l'eau de pluie pour arroser le jardin d'une école. Aujourd'hui, elle est remplie aux $\frac{3}{5}$ de sa capacité : elle contient 270 litres.

1 2 pts

Calcule la capacité de la cuve, en litres.

INDICE

Point délicat : 270 litres ne sont pas la capacité entière ; cherche d'abord ce que vaut $\frac{1}{5}$ de la capacité.

CORRIGÉ

Les 270 litres ne remplissent que les $\frac{3}{5}$ de la cuve. On cherche d'abord ce que vaut un cinquième de la capacité.

Un cinquième. Trois cinquièmes font 270 litres, donc un cinquième fait $270 \div 3 = 90$ litres.

La capacité. La cuve pleine compte cinq cinquièmes : $5 \times 90 = 450$ litres.

Autre méthode. Même résultat par une division : $\frac{3}{5} \neq 0$, et l'on multiplie par l'inverse $\frac{5}{3}$.

$$\begin{aligned} 270 \div \frac{3}{5} &= 270 \times \frac{5}{3} \\ &= \frac{1\,350}{3} \\ &= 450 \end{aligned}$$

Vérification.

$$\frac{3}{5} \times 450 = \frac{1\,350}{5} = 270$$

Conclusion. La cuve a une capacité de 450 litres.

2 1,5 pts

Combien de litres manque-t-il pour remplir la cuve ? Quelle fraction de la capacité cela représente-t-il ?

INDICE

Ensuite : écris le volume qui manque sur la capacité, puis simplifie.

CORRIGÉ

Volume manquant. On retire le volume présent de la capacité : $450 - 270 = 180$ litres.

Fraction de la capacité. Ce volume représente $\frac{180}{450}$ de la capacité. On a $180 = 90 \times 2$ et $450 = 90 \times 5$. On simplifie par 90 :

$$\frac{180}{450} = \frac{2}{5}$$

Vérification. La cuve est remplie aux $\frac{3}{5}$; la part vide vaut donc :

$$\begin{aligned} 1 - \frac{3}{5} &= \frac{5}{5} - \frac{3}{5} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Conclusion. Il manque 180 litres, soit $\frac{2}{5}$ de la capacité.

3 2,5 pts

Un tuyau verse $\frac{15}{2}$ litres d'eau par minute dans la cuve. En déduire le nombre de minutes nécessaires pour la remplir.

INDICE

Outil : chaque minute apporte $\frac{15}{2}$ litres ; divise le volume qui manque par ce nombre.

CORRIGÉ

Le nombre de minutes est le quotient du volume manquant par le volume versé en une minute.

Diviseur non nul : $\frac{15}{2} \neq 0$. On multiplie par son inverse $\frac{2}{15}$:

$$\begin{aligned} 180 \div \frac{15}{2} &= 180 \times \frac{2}{15} \\ &= \frac{360}{15} \\ &= 24 \end{aligned}$$

Vérification. En 24 minutes, le tuyau verse :

$$24 \times \frac{15}{2} = \frac{360}{2} = 180$$

Conclusion. Il faut 24 minutes pour remplir la cuve.