BURHAN

Opérations sur les nombres rationnels : exercices, entraînement

2ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/operations-sur-les-rationnels/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Opérations sur les nombres rationnels	Entraînement	7

Exercice 1

Sommes algébriques de trois fractions

Donne chaque résultat sous forme irréductible.

1

$$A = -\frac{2}{5} + \frac{7}{10} - \frac{1}{4}$$

INDICE

Outil : cherche le plus petit multiple commun de 5, 10 et 4.

CORRIGÉ

Dénominateur commun. 20 est le plus petit nombre qui soit multiple de 5, de 10 et de 4.

On multiplie en haut et en bas par 4, puis par 2, puis par 5 :

$$A = -\frac{8}{20} + \frac{14}{20} - \frac{5}{20}$$

Numérateurs. On calcule de gauche à droite : $-8 + 14 = 6$, puis $6 - 5 = 1$. On obtient $\frac{1}{20}$, qui est irréductible.

Conclusion. $A = \frac{1}{20}$.

2

$$B = \frac{1}{6} - \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right)$$

INDICE

Début : calcule d'abord la parenthèse, sur le dénominateur 12.

CORRIGÉ

La parenthèse. On la calcule en premier, avec le dénominateur 12 :

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} - \frac{2}{3} &= \frac{9}{12} - \frac{8}{12} \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

La différence. Il reste $B = \frac{1}{6} - \frac{1}{12}$. On écrit $\frac{1}{6} = \frac{2}{12}$:

$$\begin{aligned} B &= \frac{2}{12} - \frac{1}{12} \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Conclusion. $B = \frac{1}{12}$.

Exercice 2

Produits à simplifier avant de calculer

Calcule en simplifiant avant d'effectuer les produits.

1

$C = \dfrac{15}{28} \times \dfrac{-21}{10}$

INDICE

Outil : décompose $15 = 3 \times 5$, $21 = 3 \times 7$, $28 = 2 \times 2 \times 7$ et $10 = 2 \times 5$.

CORRIGÉ

Signe. $\dfrac{15}{28}$ est positif et $\dfrac{-21}{10}$ est négatif : le produit est négatif.

Décomposition. On écrit les produits sans les effectuer, puis on décompose : $15 = 3 \times 5$, $21 = 3 \times 7$, $28 = 2 \times 2 \times 7$ et $10 = 2 \times 5$.

$$\begin{aligned} C &= -\frac{15 \times 21}{28 \times 10} \\ &= -\frac{3 \times 5 \times 3 \times 7}{2 \times 2 \times 7 \times 2 \times 5} \\ &= -\frac{9}{8} \end{aligned}$$

Simplification. Les facteurs 5 et 7 sont en haut et en bas : on les barre. Il reste $3 \times 3 = 9$ au numérateur et $2 \times 2 \times 2 = 8$ au dénominateur.

Conclusion. $C = -\dfrac{9}{8}$.

2

$$D = \left(-\frac{6}{7}\right) \times \frac{35}{9} \times \left(-\frac{3}{10}\right)$$

INDICE

Point délicat : applique la règle des signes aux deux premiers facteurs, puis à ce produit et au troisième.

CORRIGÉ

Signe. On applique la règle à deux facteurs, deux fois de suite. D'abord, $\left(-\frac{6}{7}\right) \times \frac{35}{9}$ est négatif (signes contraires).

Ensuite, ce produit négatif, multiplié par $\left(-\frac{3}{10}\right)$, donne un résultat positif (même signe).

Produit. On garde les produits en attente, puis on décompose chaque nombre :

$$\begin{aligned} D &= \frac{6 \times 35 \times 3}{7 \times 9 \times 10} \\ &= \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 3}{7 \times 3 \times 3 \times 2 \times 5} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Simplification. Les facteurs du numérateur, 2, 3, 3, 5 et 7, se trouvent tous au dénominateur : ils se barrent tous, et le quotient vaut 1.

Conclusion. $D = 1$.

Exercice 3

Quotients de nombres négatifs

Donne chaque quotient sous forme irréductible.

1

$E = \left(-\dfrac{9}{14}\right) \div \left(-\dfrac{6}{7}\right)$

INDICE

Outil : l'inverse de $-\dfrac{6}{7}$ est un nombre négatif.

CORRIGÉ

Diviseur non nul : $-\dfrac{6}{7} \neq 0$.

Inverse. L'inverse de $-\dfrac{6}{7}$ est $-\dfrac{7}{6}$, de même signe. Diviser par $-\dfrac{6}{7}$, c'est donc multiplier par $-\dfrac{7}{6}$.

Produit. Les deux facteurs sont négatifs : le produit est positif. On décompose 9, 14 et 6 :

$$\begin{aligned} E &= \frac{9 \times 7}{14 \times 6} \\ &= \frac{3 \times 3 \times 7}{2 \times 7 \times 2 \times 3} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Les facteurs 3 et 7, présents en haut et en bas, ont été barrés.

Conclusion. $E = \dfrac{3}{4}$.

2

$$F = \frac{-12}{25} \div \frac{8}{15}$$

INDICE

Début : écris $F = \frac{-12}{25} \times \frac{15}{8}$, puis cherche le signe.

CORRIGÉ

Diviseur non nul : $\frac{8}{15} \neq 0$. On multiplie par son inverse $\frac{15}{8}$:

$$F = \frac{-12}{25} \times \frac{15}{8}$$

Signe. Un seul des deux facteurs est négatif : le produit est négatif.

Décomposition. $12 = 4 \times 3$, $15 = 3 \times 5$, $25 = 5 \times 5$ et $8 = 4 \times 2$:

$$\begin{aligned} F &= -\frac{12 \times 15}{25 \times 8} \\ &= -\frac{4 \times 3 \times 3 \times 5}{5 \times 5 \times 4 \times 2} \\ &= -\frac{9}{10} \end{aligned}$$

On a barré les facteurs 4 et 5.

Conclusion. $F = -\frac{9}{10}$.

Exercice 4

Le rôle des parenthèses

On considère $A = \frac{2}{3} + \frac{5}{6} \times \frac{4}{5}$ et $B = \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{6}\right) \times \frac{4}{5}$.

1

Calcule A.

INDICE

Outil : sans parenthèses, la multiplication passe avant l'addition.

CORRIGÉ

L'expression n'a pas de parenthèses : la multiplication se fait avant l'addition.

Multiplication. On simplifie ensuite par 10 :

$$\begin{aligned} \frac{5}{6} \times \frac{4}{5} &= \frac{20}{30} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Addition.

$$A = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

Conclusion. $A = \frac{4}{3}$.

2

Calcule B.

INDICE

Outil : les parenthèses passent avant tout le reste.

CORRIGÉ

Cette fois, les parenthèses imposent de faire l'addition en premier.

Parenthèses. On écrit $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$:

$$\begin{aligned}\frac{2}{3} + \frac{5}{6} &= \frac{4}{6} + \frac{5}{6} \\ &= \frac{9}{6} \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Produit.

$$\begin{aligned}B &= \frac{3}{2} \times \frac{4}{5} \\ &= \frac{12}{10} \\ &= \frac{6}{5}\end{aligned}$$

Conclusion. $B = \frac{6}{5}$.

3

Les nombres A et B sont-ils égaux ?

INDICE

Début : écris A et B avec le même dénominateur 15.

CORRIGÉ

Non. Pour comparer A et B, on les écrit avec le même dénominateur 15 :

$$\frac{4}{3} = \frac{20}{15}$$
$$\frac{6}{5} = \frac{18}{15}$$

Les numérateurs 20 et 18 sont différents, donc $A \neq B$.

Conclusion. Les nombres A et B ne sont pas égaux : en changeant l'ordre des calculs, les parenthèses changent le résultat.

Exercice 5

Une écriture à étages

On considère $C = \dfrac{\frac{3}{4} - \frac{1}{6}}{\frac{7}{3} + \frac{1}{2}}$.

1

Calcule le numérateur de C.

INDICE

Outil : réduis $\dfrac{3}{4}$ et $\dfrac{1}{6}$ au dénominateur 12.

CORRIGÉ

Le numérateur de C est $\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{6}$. On prend le dénominateur commun 12, multiple de 4 et de 6 :

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} - \frac{1}{6} &= \frac{9}{12} - \frac{2}{12} \\ &= \frac{7}{12} \end{aligned}$$

Conclusion. Le numérateur de C vaut $\dfrac{7}{12}$.

2

Calcule le dénominateur de C.

INDICE

Outil : réduis $\dfrac{7}{3}$ et $\dfrac{1}{2}$ au dénominateur 6.

CORRIGÉ

Le dénominateur de C est $\dfrac{7}{3} + \dfrac{1}{2}$. On prend le dénominateur commun 6 :

$$\begin{aligned} \frac{7}{3} + \frac{1}{2} &= \frac{14}{6} + \frac{3}{6} \\ &= \frac{17}{6} \end{aligned}$$

Conclusion. Le dénominateur de C vaut $\dfrac{17}{6}$.

3

En déduire C sous forme irréductible.

INDICE

Ensuite : divise le numérateur trouvé par le dénominateur trouvé, en multipliant par l'inverse.

CORRIGÉ

Une écriture à étages est le quotient de son numérateur par son dénominateur. D'après les questions 1 et 2 :

$$C = \frac{7}{12} \div \frac{17}{6}$$

Le dénominateur $\frac{17}{6}$ n'est pas nul : on peut diviser. On multiplie par son inverse $\frac{6}{17}$:

$$\begin{aligned} C &= \frac{7}{12} \times \frac{6}{17} \\ &= \frac{42}{204} \end{aligned}$$

Simplification. $42 = 6 \times 7$ et $204 = 6 \times 34$. On simplifie par 6 :

$$\frac{42}{204} = \frac{7}{34}$$

Conclusion. Sous forme irréductible, $C = \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{6}}{\frac{7}{3} + \frac{1}{2}} = \frac{7}{34}$.

Exercice 6

Calculer astucieusement

1

Calcule $D = \frac{5}{9} \times \frac{13}{4} - \frac{5}{9} \times \frac{1}{4}$ en mettant $\frac{5}{9}$ en facteur.

INDICE

Outil : $k \times x - k \times y = k \times (x - y)$.

CORRIGÉ

Mise en facteur. Les deux produits contiennent le facteur $\frac{5}{9}$:

$$D = \frac{5}{9} \times \left(\frac{13}{4} - \frac{1}{4} \right)$$

Parenthèse. Même dénominateur : $\frac{13}{4} - \frac{1}{4} = \frac{12}{4} = 3$.

Produit. On simplifie ensuite par 3 :

$$\begin{aligned} D &= \frac{5}{9} \times 3 \\ &= \frac{15}{9} \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Conclusion. $D = \frac{5}{3}$.

2

Développe, puis calcule $E = \dfrac{12}{5} \times \left(\dfrac{5}{3} - \dfrac{1}{4}\right)$.

INDICE

Outil : $k \times (x - y) = k \times x - k \times y$; chaque produit se simplifie bien.

CORRIGÉ

Développement. On multiplie $\dfrac{12}{5}$ par chaque terme de la parenthèse :

$$\begin{aligned} E &= \frac{12}{5} \times \frac{5}{3} \\ &\quad - \frac{12}{5} \times \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Premier produit.

$$\frac{12}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{60}{15} = 4$$

Second produit.

$$\frac{12}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

Différence. On écrit $4 = \dfrac{20}{5}$:

$$\begin{aligned} E &= 4 - \frac{3}{5} \\ &= \frac{20}{5} - \frac{3}{5} \\ &= \frac{17}{5} \end{aligned}$$

Conclusion. $E = \dfrac{17}{5}$.

Exercice 7

Les pages du roman

Omar lit un roman de 270 pages. Le premier jour, il lit $\frac{2}{9}$ du livre. Le deuxième jour, il lit $\frac{1}{3}$ du livre.

1

Quelle fraction du livre a-t-il lue en deux jours ?

INDICE

Outil : additionne les deux fractions sur le dénominateur 9.

CORRIGÉ

On additionne les deux fractions lues. Avec $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$:

$$\begin{aligned} \frac{2}{9} + \frac{1}{3} &= \frac{2}{9} + \frac{3}{9} \\ &= \frac{5}{9} \end{aligned}$$

Conclusion. Il a lu $\frac{5}{9}$ du livre en deux jours.

2

Quelle fraction du livre lui reste-t-il à lire ?

INDICE

Outil : le livre entier correspond à 1.

CORRIGÉ

Le livre entier correspond à 1, soit $\frac{9}{9}$. On retire la partie déjà lue :

$$\begin{aligned} 1 - \frac{5}{9} &= \frac{9}{9} - \frac{5}{9} \\ &= \frac{4}{9} \end{aligned}$$

Conclusion. Il lui reste $\frac{4}{9}$ du livre à lire.

3

Combien de pages lui reste-t-il à lire ?

INDICE

Ensuite : prends les $\frac{4}{9}$ de 270.

CORRIGÉ

Les pages restantes représentent les $\frac{4}{9}$ des 270 pages :

$$\begin{aligned}\frac{4}{9} \times 270 &= \frac{4 \times 270}{9} \\ &= \frac{1\,080}{9} \\ &= 120\end{aligned}$$

Autre calcul : $270 \div 9 = 30$, puis $4 \times 30 = 120$.

Conclusion. Il lui reste 120 pages à lire.