BURHAN

Opérations sur les nombres rationnels

2ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/operations-sur-les-rationnels/cours

Chapitre	Semestre
Opérations sur les nombres rationnels	Semestre 1

Partager, ajouter, multiplier des parts

Yasmine partage un gâteau avec sa famille. Hier, elle en a mangé $\frac{1}{4}$. Aujourd'hui, elle en mange $\frac{1}{3}$.

Dans $\frac{1}{4}$, le **dénominateur** 4 dit en combien de parts égales on coupe le gâteau. Le **numérateur** 1 dit combien de parts on prend.

Quelle part du gâteau Yasmine a-t-elle mangée en tout ?

Devine : Deux jours de gâteau

Prédis le résultat : combien vaut $\frac{1}{4} + \frac{1}{3}$?

A. $\frac{2}{7}$

Faux.

Tu as ajouté les numérateurs, puis les dénominateurs. Mais des quarts et des tiers ne sont pas des parts de même taille : on ne peut pas les compter ensemble.

B. $\frac{7}{12}$

Juste.

Un quart, c'est 3 parts sur 12 ; un tiers, c'est 4 parts sur 12. En tout, 7 parts sur 12.

C. $\frac{1}{12}$

Faux.

Tu as multiplié les deux fractions. Or Yasmine ajoute deux parts du gâteau : on cherche une somme, pas un produit.

D. $\frac{2}{12}$

Faux.

Tu as bien pensé aux douzièmes. Mais un quart vaut 3 douzièmes et un tiers en vaut 4, pas 1 chacun.

Correction

Coupe le gâteau en 12 parts égales.

Un quart du gâteau, c'est 3 parts : $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$.

Un tiers, c'est 4 parts : $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$.

Les deux fractions s'écrivent maintenant en douzièmes. Il suffit de compter les parts :

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}+\frac{1}{3} &= \frac{3}{12}+\frac{4}{12}\\ &= \frac{7}{12}\end{aligned}$$

Il reste $\frac{5}{12}$ du gâteau. Son frère Adam en mange la moitié. Quelle part du gâteau entier mange-t-il ?

Pour répondre, il faut savoir additionner et multiplier des **nombres rationnels**. Un nombre rationnel s'écrit $\frac{a}{b}$, avec a et b entiers relatifs et $b \neq 0$.

Par exemple, $\frac{3}{4}$, $-\frac{2}{5}$ et $7 = \frac{7}{1}$ sont des nombres rationnels.

Dans ce chapitre, tu apprends les quatre opérations sur ces nombres.

Additionner et soustraire avec le même dénominateur

Colorier une bande

Devine : Une bande de sept cases

Une bande de papier est partagée en 7 cases égales. Tu colories $\frac{2}{7}$ de la bande en bleu, puis $\frac{3}{7}$ en rouge. Quelle part de la bande est coloriée ?

A. $\frac{5}{14}$

Faux.

Tu as ajouté les dénominateurs. Or la bande a toujours 7 cases : le dénominateur reste 7.

B. $\frac{6}{7}$

Faux.

Tu as multiplié 2 par 3. On réunit des cases : 2 cases, plus 3 cases.

C. $\frac{5}{7}$

Juste.

2 cases bleues et 3 cases rouges : 5 cases sur 7.

D. $\frac{6}{49}$

Faux.

Tu as multiplié les deux fractions. Or on réunit deux parts de la bande : c'est une somme.

Correction

Les 7 cases ont la même taille. On colorie 2 cases, puis 3 cases : $2+3=5$ cases.

Donc :

$$\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{5}{7}$$

Rappel de 1AC : pour additionner deux fractions positives de même dénominateur, on additionne les numérateurs et on garde le dénominateur. Cette règle reste vraie avec des numérateurs négatifs.

La règle du même dénominateur

Propriété : Somme et différence de deux nombres rationnels de même dénominateur

Soit a, b et d trois nombres entiers relatifs, avec $d \neq 0$.

Pour **additionner** deux nombres rationnels de même dénominateur, on additionne les numérateurs et on garde le dénominateur :

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d}.$$

Pour les **soustraire**, on soustrait les numérateurs et on garde le dénominateur :

$$\frac{a}{d} - \frac{b}{d} = \frac{a-b}{d}.$$

Remarque

Ce résultat est admis. Il prolonge aux nombres relatifs la règle vue en 1AC.

Un résultat se donne **simplifié**. Simplifier une fraction, c'est diviser son numérateur et son dénominateur par un même entier non nul. Quand on ne peut plus simplifier, la fraction est **irréductible**.

On écrit aussi le résultat avec un dénominateur positif.

Exemple : un numérateur négatif

Calculons $A = \frac{-4}{9} + \frac{7}{9}$.

Les deux nombres ont le même dénominateur 9. On additionne les numérateurs et on garde 9 :

$$A = \frac{-4+7}{9} = \frac{3}{9}$$

Simplification par 3 : $A = \frac{1}{3}$.

Soustraire

Exemple : une différence négative

Calculons $B = \frac{5}{12} - \frac{11}{12}$.

Ici aussi, le dénominateur est le même : 12. On soustrait les numérateurs :

$$B = \frac{5 - 11}{12} = \frac{-6}{12}$$

Simplification par 6 : $B = \frac{-1}{2}$.

Vérifie : Le bon résultat

Quel est le résultat simplifié de $\frac{7}{15} + \frac{-2}{15}$?

A. $\frac{1}{3}$

Juste.

$7 + (-2) = 5$, puis $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ après simplification par 5.

B. $\frac{9}{15}$

Faux.

Tu as calculé $7 + 2$. Or le second numérateur est -2 : $7 + (-2) = 5$.

C. $\frac{5}{30}$

Faux.

Tu as ajouté les dénominateurs. Or le dénominateur 15 ne change pas.

D. $\frac{5}{15}$

Faux.

Le calcul est juste, mais la fraction n'est pas encore simplifiée : 5 divise 5 et 15.

Correction

Le dénominateur 15 est commun aux deux fractions : on additionne les numérateurs.

$$\frac{7}{15} + \frac{-2}{15} = \frac{7 + (-2)}{15} = \frac{5}{15}$$

Simplification par 5 : le résultat est $\frac{1}{3}$.

À toi

À toi : Une différence à simplifier

Calcule $C = \frac{3}{10} - \frac{9}{10}$ et donne le résultat simplifié.

Indice 1

Les deux fractions ont le même dénominateur : garde-le et soustrais les numérateurs.

Indice 2

Au numérateur, calcule $3 - 9$.

Indice 3

Point délicat : $3 - 9$ est négatif ; pense à simplifier.

Réponse
Les deux fractions ont le dénominateur 10 : on le garde et on soustrait les numérateurs.

$$C = \frac{3 - 9}{10} = \frac{-6}{10}$$

Simplification par 2 : $C = \frac{-3}{5}$.

Tu sais maintenant additionner et soustraire deux nombres rationnels de même dénominateur, même avec des numérateurs négatifs.

L'opposé d'un nombre rationnel

Obtenir zéro

Rappel de 1AC : deux nombres relatifs sont **opposés** quand leur somme vaut 0. Par exemple, 5 et -5 sont opposés, car $5 + (-5) = 0$.

Devine : Revenir à zéro

Quel nombre faut-il ajouter à $\frac{3}{5}$ pour obtenir 0 ?

A. $\frac{5}{3}$
Faux.
Tu as retourné la fraction. Or $\frac{3}{5} + \frac{5}{3} = \frac{34}{15}$, pas 0.

B. $\frac{-3}{5}$
Juste.
$\frac{3}{5} + \frac{-3}{5} = \frac{3 + (-3)}{5} = \frac{0}{5} = 0$.

C. $\frac{-5}{3}$
Faux.
Tu as changé le signe, mais tu as aussi retourné la fraction. La somme vaut $\frac{-16}{15}$, pas 0.

D. $\frac{3}{5}$
Faux.
Ajouter $\frac{3}{5}$ double le nombre : $\frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$.

Correction
On cherche un numérateur qui annule 3 : c'est -3.

On garde le dénominateur 5 :

$$\frac{3}{5} + \frac{-3}{5} = \frac{3 + (-3)}{5} = 0$$

Le nombre cherché est $\frac{-3}{5}$.

Définition : Opposé d'un nombre rationnel

Deux nombres sont **opposés** lorsque leur somme est égale à 0.

Soit a et b deux nombres entiers relatifs, avec $b \neq 0$. L'opposé du nombre rationnel $\frac{a}{b}$ est le nombre $-\frac{a}{b}$, et

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}.$$

Ainsi $\frac{a}{b} + \left(-\frac{a}{b}\right) = 0$. Le nombre 0 est son propre opposé.

Trois écritures

Exemple : trois écritures du même nombre

L'opposé de $\frac{3}{5}$ s'écrit de trois façons :

$$-\frac{3}{5} = \frac{-3}{5} = \frac{3}{-5}$$

Dans un résultat, on choisit $-\frac{3}{5}$ ou $\frac{-3}{5}$: le dénominateur est positif.

Rappel de 1AC : le quotient de deux nombres négatifs est positif. Ainsi $\frac{-7}{-2} = \frac{7}{2}$.

Vérifie : L'intrus

Lequel de ces nombres n'est **pas** égal à $-\frac{4}{9}$?

A. $\frac{-4}{9}$

Faux.

Il est égal à $-\frac{4}{9}$: le signe moins peut monter au numérateur.

B. $\frac{4}{-9}$

Faux.

Il est égal à $-\frac{4}{9}$: le signe moins peut descendre au dénominateur.

C. $\frac{-4}{-9}$

Juste.

Deux signes moins : le quotient est positif. $\frac{-4}{-9} = \frac{4}{9}$, l'opposé de $-\frac{4}{9}$.

D. $-\frac{8}{18}$

Faux.
Il est égal à $-\frac{4}{9}$: simplifie $\frac{8}{18}$ par 2.

Correction
$\frac{-4}{9}$ et $\frac{4}{-9}$ sont deux écritures de $-\frac{4}{9}$.
En simplifiant par 2, on a aussi $-\frac{8}{18} = -\frac{4}{9}$.
Seul $\frac{-4}{-9}$ est différent : il vaut $\frac{4}{9}$, qui est positif.

Exemple : des opposés

- L'opposé de $\frac{-2}{7}$ est $\frac{2}{7}$.
- L'opposé de $-\frac{1}{6}$ est $\frac{1}{6}$.
- L'opposé de 0 est 0.

Contrôle du premier cas : les deux fractions ont le dénominateur 7, et leur somme est nulle.

$$\frac{-2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{-2+2}{7} = 0$$

Le moins devant une fraction

Un signe moins devant une fraction porte sur toute la fraction.

Quand on le fait entrer dans le numérateur, il porte sur **tout** le numérateur. On écrit donc des parenthèses autour du numérateur.

Trouve l'erreur : Le calcul de Lina

Lina doit calculer $\frac{9}{13} - \frac{4-7}{13}$. Quel est le bon résultat ?

A. $\frac{-2}{13}$
Faux.
C'est le calcul de $9 - 4 - 7$: les parenthèses autour de $4 - 7$ ont été oubliées.

B. $\frac{6}{13}$
Faux.
Tu as bien trouvé $4 - 7 = -3$. Mais $9 - (-3) = 9 + 3 = 12$, pas 6.

C. $\frac{-12}{13}$
Faux.
Le signe est faux : $9 - (-3)$ est positif.

D. $\dfrac{12}{13}$

Juste.

Avec les parenthèses : $9-(4-7)=9-(-3)=12$.

Correction

Les deux fractions ont le dénominateur 13. Le moins porte sur tout le numérateur $4-7$:

$$\frac{9}{13}-\frac{4-7}{13}=\frac{9-(4-7)}{13}$$

On calcule d'abord la parenthèse : $4-7=-3$.

Soustraire -3, c'est ajouter 3 : $9-(-3)=9+3=12$.

Le résultat est $\dfrac{12}{13}$.

Attention : le moins porte sur tout le numérateur

✗ $\dfrac{5}{8}-\dfrac{1-4}{8}=\dfrac{5-1-4}{8}=0$: les parenthèses manquent.

✓ Avec les parenthèses autour de $1-4$:

$$\begin{aligned}\frac{5}{8}-\frac{1-4}{8}&=\frac{5-(1-4)}{8}\\&=\frac{5+3}{8}=1\end{aligned}$$

Le signe moins porte sur tout le numérateur $1-4$.

À toi

À toi : Des opposés à écrire

Écris l'opposé de chaque nombre, avec un dénominateur positif : $\dfrac{5}{-8}$ et $-\dfrac{-3}{4}$.

Indice 1

Commence par écrire chaque nombre avec un dénominateur positif.

Indice 2

Le nombre $-\dfrac{-3}{4}$ est l'opposé d'un nombre négatif. Quel est son signe ?

Indice 3

Point délicat : l'opposé change seulement le signe ; contrôle que la somme vaut 0.

Réponse

On a $\dfrac{5}{-8}=-\dfrac{5}{8}$: son opposé est $\dfrac{5}{8}$.

On a $-\dfrac{-3}{4}=\dfrac{3}{4}$: son opposé est $-\dfrac{3}{4}$.

> Contrôle avec le dénominateur 4 : $\frac{3}{4} + \frac{-3}{4} = 0$.

Retiens : l'opposé d'un nombre non nul a le signe contraire, et un nombre plus son opposé donne 0. Tu t'en sers dès la section suivante pour soustraire.

Additionner et soustraire avec des dénominateurs différents

Une bande de six cases

Devine : Une demie et un tiers

Une bande est partagée en 6 cases égales. Tu colories une demie de la bande, puis un tiers. Quelle part de la bande est coloriée ?

A. $\frac{5}{6}$

Juste.

Une demie, c'est 3 cases ; un tiers, c'est 2 cases. En tout, 5 cases sur 6.

B. $\frac{2}{5}$

Faux.

Tu as ajouté les numérateurs, puis les dénominateurs. Mais demies et tiers ne sont pas des parts de même taille.

C. $\frac{1}{6}$

Faux.

Tu as multiplié $\frac{1}{2}$ par $\frac{1}{3}$. On réunit deux parts : c'est une somme.

D. $\frac{2}{6}$

Faux.

Une demie ne fait pas une case : elle en fait 3. Un tiers en fait 2.

Correction

Une demie de la bande, c'est 3 cases sur 6 : $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$.

Un tiers de la bande, c'est 2 cases sur 6 : $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$.

Les deux parts sont maintenant comptées en sixièmes. On ajoute les cases :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} &= \frac{3}{6} + \frac{2}{6} \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Pour ajouter deux parts, il faut des cases de même taille. Les sixièmes conviennent, car 6 est un multiple de 2 et de 3.

Un multiple commun non nul des deux dénominateurs s'appelle un **dénominateur commun**. Le plus petit multiple commun non nul des dénominateurs donne le **plus petit dénominateur commun**.

La règle générale

Propriété : Somme et différence de deux nombres rationnels quelconques

Pour additionner ou soustraire deux nombres rationnels de dénominateurs différents, on les écrit d'abord avec un **même dénominateur**, puis on applique la règle du même dénominateur.

Soit a, b, c et d des nombres entiers relatifs, avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times d} + \frac{c \times b}{d \times b} = \frac{a \times d + c \times b}{b \times d}.$$

Soustraire un nombre rationnel, c'est ajouter son opposé : pour tous nombres rationnels x et y,

$$x - y = x + (-y).$$

Remarque

Ce résultat est admis. Tu l'as constaté sur la bande de six cases.

En clair : pour ajouter deux fractions, tu les écris avec un même dénominateur, puis tu ajoutes les numérateurs. Pour soustraire un nombre, tu ajoutes son opposé.

Exemple : le produit des dénominateurs

Calculons $\frac{2}{5} + \frac{-1}{3}$.

Le produit des deux dénominateurs donne un dénominateur commun : $5 \times 3 = 15$.

Transformation : on multiplie le haut et le bas de la première fraction par 3, ceux de la seconde par 5.

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \times 3}{5 \times 3} = \frac{6}{15}$$

$$\frac{-1}{3} = \frac{-1 \times 5}{3 \times 5} = \frac{-5}{15}$$

Les deux fractions ont alors le dénominateur 15. On additionne les numérateurs :

$$\frac{6}{15} + \frac{-5}{15} = \frac{6 + (-5)}{15} = \frac{1}{15}$$

La méthode

Méthode : additionner ou soustraire deux nombres rationnels

1. **Dénominateurs positifs.** Si un dénominateur est négatif, change d'écriture : $\frac{3}{-4} = \frac{-3}{4}$.
2. **Dénominateur commun.** Cherche un multiple commun non nul des dénominateurs, de préférence le plus petit : le plus petit dénominateur commun.
3. **Transformation.** Multiplie le numérateur et le dénominateur de chaque fraction par le même entier.
4. **Numérateurs.** Additionne ou soustrais les numérateurs ; le dénominateur commun ne bouge pas.
5. **Simplification.** Rends le résultat irréductible.

Vérifie : Le plus petit dénominateur commun

Pour calculer $\frac{5}{6} - \frac{3}{4}$, quel est le plus petit dénominateur commun ?

A. 24

Faux.

24 convient, car c'est un multiple de 6 et de 4. Mais il y a plus petit, et les calculs seront plus longs.

B. 12

Juste.

12 est un multiple de 6 et de 4, et aucun multiple commun non nul n'est plus petit.

C. 10

Faux.

$10 = 6 + 4$, mais 10 n'est pas un multiple de 6.

D. 2

Faux.

2 divise 6 et 4, mais ce n'est pas un multiple de 6.

Correction

Les multiples de 6 sont $6, 12, 18, 24$… Le premier qui est aussi un multiple de 4 est 12.

Avec ce dénominateur :

$$\begin{aligned}\frac{5}{6} - \frac{3}{4} &= \frac{10}{12} - \frac{9}{12} \\ &= \frac{1}{12}\end{aligned}$$

Exemple : le plus petit dénominateur commun

Calculons $D = \frac{7}{10} - \frac{4}{15}$.

Dénominateur commun : 30, le plus petit multiple commun de 10 et de 15. On réécrit chaque fraction sur 30 : $\frac{7}{10} = \frac{21}{30}$ et $\frac{4}{15} = \frac{8}{30}$.

On soustrait ensuite les numérateurs :

$$D = \frac{21 - 8}{30} = \frac{13}{30}$$

Simplification : 13 et 30 n'ont aucun diviseur commun autre que 1. La fraction $\frac{13}{30}$ est irréductible.

Soustraire un négatif

Exemple : soustraire, c'est ajouter l'opposé

Calculons $E = \frac{1}{4} - \left(-\frac{5}{6}\right)$.

Soustraire, c'est ajouter l'opposé : $E = \frac{1}{4} + \frac{5}{6}$.

Le dénominateur commun 12 convient pour 4 et pour 6 : $E = \frac{3}{12} + \frac{10}{12}$.

On additionne les numérateurs : $E = \frac{13}{12}$.

Exemple : trois nombres

Une **somme algébrique** est une suite d'additions et de soustractions. Calculons $F = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{5}{6}$.

Le nombre 6 est un dénominateur commun aux trois fractions :

$$F = \frac{3}{6} - \frac{4}{6} + \frac{5}{6}$$

On calcule sur les numérateurs :

$$F = \frac{3 - 4 + 5}{6} = \frac{4}{6}$$

Simplification par 2 : $F = \frac{2}{3}$.

Deux pièges

Attention : on n'additionne pas les dénominateurs

✗ $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{3}{7}$: on a ajouté les numérateurs, puis les dénominateurs.

✓ On passe d'abord par le dénominateur commun 12 :

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{8}{12}+\frac{3}{12}$$
$$=\frac{11}{12}$$

Trouve l'erreur : La simplification de Karim

Un **terme** est un nombre qu'on ajoute ou qu'on soustrait. Un **facteur** est un nombre qu'on multiplie.

Karim écrit : $\frac{3+4}{3+8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$. Que penses-tu de son calcul ?

A. Son calcul est juste, car $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

Faux.

La dernière égalité est juste, mais la première est fausse : $\frac{3+4}{3+8}=\frac{7}{11}$.

B. Il fallait aussi barrer les 4 et les 8.

Faux.

On ne barre jamais les termes d'une somme. Le numérateur vaut 7 et le dénominateur 11.

C. Le bon résultat est 2, pas $\frac{1}{2}$.

Faux.

Tu as retourné la fraction. Et la première égalité reste fausse.

D. Il a barré un terme, pas un facteur.

Juste.

3 est ajouté, pas multiplié. On calcule d'abord : $\frac{3+4}{3+8}=\frac{7}{11}$.

Correction

On ne simplifie que des facteurs communs au numérateur et au dénominateur. Ici, 3 est un terme : il est ajouté, pas multiplié.

On calcule donc d'abord le haut et le bas : $\frac{3+4}{3+8}=\frac{7}{11}$, qui est irréductible.

Attention : on ne simplifie pas une somme

✗ $\frac{5+2}{5+9}=\frac{2}{9}$: on a barré un terme.

✓ On calcule le haut et le bas, puis on simplifie par 7 :

$$\frac{5+2}{5+9}=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}$$

On ne barre que des **facteurs** communs, comme dans $\frac{5\times 2}{5\times 9}=\frac{2}{9}$.

Rédiger et t'exercer

Remarque : Coin devoir : calculer une différence

En devoir, écris chaque étape et nomme la règle. Voici ce qui est attendu pour $G = \frac{3}{4} - \frac{5}{6}$.

« Le plus petit dénominateur commun de 4 et de 6 est 12. J'écris les deux fractions sur 12, puis je soustrais les numérateurs. »

$$\begin{aligned} G &= \frac{9}{12} - \frac{10}{12} \\ &= \frac{9-10}{12} = -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

À toi : Un dénominateur négatif

Calcule $H = \frac{3}{8} - \frac{1}{-6}$ et donne le résultat simplifié.

Indice 1

Commence par écrire $\frac{1}{-6}$ avec un dénominateur positif.

Indice 2

Tu obtiens $H = \frac{3}{8} - \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{3}{8} + \frac{1}{6}$. Cherche le plus petit dénominateur commun de 8 et de 6.

Indice 3

Point délicat : soustraire un nombre négatif, c'est ajouter son opposé, qui est positif.

Réponse

Dénominateur positif d'abord : $\frac{1}{-6} = -\frac{1}{6}$.

Soustraire, c'est ajouter l'opposé : $H = \frac{3}{8} + \frac{1}{6}$.

Le plus petit dénominateur commun de 8 et de 6 est 24 :

$$H = \frac{9}{24} + \frac{4}{24} = \frac{13}{24}$$

Simplification : 13 et 24 n'ont aucun facteur commun autre que 1. La fraction $\frac{13}{24}$ est irréductible.

Tu sais maintenant additionner et soustraire deux nombres rationnels quelconques. C'est le geste que tu emploieras le plus dans la suite.

Multiplier des nombres rationnels

La moitié des trois quarts

Devine : La moitié d'un reste

Il reste les $\frac{3}{4}$ d'un gâteau. Tu en manges la moitié. Quelle part du gâteau entier as-tu mangée ?

A. $\frac{3}{2}$

Faux.
Tu as multiplié par 2 au lieu de prendre la moitié. Tu ne peux pas manger plus que le gâteau entier.

B. $\frac{1}{4}$
Faux.
Tu as calculé $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$. Or tu manges la moitié du reste, pas une demie du gâteau entier.

C. $\frac{3}{8}$
Juste.
Chaque quart coupé en deux donne des huitièmes : la moitié de 3 quarts, c'est 3 huitièmes.

D. $\frac{4}{6}$
Faux.
Tu as ajouté les numérateurs et les dénominateurs de $\frac{1}{2}$ et de $\frac{3}{4}$: c'est le piège de la somme. Ici, tu prends la moitié d'une part : on multiplie.

Correction
Coupe chaque quart en deux : le gâteau entier compte 8 parts égales.

Les $\frac{3}{4}$ font 6 parts ; leur moitié fait 3 parts.

Tu as mangé $\frac{3}{8}$ du gâteau.

Prendre la moitié d'un nombre, c'est le multiplier par $\frac{1}{2}$. Ainsi :

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{1 \times 3}{2 \times 4} = \frac{3}{8}$$

On multiplie les numérateurs entre eux, et les dénominateurs entre eux.

La règle du produit

Rappel de 1AC : pour le signe d'un produit de deux nombres non nuls, regarde leurs signes. Un seul facteur négatif rend le produit négatif ; deux facteurs négatifs le rendent positif : c'est la **règle des signes**. Si un facteur est nul, le produit est nul.

Propriété : Produit de deux nombres rationnels

Pour **multiplier** deux nombres rationnels, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Soit a, b, c et d des nombres entiers relatifs, avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}.$$

Le signe du produit suit la **règle des signes** : le produit de deux nombres de même signe est positif ; le produit de deux nombres de signes contraires est négatif.

En particulier, pour tout nombre entier relatif k : $k \times \dfrac{a}{b} = \dfrac{k \times a}{b}$.

Remarque

Ce résultat est admis. Il prolonge le produit des fractions et la règle des signes vus en 1AC.

En clair : en haut, on multiplie les numérateurs ; en bas, on multiplie les dénominateurs. Le signe du résultat vient de la règle des signes.

Exemple : le signe d'abord

Calculons $\dfrac{-2}{3} \times \dfrac{5}{7}$. Les signes sont contraires : le produit est négatif. On multiplie les numérateurs, puis les dénominateurs :

$$\begin{aligned} \frac{-2}{3} \times \frac{5}{7} &= -\frac{2 \times 5}{3 \times 7} \\ &= -\frac{10}{21} \end{aligned}$$

Calculons $\left(-\dfrac{3}{4}\right) \times \left(-\dfrac{5}{2}\right)$. Les deux nombres ont le même signe : le produit est positif.

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{3}{4}\right) \times \left(-\frac{5}{2}\right) \\ &= \frac{3 \times 5}{4 \times 2} = \frac{15}{8} \end{aligned}$$

Multiplier par un entier

Exemple : un entier fois une fraction

Un entier k s'écrit $\dfrac{k}{1}$: on multiplie seulement le numérateur par k. Calculons $6 \times \left(-\dfrac{5}{9}\right)$.

Les signes sont contraires, donc le produit est négatif. Produit par un entier :

$$\begin{aligned} 6 \times \left(-\frac{5}{9}\right) &= -\frac{6 \times 5}{9} \\ &= -\frac{30}{9} \end{aligned}$$

Simplification par 3 : le résultat est $-\dfrac{10}{3}$.

Vérifie : Un entier fois une fraction

Quel est le résultat simplifié de $4 \times \frac{3}{8}$?

A. $\frac{3}{2}$

Juste.

$4 \times \frac{3}{8} = \frac{12}{8}$, puis on simplifie par 4.

B. $\frac{12}{32}$

Faux.

Tu as multiplié aussi le dénominateur par 4. Or $4 = \frac{4}{1}$: le dénominateur est multiplié par 1.

C. $\frac{7}{8}$

Faux.

Tu as ajouté 4 au numérateur au lieu de le multiplier.

D. $\frac{3}{32}$

Faux.

Tu as multiplié le dénominateur par 4 au lieu du numérateur.

Correction

On écrit $4 = \frac{4}{1}$: seul le numérateur est multiplié.

$$4 \times \frac{3}{8} = \frac{4 \times 3}{8} = \frac{12}{8}$$

Simplification par 4 : $\frac{3}{2}$.

Simplifier avant de multiplier

Méthode : multiplier des nombres rationnels

1. **Le signe.** Trouve le signe du produit avec la règle des signes.
2. **Le produit écrit.** Écris le produit des numérateurs et celui des dénominateurs, sans les effectuer.
3. **La simplification.** Décompose chaque nombre en produit de petits facteurs, puis barre les facteurs communs en haut et en bas.
4. **Le calcul.** Multiplie les facteurs qui restent.

Exemple : simplifier avant de calculer

Calculons $P = \frac{10}{21} \times \left(-\frac{14}{15}\right)$.

Les signes sont contraires : P est négatif. On écrit le produit sans l'effectuer :

$$P = -\frac{10 \times 14}{21 \times 15}$$

Décomposition de chaque nombre en petits facteurs :

$$P = -\frac{2 \times 5 \times 2 \times 7}{3 \times 7 \times 3 \times 5}$$

Simplification par 5 et par 7 :

$$P = -\frac{2 \times 2}{3 \times 3} = -\frac{4}{9}$$

Vérifie : Un produit à simplifier

Quel est le résultat simplifié de $\frac{9}{4} \times \frac{8}{15}$?

A. $\frac{17}{19}$

Faux.

Tu as ajouté les numérateurs et les dénominateurs. Pour un produit, on multiplie.

B. $\frac{72}{60}$

Faux.

Le produit est juste, mais il n'est pas simplifié : 12 divise 72 et 60.

C. $\frac{12}{5}$

Faux.

Tu as simplifié $\frac{8}{4}$ en 4. Or $8 = 2 \times 4$: il reste 2.

D. $\frac{6}{5}$

Juste.

$\frac{9 \times 8}{4 \times 15} = \frac{3 \times 3 \times 2 \times 4}{4 \times 3 \times 5}$: on barre 4 et 3, il reste $\frac{6}{5}$.

Correction

Les deux nombres sont positifs : le produit est positif.

On écrit le produit, puis on décompose :

$$\frac{9 \times 8}{4 \times 15} = \frac{3 \times 3 \times 2 \times 4}{4 \times 3 \times 5}$$

Simplification par 4 et par 3 : $\frac{3 \times 2}{5} = \frac{6}{5}$.

Une fraction d'une quantité

Méthode : prendre une fraction d'une quantité

1. **Une fraction d'une quantité.** Prendre $\frac{a}{b}$ d'une quantité, c'est multiplier cette quantité par $\frac{a}{b}$.

2. **Une fraction d'une fraction.** Prendre une fraction d'une autre fraction, c'est multiplier les deux fractions.
3. **La part qui reste.** Le tout vaut 1 : on retire de 1 la somme des parts.
4. **La réponse.** On conclut par une phrase, avec l'unité.

Exemple : un terrain à planter

Un agriculteur a un terrain de 600 mètres carrés. Il plante des tomates sur les $\frac{2}{5}$ du terrain et des oignons sur le quart.

Les tomates. Fraction d'une quantité : on multiplie 600 par $\frac{2}{5}$.

$$\frac{2}{5} \times 600 = \frac{1200}{5} = 240$$

Les tomates occupent 240 mètres carrés.

La part plantée. Avec le dénominateur commun 20 :

$$\begin{aligned} \frac{2}{5} + \frac{1}{4} &= \frac{8}{20} + \frac{5}{20} \\ &= \frac{13}{20} \end{aligned}$$

La part qui reste. Le terrain entier vaut 1 : il reste $1 - \frac{13}{20} = \frac{7}{20}$ du terrain, et $\frac{7}{20} \times 600 = 210$.

Il reste 210 mètres carrés à planter.

À toi

À toi : Deux facteurs négatifs

Calcule $Q = \left(-\frac{12}{25}\right) \times \left(-\frac{15}{8}\right)$ en simplifiant avant de multiplier.

Indice 1
Commence par le signe : les deux facteurs sont négatifs.
Indice 2
Écris le produit des numérateurs et celui des dénominateurs, puis décompose 12, 15, 25 et 8 en petits facteurs.
Indice 3
Point délicat : barre seulement un facteur présent en haut et en bas.

Réponse
Règle des signes : les deux facteurs sont négatifs, donc Q est positif.

On écrit le produit, puis on décompose :

$$\begin{aligned} Q &= \frac{12 \times 15}{25 \times 8} \\ &= \frac{3 \times 4 \times 3 \times 5}{5 \times 5 \times 4 \times 2} \end{aligned}$$

Simplification par 4 et par 5 : $Q = \frac{3 \times 3}{5 \times 2} = \frac{9}{10}$.

Tu peux maintenant répondre à la question du début du chapitre. Adam mange la moitié de $\frac{5}{12}$ du gâteau :

$$\frac{1}{2} \times \frac{5}{12} = \frac{5}{24}$$

Il a mangé $\frac{5}{24}$ du gâteau entier.

L'inverse d'un nombre rationnel

Un produit égal à un

Devine : Revenir à un

Par quel nombre faut-il multiplier $\frac{2}{3}$ pour obtenir 1 ?

A. $-\frac{2}{3}$

Faux.

C'est l'opposé : $\frac{2}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) = 0$. Mais le produit vaut $-\frac{4}{9}$.

B. $\frac{3}{2}$

Juste.

$\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{6}{6} = 1$.

C. $\frac{1}{3}$

Faux.

$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$, pas 1.

D. $\frac{1}{2}$

Faux.

$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, pas 1.

Correction

On retourne la fraction : le numérateur et le dénominateur échangent leur place.

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} &= \frac{2 \times 3}{3 \times 2} \\ &= \frac{6}{6} = 1 \end{aligned}$$

> Le nombre cherché est $\frac{3}{2}$.

Les nombres $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{2}$ ont un produit égal à 1. On dit qu'ils sont **inverses** l'un de l'autre. Pour trouver l'inverse d'une fraction non nulle, on la retourne.

Définition : Inverse d'un nombre rationnel non nul

Deux nombres sont **inverses** l'un de l'autre lorsque leur produit est égal à 1.

Soit x un nombre rationnel **non nul**. Son inverse se note $\frac{1}{x}$: c'est le nombre tel que $x \times \frac{1}{x} = 1$.

Soit a et b deux nombres entiers relatifs **non nuls**. L'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$, car $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{a \times b}{b \times a} = 1$.

Le nombre 0 n'a pas d'inverse : le produit de 0 par n'importe quel nombre est égal à 0, jamais à 1.

Trouver des inverses

Exemple : des inverses

- $5 = \frac{5}{1}$: l'inverse de 5 est $\frac{1}{5}$.
- L'inverse de $\frac{1}{9}$ est $\frac{9}{1} = 9$.
- L'inverse de $-\frac{4}{7}$ est $-\frac{7}{4}$.

Contrôle du dernier cas avec la règle des signes : deux facteurs négatifs donnent un produit positif.

$$\left(-\frac{4}{7}\right) \times \left(-\frac{7}{4}\right) = \frac{28}{28} = 1$$

Le nombre 0 n'a pas d'inverse. Si tu multiplies 0 par un nombre, tu obtiens 0, jamais 1. C'est pour cela qu'on ne divise jamais par 0.

Vérifie : Le signe de l'inverse

Quel est l'inverse de $-\frac{5}{3}$?

A. $\frac{5}{3}$

Faux.

C'est l'opposé de $-\frac{5}{3}$: la somme vaut 0, mais le produit ne vaut pas 1.

B. $\frac{3}{5}$

Faux.

Tu as bien retourné la fraction, mais le signe a changé. Le produit vaut -1, pas 1.

C. $-\dfrac{3}{5}$

Juste.

$\left(-\dfrac{5}{3}\right) \times \left(-\dfrac{3}{5}\right) = \dfrac{15}{15} = 1.$

Correction

On retourne la fraction et on garde le signe. Contrôle avec la règle des signes :

$$\left(-\frac{5}{3}\right) \times \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{15}{15} = 1$$

L'inverse est $-\dfrac{3}{5}$.

Opposé ou inverse

Attention : l'opposé n'est pas l'inverse

✗ « L'inverse de $\dfrac{4}{5}$ est $-\dfrac{4}{5}$. » C'est son opposé.

✓ L'inverse de $\dfrac{4}{5}$ est $\dfrac{5}{4}$.

Deux opposés ont une somme égale à 0. Deux inverses ont un produit égal à 1, et ils ont le même signe.

Le nombre 0 a un opposé, 0, mais pas d'inverse.

Vérifie : Les deux mots

Pour $x = -\dfrac{1}{6}$, quelle réponse donne l'opposé de x, puis l'inverse de x ?

A. $\dfrac{1}{6}$, puis -6

Juste.

L'opposé change le signe : $\dfrac{1}{6}$. L'inverse retourne la fraction et garde le signe : -6.

B. -6, puis $\dfrac{1}{6}$

Faux.

Les deux mots sont échangés : -6 est l'inverse, et $\dfrac{1}{6}$ est l'opposé.

C. $\dfrac{1}{6}$, puis 6

Faux.

L'opposé est juste, mais l'inverse garde le signe : $\left(-\dfrac{1}{6}\right) \times 6 = -1.$

D. 6, puis $-\dfrac{1}{6}$

Faux.

6 n'est pas l'opposé de x, et x n'est pas son propre inverse.

Correction

L'opposé de $-\dfrac{1}{6}$ est $\dfrac{1}{6}$, car leur somme vaut 0.

L'inverse de $-\dfrac{1}{6}$ est -6, car leur produit vaut 1 :

$$\left(-\frac{1}{6}\right) \times (-6) = \frac{6}{6} = 1$$

À toi

À toi : Quatre inverses

Donne l'inverse de chaque nombre, s'il existe : -8 ; $\dfrac{-3}{10}$; 0 ; $\dfrac{7}{-2}$.

Indice 1

Écris chaque nombre comme une fraction avec un dénominateur positif.

Indice 2

Retourne chaque fraction : le numérateur et le dénominateur échangent leur place.

Indice 3

Point délicat : l'inverse garde le signe, et 0 n'a pas d'inverse.

Réponse

- $-8 = -\dfrac{8}{1}$: son inverse est $-\dfrac{1}{8}$.
- L'inverse de $\dfrac{-3}{10}$ est $-\dfrac{10}{3}$.
- 0 n'a pas d'inverse.
- $\dfrac{7}{-2} = -\dfrac{7}{2}$: son inverse est $-\dfrac{2}{7}$.

Tu sais maintenant trouver l'inverse d'un nombre non nul. C'est l'outil de la section suivante : diviser.

Diviser par un nombre rationnel

Des verres de jus

Devine : Une bouteille et des verres

Une bouteille contient $\dfrac{3}{2}$ litre de jus, soit un litre et demi. Combien de verres de $\dfrac{1}{4}$ de litre peux-tu remplir ?

A. $\dfrac{3}{8}$

Faux.
Tu as multiplié $\frac{3}{2}$ par $\frac{1}{4}$. Or on cherche combien de fois $\frac{1}{4}$ entre dans $\frac{3}{2}$.

B. 4

Faux.
4 verres remplissent un litre. Il reste encore un demi-litre.

C. $\frac{1}{6}$

Faux.
Tu as divisé $\frac{1}{4}$ par $\frac{3}{2}$: c'est la division dans le mauvais sens.

D. 6

Juste.
4 verres par litre, et 2 verres par demi-litre : 6 verres.

Correction
Un litre remplit 4 verres d'un quart de litre. Un demi-litre en remplit 2.

Donc un litre et demi remplit $4 + 2 = 6$ verres :

$$\frac{3}{2} \div \frac{1}{4} = 6$$

Dans un litre, il y a 4 quarts de litre. Dans $\frac{3}{2}$ litre, il y en a donc $\frac{3}{2} \times 4 = 6$.

Diviser par $\frac{1}{4}$ revient à multiplier par 4, l'inverse de $\frac{1}{4}$.

La règle du quotient

Propriété : Quotient de deux nombres rationnels

Diviser par un nombre rationnel non nul, c'est **multiplier par son inverse**.

Soit a, b, c et d des nombres entiers relatifs, avec $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}.$$

Ce quotient s'écrit aussi avec un trait de fraction : $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$.

En particulier, pour tout nombre entier relatif a et tout nombre entier relatif non nul b :

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}.$$

Remarque

Ce résultat est admis. Tu l'as constaté sur l'exemple de la bouteille.

Exemple : diviser par une fraction

Calculons $\frac{5}{6} \div \frac{10}{9}$.

Diviser, c'est multiplier par l'inverse :

$$\frac{5}{6} \div \frac{10}{9} = \frac{5}{6} \times \frac{9}{10}$$

Produit écrit, puis décomposé :

$$\frac{5 \times 9}{6 \times 10} = \frac{5 \times 3 \times 3}{2 \times 3 \times 2 \times 5}$$

Simplification par 5 et par 3 : le résultat est $\frac{3}{4}$.

Méthode et signes

Méthode : diviser par un nombre rationnel

Dans $x \div y$, le nombre x est le **dividende** et y est le **diviseur**.

1. **Le diviseur.** Vérifie que le diviseur n'est pas nul.
2. **L'inverse.** Remplace « diviser par y » par « multiplier par l'inverse de y ».
3. **Le produit.** Calcule le produit avec la règle des signes, puis simplifie.

Exemple : deux nombres négatifs

Calculons $\left(-\frac{8}{15}\right) \div \left(-\frac{4}{5}\right)$.

Le diviseur $-\frac{4}{5}$ n'est pas nul ; son inverse est $-\frac{5}{4}$. On calcule donc le produit $\left(-\frac{8}{15}\right) \times \left(-\frac{5}{4}\right)$.

Règle des signes : avec deux nombres négatifs, le résultat est positif. Après décomposition, on barre 4 et 5 :

$$\begin{aligned} \frac{8 \times 5}{15 \times 4} &= \frac{2 \times 4 \times 5}{3 \times 5 \times 4} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Vérifie : Un quotient négatif

Combien vaut $\frac{9}{14} \div \left(-\frac{3}{7}\right)$?

A. $-\frac{2}{3}$

Faux.

Tu as retourné le dividende $\frac{9}{14}$ au lieu du diviseur.

B. $-\frac{3}{2}$

Juste.

$\frac{9}{14} \times \left(-\frac{7}{3}\right) = -\frac{63}{42} = -\frac{3}{2}$.

C. $\frac{3}{2}$

Faux.

Le calcul est presque juste, mais le signe est faux : signes contraires, quotient négatif.

D. $-\frac{27}{98}$

Faux.

Tu as multiplié par $\frac{3}{7}$ au lieu de multiplier par son inverse.

Correction

Diviser, c'est multiplier par l'inverse :

$$\frac{9}{14} \div \left(-\frac{3}{7}\right) = \frac{9}{14} \times \left(-\frac{7}{3}\right)$$

Les signes sont contraires : le résultat est négatif. On décompose :

$$-\frac{3 \times 3 \times 7}{2 \times 7 \times 3} = -\frac{3}{2}$$

Le trait de fraction

Un quotient s'écrit aussi avec un trait de fraction. Par exemple :

$$\frac{3}{7} = 3 \div 7 = 3 \times \frac{1}{7}$$

Trois septièmes, c'est trois fois un septième.

Une **écriture à étages** est une fraction dont le numérateur ou le dénominateur est lui-même une fraction.

Exemple : une écriture à étages

Calculons $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{9}{20}}$.

Le grand trait est une division :

$$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{9}{20}} = \frac{3}{5} \div \frac{9}{20}$$

Diviser, c'est multiplier par l'inverse :

$$\frac{3}{5} \times \frac{20}{9} = \frac{60}{45}$$

Simplification par 15 : le résultat est $\frac{4}{3}$.

Piège et rédaction

Attention : on retourne seulement le diviseur

✗ $\frac{3}{8} \div \frac{5}{6} = \frac{8}{3} \times \frac{5}{6}$: on a retourné la première fraction.

✓ On retourne la seconde fraction, et elle seule :

$$\begin{aligned} \frac{3}{8} \div \frac{5}{6} &= \frac{3}{8} \times \frac{6}{5} \\ &= \frac{18}{40} = \frac{9}{20} \end{aligned}$$

Seul le diviseur est remplacé par son inverse.

Remarque : Coin devoir : diviser deux fractions

En devoir, justifie le passage à l'inverse. Voici ce qui est attendu pour $K = \frac{7}{12} \div \frac{14}{9}$.

« Le diviseur $\frac{14}{9}$ n'est pas nul et son inverse est $\frac{9}{14}$. Je multiplie par cet inverse, puis je décompose. »

$$\begin{aligned} K &= \frac{7}{12} \times \frac{9}{14} \\ &= \frac{7 \times 3 \times 3}{3 \times 4 \times 2 \times 7} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

À toi

À toi : Un quotient à simplifier

Calcule $L = \frac{-10}{21} \div \frac{5}{14}$ et donne le résultat simplifié.

Indice 1

Remplace la division par la multiplication par l'inverse de $\frac{5}{14}$.

Indice 2

Tu obtiens $L = \frac{-10}{21} \times \frac{14}{5}$. Décompose 10, 21 et 14.

Indice 3

Point délicat : seul le diviseur est retourné, et le résultat est négatif.

Réponse

Le diviseur $\frac{5}{14}$ n'est pas nul ; son inverse est $\frac{14}{5}$.

Diviser, c'est multiplier par l'inverse : $L = \dfrac{-10}{21} \times \dfrac{14}{5}$.

Règle des signes : les signes sont contraires, donc L est négatif. On décompose :

$$L = -\frac{2 \times 5 \times 2 \times 7}{3 \times 7 \times 5}$$

Simplification par 5 et par 7 : $L = -\dfrac{4}{3}$.

Tu sais maintenant diviser par n'importe quel nombre rationnel non nul : tu multiplies par son inverse.

Calculer avec plusieurs opérations

Dans quel ordre calculer

Rappel de 1AC : on calcule d'abord entre parenthèses. Puis viennent les multiplications et les divisions, enfin les additions et les soustractions.

Devine : Un calcul en deux opérations

Combien vaut $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} \times 6$?

A. 6

Faux.

Tu as d'abord ajouté $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} = 1$. Or la multiplication passe avant l'addition.

B. 4

Faux.

$\dfrac{2}{3} \times 6 = 4$ est juste, mais tu as oublié d'ajouter $\dfrac{1}{3}$.

C. $\dfrac{13}{3}$

Juste.

Multiplication d'abord : $\dfrac{2}{3} \times 6 = 4$. Puis $\dfrac{1}{3} + 4 = \dfrac{13}{3}$.

Correction

La multiplication est prioritaire : $\dfrac{2}{3} \times 6 = \dfrac{12}{3} = 4$.

Vient ensuite l'addition, avec le dénominateur commun 3 :

$$\frac{1}{3} + 4 = \frac{1}{3} + \frac{12}{3} = \frac{13}{3}$$

Propriété : Priorités et distributivité avec des nombres rationnels

Les règles de calcul connues pour les nombres décimaux relatifs restent vraies pour les nombres rationnels.

- **Priorités** : on effectue d'abord les calculs entre parenthèses ; puis les multiplications et les divisions, de gauche à droite ; enfin les additions et les soustractions, de gauche à droite.
- **Distributivité** : pour tous nombres rationnels k, x et y,

$$k \times (x + y) = k \times x + k \times y \quad \text{et} \quad k \times (x - y) = k \times x - k \times y.$$

Remarque

Ce résultat est admis. Il étend aux nombres rationnels les priorités et la distributivité de la 1AC.

La méthode

Méthode : calculer une expression

1. **Repérer.** Cherche d'abord les parenthèses. Un trait de fraction compte aussi : il entoure le numérateur, puis le dénominateur, comme des parenthèses.
2. **Un calcul à la fois.** Fais le calcul prioritaire, puis réécris tout le reste tel quel.
3. **Les étages.** Dans une écriture à étages, calcule le haut, puis le bas, puis divise.
4. **Le résultat.** Simplifie le résultat final.

Exemple : des parenthèses

Calculons $M = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) \times \frac{8}{5}$.

Parenthèse d'abord, avec le dénominateur commun 4 : $\frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$.

Il reste un produit : $M = \frac{1}{4} \times \frac{8}{5}$. On multiplie : $M = \frac{8}{20}$.

Simplification par 4 : $M = \frac{2}{5}$.

Exemple : une division prioritaire

Calculons $N = \frac{5}{6} - \frac{2}{3} \div \frac{4}{9}$.

La division passe avant la soustraction. Diviser, c'est multiplier par l'inverse :

$$\frac{2}{3} \times \frac{9}{4} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

Il reste $N = \frac{5}{6} - \frac{3}{2}$. Avec le dénominateur commun 6 :

$$N = \frac{5}{6} - \frac{9}{6} = \frac{-4}{6}$$

Simplification par 2 : $N = -\dfrac{2}{3}$.

Les écritures à étages

Exemple : calculer étage par étage

Calculons $R = \dfrac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}}$.

Le numérateur, sur le dénominateur commun 2 :

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Le dénominateur, sur le dénominateur commun 4 :

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

La division. Diviser, c'est multiplier par l'inverse :

$$R = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{12}{6} = 2$$

Vérifie : Une fraction à étages

Combien vaut $\dfrac{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}}{\frac{3}{4}}$?

A. $\dfrac{2}{3}$

Juste.

Numérateur : $\dfrac{1}{2}$. Puis $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{4}{3} = \dfrac{2}{3}$.

B. $\dfrac{3}{8}$

Faux.

Tu as multiplié le numérateur $\dfrac{1}{2}$ par $\dfrac{3}{4}$. Or le grand trait est une division.

C. $\dfrac{8}{27}$

Faux.

Au numérateur, tu as ajouté les dénominateurs : $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6}$ ne vaut pas $\dfrac{2}{9}$.

D. $\dfrac{3}{2}$

Faux.

Tu as divisé le dénominateur par le numérateur : c'est l'inverse du bon résultat.

Correction

Le numérateur, sur le dénominateur commun 6 :

$$\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

On divise ensuite par $\frac{3}{4}$, en multipliant par l'inverse :

$$\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

Calculer astucieusement

Exemple : un facteur commun

La **distributivité** permet de calculer plus vite. Calculons $S=\frac{6}{7}\times\frac{5}{3}+\frac{6}{7}\times\frac{4}{3}$.

Le nombre $\frac{6}{7}$ se trouve dans les deux produits. Distributivité, on le met en facteur :

$$S=\frac{6}{7}\times\left(\frac{5}{3}+\frac{4}{3}\right)$$

Même dénominateur dans la parenthèse : $\frac{5}{3}+\frac{4}{3}=\frac{9}{3}=3$.

Il reste un produit par un entier : $S=\frac{6}{7}\times 3=\frac{18}{7}$.

Vérifie : Distribuer un entier

Salma calcule $T=12\times\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{6}\right)$ en distribuant 12. Quel résultat trouve-t-elle ?

A. 19

Faux.

Tu as ajouté 9 et 10. Or la parenthèse contient une soustraction : $9-10$.

B. $-\frac{1}{12}$

Faux.

C'est la valeur de la parenthèse seule. Il faut encore multiplier par 12.

C. 1

Faux.

Tu as calculé $10-9$. L'ordre compte : $9-10=-1$.

D. -1

Juste.

$12\times\frac{3}{4}=9$ et $12\times\frac{5}{6}=10$, donc $T=9-10=-1$.

Correction

Distributivité : $T=12\times\frac{3}{4}-12\times\frac{5}{6}$.

On calcule chaque produit par un entier :

$$12 \times \frac{3}{4} = \frac{36}{4} = 9$$
$$12 \times \frac{5}{6} = \frac{60}{6} = 10$$

Donc $T = 9 - 10 = -1$.

Un piège et un problème

Attention : la multiplication passe avant l'addition

✗ $\frac{1}{5} + \frac{4}{5} \times 10 = 1 \times 10 = 10$: on a additionné avant de multiplier.

✓ La multiplication d'abord :

$$\frac{1}{5} + \frac{4}{5} \times 10 = \frac{1}{5} + 8 = \frac{41}{5}$$

Sans parenthèses, la multiplication se fait en premier.

Exemple : l'argent de Nadia

Nadia a 360 dirhams. Elle dépense le tiers pour un livre. Puis elle dépense les $\frac{3}{8}$ de ce qui lui reste pour un cadeau. Combien lui reste-t-il ?

Après le livre. Part qui reste, le tout vaut 1 : $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ de l'argent.

Le cadeau. Fraction d'une fraction :

$$\frac{3}{8} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

Le cadeau coûte donc $\frac{1}{4}$ de l'argent.

Ce qui reste. Sur le dénominateur commun 12, les dépenses font $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$. Il reste $1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$ de l'argent.

En dirhams. Fraction d'une quantité : $\frac{5}{12} \times 360 = 150$.

Il reste 150 dirhams à Nadia.

Rédiger et t'exercer

Remarque : Coin devoir : calculer une expression

En devoir, écris un seul calcul par ligne et recopie le reste. Voici ce qui est attendu pour $U = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{5}{2}$.

« La multiplication est prioritaire : $\frac{1}{3} \times \frac{5}{2} = \frac{5}{6}$. J'écris ensuite $\frac{2}{3}$ en sixièmes. »

$$U = \frac{4}{6} - \frac{5}{6} = -\frac{1}{6}$$

À toi : Trois opérations

Calcule $V = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{6}\right)$.

Indice 1

Repère l'ordre des calculs : la parenthèse, puis la multiplication, enfin la soustraction.

Indice 2

Calcule la parenthèse avec le dénominateur commun 6, et garde son signe.

Indice 3

Point délicat : la multiplication passe avant la soustraction, et la parenthèse est négative.

Réponse

La parenthèse, sur le dénominateur commun 6 :

$$\frac{2}{6} - \frac{5}{6} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

La multiplication. Les signes sont contraires : $\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$.

La soustraction. Soustraire, c'est ajouter l'opposé :

$$\begin{aligned} V &= \frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1 \end{aligned}$$

Donc $V = 1$.

Tu sais maintenant enchaîner les quatre opérations dans le bon ordre. Ce sont les calculs les plus complets du chapitre.

Ce qu'il faut retenir

À retenir : Les quatre opérations en un coup d'œil

- **Additionner, soustraire** : on écrit les deux nombres avec un même dénominateur, puis on opère sur les numérateurs.
- **Opposé** : l'opposé de x est $-x$, et $x + (-x) = 0$. Soustraire, c'est ajouter l'opposé.
- **Multiplier** : numérateurs entre eux, dénominateurs entre eux, avec la règle des signes.

- **Inverse** : si $x \neq 0$, l'inverse de x est $\frac{1}{x}$, et $x \times \frac{1}{x} = 1$.
- **Diviser** par un nombre non nul : multiplier par son inverse.
- **Plusieurs opérations** : parenthèses, puis multiplications et divisions, puis additions et soustractions.

Pour réviser vite, ouvre le Résumé du chapitre. Pour t'entraîner, passe aux exercices, en commençant par le niveau application.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Opérations sur les nombres rationnels » (2ac · general · mathematiques)