BURHAN

Les nombres rationnels : Résumé

2ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/nombres-rationnels/resume

Chapitre	Semestre
Les nombres rationnels	Semestre 1

Qu'est-ce qu'un nombre rationnel ?

Remarque : Comment utiliser ce Résumé

Ce Résumé rassemble les définitions, les propriétés, les méthodes et les erreurs à éviter du chapitre. Les propriétés sont admises.

Définition : Nombre rationnel

Un **nombre rationnel** est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$, où a et b sont des nombres entiers relatifs et où b n'est pas nul.

- a est le **numérateur** et b est le **dénominateur**.
- L'écriture $\frac{a}{b}$ est une **écriture fractionnaire** de ce nombre. Elle désigne le quotient de a par b.

Propriété : Entiers, décimaux et quotients de décimaux

- Tout nombre entier relatif n est un nombre rationnel, car $n = \frac{n}{1}$.
- Tout nombre décimal relatif est un nombre rationnel : il s'écrit avec un dénominateur 10, 100, $1\,000$, … Par exemple, $-2{,}35 = \frac{-235}{100}$.
- Le quotient d'un nombre décimal relatif par un nombre décimal relatif non nul est un nombre rationnel.

Méthode : Écrire un nombre sous la forme a/b

1. **Entier** : on l'écrit sur 1, par exemple $-7 = \frac{-7}{1}$.
2. **Décimal** : on compte les chiffres après la virgule, puis on écrit le nombre sans virgule sur 10, 100 ou $1\,000$: $0{,}045 = \frac{45}{1\,000}$.
3. **Quotient de deux décimaux** : on multiplie le dividende et le diviseur par un même nombre 10, 100 ou $1\,000$ pour obtenir deux entiers : $\frac{1{,}2}{-0{,}05} = \frac{120}{-5}$.

Exemple : Exemples

- $11 = \frac{11}{1}$.
- $-2{,}6 = \frac{-26}{10}$.
- $\frac{0{,}9}{-0{,}04} = \frac{90}{-4}$, en multipliant les deux nombres par 100.

Attention : Un dénominateur n'est jamais nul

L'écriture $\frac{5}{0}$ ne désigne aucun nombre : on ne divise pas par zéro. En revanche, $\frac{0}{5} = 0$ est un nombre rationnel. Avant de multiplier les deux termes d'une écriture par un même nombre, on vérifie que ce nombre n'est pas nul.

Signe et dénominateur positif

Propriété : Signe d'un nombre rationnel

Soit a un nombre entier relatif et b un nombre entier relatif non nul.

- On a toujours $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$ et $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$.
- Si a n'est pas nul : lorsque a et b ont le **même signe**, le nombre $\frac{a}{b}$ est positif ; lorsque a et b sont de **signes contraires**, il est négatif.
- Si $a = 0$, alors $\frac{a}{b} = 0$.

Tout nombre rationnel peut donc s'écrire avec un dénominateur positif.

Méthode : Trouver le signe d'un rationnel et rendre le dénominateur positif

1. **Signes** : on regarde le signe du numérateur et celui du dénominateur.
2. **Règle** : même signe, le nombre est positif ; signes contraires, il est négatif.
3. **Dénominateur positif** : si le dénominateur est négatif, on change le signe des deux termes : $\frac{4}{-9} = \frac{-4}{9} = -\frac{4}{9}$.

Exemple : Exemples

- $\frac{-21}{-16} = \frac{21}{16}$ est positif.
- $\frac{13}{-20} = -\frac{13}{20}$ est négatif.

Attention : Deux signes moins donnent un nombre positif

Le nombre $\frac{-6}{-7}$ n'est pas négatif : le numérateur et le dénominateur ont le même signe, donc $\frac{-6}{-7} = \frac{6}{7}$, qui est positif. De même, $-\frac{-6}{7}$ est positif : c'est l'opposé de $\frac{-6}{7}$, qui est négatif.

Écritures égales et simplification

Propriété : Écritures fractionnaires égales

Soit a un nombre entier relatif, b et k deux nombres entiers relatifs non nuls. Alors :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}.$$

Un nombre rationnel ne change pas quand on multiplie son numérateur et son dénominateur par un même nombre entier relatif non nul. Il ne change pas non plus quand on les divise par un même diviseur commun non nul.

Définition : Simplifier ; écriture irréductible

Soit a et b deux nombres entiers positifs non nuls.

- **Simplifier** l'écriture $\frac{a}{b}$, c'est diviser a et b par un même diviseur commun autre que 1.
- L'écriture $\frac{a}{b}$ est **irréductible** lorsque a et b n'ont pas d'autre diviseur commun que 1.

Pour un nombre rationnel négatif, on simplifie l'écriture de son opposé : on écrit $-\frac{a}{b}$ avec $\frac{a}{b}$ irréductible.

Méthode : Simplifier jusqu'à l'écriture irréductible

1. **Signe** : on met le signe devant la fraction et on travaille sur des nombres positifs.
2. **Diviseur commun** : on cherche un diviseur commun au numérateur et au dénominateur, avec les critères de divisibilité par 2, 3, 5, 9 ou 10, ou avec les tables de multiplication.
3. **Diviser** : on divise les deux termes par ce diviseur commun.
4. **Recommencer** : on recommence jusqu'à ce qu'il ne reste aucun diviseur commun autre que 1 : $\frac{-84}{126} = -\frac{42}{63} = -\frac{14}{21} = -\frac{2}{3}$.

Exemple

On divise par 2, puis par 7 :

$$\frac{-56}{98} = -\frac{28}{49} = -\frac{4}{7}$$

L'écriture $\frac{4}{7}$ est irréductible.

Attention : On simplifie des facteurs, jamais des termes

Dans $\frac{3+5}{3+7}$, on ne peut pas « barrer » les 3 : ce ne sont pas des facteurs. On calcule d'abord : $\frac{3+5}{3+7} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$, alors que $\frac{5}{7}$ est un autre nombre. On ne simplifie que par un diviseur commun au numérateur et au dénominateur entiers.

Égalité de deux écritures

Propriété : Égalité par les produits en croix

Soit a et c deux nombres entiers relatifs, b et d deux nombres entiers relatifs non nuls.

Les écritures $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ désignent le même nombre lorsque $a \times d = b \times c$, et seulement dans ce cas. Les produits $a \times d$ et $b \times c$ s'appellent les **produits en croix**.

Méthode : Savoir si deux écritures désignent le même nombre

1. **Signes** : un nombre positif et un nombre négatif ne sont jamais égaux. Un numérateur nul donne toujours 0 : $\frac{0}{5} = \frac{0}{-3} = 0$.
2. **Produits en croix** : on calcule $a \times d$ et $b \times c$ pour $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$.
3. **Conclure** : produits égaux, les écritures désignent le même nombre ; produits différents, les nombres sont différents. On peut aussi simplifier les deux écritures et comparer les écritures irréductibles.

Exemple

Pour $\frac{-6}{10}$ et $\frac{9}{-15}$, on calcule les produits en croix :

$$(-6) \times (-15) = 90$$
$$10 \times 9 = 90$$

Les produits sont égaux, donc $\frac{-6}{10} = \frac{9}{-15}$.

Comparer deux nombres rationnels

Propriété : Comparer deux rationnels de même dénominateur positif

Soit a et c deux nombres entiers relatifs et b un nombre entier **positif** non nul.

Si $a < c$, alors $\frac{a}{b} < \frac{c}{b}$. Deux nombres rationnels écrits avec le même dénominateur positif sont rangés dans le même ordre que leurs numérateurs.

Propriété : Comparer deux rationnels quelconques

Soit a et c deux nombres entiers relatifs, b et d deux nombres entiers positifs non nuls.

Les nombres $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ s'écrivent avec le même dénominateur positif $b \times d$:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times d}{b \times d}$$
$$\frac{c}{d} = \frac{c \times b}{d \times b}$$

Pour les comparer, on compare alors leurs numérateurs : $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ lorsque $a \times d < c \times b$. Tout autre dénominateur commun positif convient aussi.

Méthode : Réduire au même dénominateur positif

1. **Dénominateurs positifs** : on rend positif chaque dénominateur.
2. **Dénominateur commun** : on cherche un multiple commun aux deux dénominateurs ; le plus petit rend les calculs plus courts, leur produit convient toujours.
3. **Multiplier** : on multiplie le numérateur et le dénominateur de chaque écriture par le même nombre pour obtenir ce dénominateur.

Méthode : Comparer deux nombres rationnels

1. **Signes** : un nombre négatif non nul est plus petit qu'un nombre positif non nul ; si les signes sont contraires, on conclut tout de suite.
2. **Même dénominateur** : sinon, on écrit les deux nombres avec un même dénominateur positif.
3. **Numérateurs** : on compare les numérateurs ; les nombres sont rangés dans le même ordre.
4. **Phrase** : on conclut par une phrase, par exemple « donc $-\frac{5}{6} < -\frac{3}{4}$ ».

Exemple

Pour $\frac{-2}{9}$ et $\frac{-1}{6}$, on prend le dénominateur 18 :

$$\frac{-2}{9} = \frac{-4}{18}$$
$$\frac{-1}{6} = \frac{-3}{18}$$

Comme $-4 < -3$, on a $\frac{-2}{9} < \frac{-1}{6}$.

Attention : Entre deux négatifs, le plus grand numérateur ne gagne pas

Avec un même dénominateur positif, on range les nombres comme leurs numérateurs, y compris pour les négatifs : $\frac{-9}{4} < \frac{-7}{4}$, car $-9 < -7$. Le nombre $\frac{-9}{4}$ est le plus loin de zéro : c'est le plus petit, même si 9 est plus grand que 7.

Attention : Comparer des numérateurs exige le même dénominateur

On ne compare pas $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{5}$ par leurs numérateurs : $3 > 2$, et pourtant $\frac{3}{5} < \frac{2}{3}$. Au même dénominateur, $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$ et $\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$, et $9 < 10$.

Attention : Un dénominateur négatif fausse la comparaison

Les nombres $\frac{1}{-2}$ et $\frac{1}{3}$ ont le même numérateur, mais le premier est négatif et le second positif. Avant de comparer, on rend chaque dénominateur positif : $\frac{1}{-2} = \frac{-1}{2}$. La règle des numérateurs ne vaut qu'avec un **même dénominateur positif**.

Ranger et encadrer

Méthode : Ranger des rationnels et encadrer un rationnel

1. **Trier par signe** : on sépare les nombres négatifs, zéro et les nombres positifs.
2. **Comparer dans chaque groupe** : on écrit chaque groupe avec un même dénominateur positif et on range les numérateurs.
3. **Encadrer** : pour encadrer $\frac{a}{b}$ entre deux entiers consécutifs, avec b positif et a qui n'est pas un multiple de b, on cherche les multiples de b qui entourent a : $\frac{-17}{5}$ est entre $\frac{-20}{5} = -4$ et $\frac{-15}{5} = -3$, donc $-4 < \frac{-17}{5} < -3$.

Exemple : Exemple de rangement

Avec le dénominateur 6 : $-\frac{5}{3} = \frac{-10}{6}$, $-\frac{3}{2} = \frac{-9}{6}$ et $\frac{1}{6}$. Comme $-10 < -9 < 1$:

$$-\frac{5}{3} < -\frac{3}{2} < \frac{1}{6}$$

Exemple : Exemple d'encadrement

Les multiples de 4 qui entourent 29 sont 28 et 32. Donc :

$$7 < \frac{29}{4} < 8$$

De même, les multiples de 4 qui entourent -29 sont -32 et -28. Donc :

$$-8 < -\frac{29}{4} < -7$$

Fiche technique

Méthode : Quelle technique pour quelle question ?

- **Écrire un nombre comme un quotient d'entiers** : sur 1 pour un entier ; sur 10, 100 ou $1\,000$ pour un décimal ; pour un quotient de décimaux, multiplier les deux termes par le même nombre.
- **Trouver un signe** : comparer le signe du numérateur et celui du dénominateur.
- **Simplifier** : diviser les deux termes par un diviseur commun autre que 1, jusqu'à l'écriture irréductible.
- **Savoir si deux écritures désignent le même nombre** : calculer les produits en croix.
- **Comparer** : regarder les signes, puis écrire les deux nombres avec un même dénominateur positif et comparer les numérateurs.
- **Encadrer entre deux entiers consécutifs** : chercher les multiples du dénominateur positif qui entourent le numérateur, quand celui-ci n'en est pas un.

À retenir

Un même nombre rationnel a une infinité d'écritures fractionnaires. On choisit la plus utile : l'écriture irréductible pour présenter un résultat, un dénominateur commun positif pour comparer.