BURHAN

Les nombres rationnels : exercices, niveau examen

2ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/nombres-rationnels/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Les nombres rationnels	Niveau examen	5

Exercice 1 — 4 pts

Un quotient de décimaux

On considère le nombre $A = \dfrac{-1{,}8}{2{,}4}$.

1. — 1 pts

Écris A comme un quotient de deux entiers.

INDICE

Multiplie le dividende et le diviseur par 10.

CORRIGÉ

On multiplie le dividende et le diviseur par 10 : le quotient ne change pas et les virgules disparaissent.

$$A = \frac{-1{,}8}{2{,}4} = \frac{-18}{24}$$

Conclusion. $A = \dfrac{-18}{24}$, quotient des entiers -18 et 24.

2. — 1 pts

Donne le signe de A, puis son écriture irréductible.

INDICE

18 et 24 ont 6 comme diviseur commun.

CORRIGÉ

Signe. Le numérateur -18 est négatif et le dénominateur 24 est positif : A est négatif.

Simplification. $18 = 6 \times 3$ et $24 = 6 \times 4$. On divise les deux termes par 6 :

$$A = \frac{-18}{24} = -\frac{3}{4}$$

Irréductible. 3 et 4 n'ont que 1 comme diviseur commun.

Conclusion. A est négatif, et son écriture irréductible est $-\dfrac{3}{4}$.

3. 1 pts

En utilisant l'écriture $A = \dfrac{-3}{4}$ et les produits en croix, vérifie que $A = \dfrac{-27}{36}$.

INDICE

Compare $(-3) \times 36$ et $4 \times (-27)$.

CORRIGÉ

On calcule les produits en croix de $\dfrac{-3}{4}$ et de $\dfrac{-27}{36}$:

$$(-3) \times 36 = -108$$

$$4 \times (-27) = -108$$

Les deux produits sont égaux. D'après la propriété des produits en croix, les deux écritures désignent le même nombre.

Conclusion. $A = \dfrac{-27}{36}$.

4. 1 pts

En utilisant $A = \dfrac{-3}{4}$, compare A et $-\dfrac{4}{5}$.

INDICE

Pars de $A = \dfrac{-3}{4}$ et prends le dénominateur 20.

CORRIGÉ

Même dénominateur. On prend 20, multiple commun de 4 et de 5 :

- $A = \dfrac{-3 \times 5}{4 \times 5} = \dfrac{-15}{20}$;
- $-\dfrac{4}{5} = \dfrac{-4 \times 4}{5 \times 4} = \dfrac{-16}{20}$.

Comparaison. Les deux nombres ont le dénominateur positif 20, et $-16 < -15$.

Conclusion. $-\dfrac{4}{5} < A$.

Exercice 2 — 5 pts

Trois nombres à ranger

On considère $a = \dfrac{-5}{6}$, $b = \dfrac{7}{-9}$ et $c = \dfrac{-13}{-18}$.

1. — 1 pts

Donne le signe de a, b et c. Écris b et c avec un dénominateur positif.

INDICE

Applique la propriété du signe.

CORRIGÉ

On applique la règle des signes à chaque quotient.

- $a = \dfrac{-5}{6}$: signes contraires, a est négatif.
- $b = \dfrac{7}{-9}$: signes contraires, b est négatif. En changeant le signe des deux termes, $b = \dfrac{-7}{9}$.
- $c = \dfrac{-13}{-18}$: même signe, c est positif, et $c = \dfrac{13}{18}$.

Conclusion. a et b sont négatifs, c est positif ; de plus $b = \dfrac{-7}{9}$ et $c = \dfrac{13}{18}$.

2. — 2 pts

Écris a et b avec le dénominateur 18.

INDICE

$18 = 6 \times 3 = 9 \times 2$.

CORRIGÉ

18 est un multiple de 6 et de 9, car $18 = 6 \times 3 = 9 \times 2$. On multiplie les deux termes de a par 3, et ceux de b par 2 :

$$a = \frac{-5 \times 3}{6 \times 3} = \frac{-15}{18}$$

$$b = \frac{-7 \times 2}{9 \times 2} = \frac{-14}{18}$$

Conclusion. Avec le dénominateur 18 : $a = \dfrac{-15}{18}$ et $b = \dfrac{-14}{18}$.

3. 1 pts

Range a, b et c dans l'ordre croissant.

INDICE

Un nombre négatif est plus petit qu'un nombre positif.

CORRIGÉ

Comparer a et b. Ils ont le dénominateur positif 18, et $-15 < -14$. Donc $a < b$.

Placer c. c est positif, tandis que a et b sont négatifs. Un nombre négatif est plus petit qu'un nombre positif : c est le plus grand des trois.

Conclusion. Dans l'ordre croissant : $a < b < c$.

4. 1 pts

Le nombre $d = -\dfrac{4}{5}$ est-il compris entre a et b ?

INDICE

Écris a, b et d avec le dénominateur 90.

CORRIGÉ

Même dénominateur. 90 est un multiple commun de 18 et de 5 :

- $a = \dfrac{-15 \times 5}{18 \times 5} = \dfrac{-75}{90}$;
- $d = \dfrac{-4 \times 18}{5 \times 18} = \dfrac{-72}{90}$;
- $b = \dfrac{-14 \times 5}{18 \times 5} = \dfrac{-70}{90}$.

Comparaison. Le dénominateur 90 est positif et $-75 < -72 < -70$, donc $a < d < b$.

Conclusion. Oui, le nombre d est compris entre a et b.

Exercice 3 — 5 pts

Le niveau d'un bassin

Le niveau de l'eau d'un bassin varie chaque jour. Les variations, en centimètres, sont : lundi $\frac{-9}{4}$; mardi $\frac{7}{-3}$; mercredi $\frac{-27}{-12}$.

1. — 1 pts

Quels jours le niveau a-t-il baissé ? Justifie par le signe.

INDICE

Une baisse correspond à une variation négative.

CORRIGÉ

Le niveau baisse quand la variation est négative. On cherche donc le signe de chaque quotient.

- Lundi, $\frac{-9}{4}$: signes contraires, la variation est négative.
- Mardi, $\frac{7}{-3}$: signes contraires, la variation est négative ; elle s'écrit aussi $\frac{-7}{3}$.
- Mercredi, $\frac{-27}{-12}$: même signe, la variation est positive.

Conclusion. Le niveau a baissé lundi et mardi.

2. — 1 pts

Écris la variation de mercredi sous forme irréductible. Que remarques-tu en la comparant à celle de lundi ?

INDICE

27 et 12 sont divisibles par 3.

CORRIGÉ

Signe. Les deux termes sont négatifs : $\frac{-27}{-12} = \frac{27}{12}$.

Simplification. On divise 27 et 12 par 3 :

$$\frac{27}{12} = \frac{9}{4}$$

Le seul diviseur commun de 9 et de 4 est 1 : l'écriture est irréductible.

Comparaison avec lundi. Lundi, la variation était $\frac{-9}{4} = -\frac{9}{4}$. Les deux variations sont des nombres opposés.

Conclusion. La variation de mercredi vaut $\frac{9}{4}$: c'est l'opposé de celle de lundi. Mercredi, le niveau a regagné exactement ce qu'il avait perdu lundi.

3. 2 pts

Quel jour le niveau a-t-il le plus baissé, lundi ou mardi ?

INDICE

Écris $\frac{-9}{4}$ et $\frac{-7}{3}$ avec le dénominateur 12.

CORRIGÉ

On écrit les deux variations avec le dénominateur 12, multiple commun de 4 et de 3 :

- lundi : $\frac{-9}{4} = \frac{-27}{12}$;
- mardi : $\frac{7}{-3} = \frac{-28}{12}$.

Le dénominateur 12 est positif et $-28 < -27$. La variation de mardi est donc plus petite que celle de lundi : c'est la plus forte baisse.

Conclusion. Le niveau a le plus baissé mardi.

4. 1 pts

Encadre la variation de mardi entre deux entiers consécutifs.

INDICE

Cherche les multiples de 3 qui entourent -7.

CORRIGÉ

Mardi, la variation vaut $\frac{-7}{3}$. Les multiples de 3 qui entourent -7 sont -9 et -6, avec $-9 < -7 < -6$.

Le dénominateur 3 est positif, donc

$$\frac{-9}{3} < \frac{-7}{3} < \frac{-6}{3}$$

Or $\frac{-9}{3} = -3$ et $\frac{-6}{3} = -2$.

Conclusion. $-3 < \frac{7}{-3} < -2$.

Exercice 4 5 pts

La teinte d'une peinture

Pour obtenir un bleu clair, on mélange de la peinture bleue et de la peinture blanche. La teinte dépend du quotient du volume de bleu par le volume de blanc : plus ce quotient est grand, plus la teinte est foncée. Yassine mélange $0{,}6$ litre de bleu et $1{,}5$ litre de blanc.

1. 1 pts

Écris le quotient de Yassine, $\dfrac{0{,}6}{1{,}5}$, comme un quotient de deux entiers.

INDICE

Les deux nombres ont un seul chiffre après la virgule.

CORRIGÉ

On multiplie le dividende et le diviseur par 10. Le quotient garde sa valeur, et les virgules disparaissent :

$$\frac{0{,}6}{1{,}5} = \frac{6}{15}$$

Conclusion. Le quotient de Yassine s'écrit $\dfrac{6}{15}$.

2. 1 pts

Écris ce quotient sous forme irréductible.

INDICE

6 et 15 sont divisibles par 3.

CORRIGÉ

$6 = 3 \times 2$ et $15 = 3 \times 5$. On divise le numérateur et le dénominateur par 3 :

$$\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

Les diviseurs de 2 sont 1 et 2, et 2 ne divise pas 5 : on ne peut plus simplifier.

Conclusion. Le quotient de Yassine vaut $\dfrac{2}{5}$, et cette écriture est irréductible.

3. 1 pts

Salma a $1{,}4$ litre de bleu. Quel volume de blanc doit-elle ajouter pour obtenir la même teinte que Yassine ?

INDICE

Cherche par quel entier multiplier 2 pour obtenir 14.

CORRIGÉ

Pour obtenir la même teinte, le quotient de Salma doit valoir $\dfrac{2}{5}$.

Facteur. On a $2 \times 7 = 14$, et 14 dixièmes font $1{,}4$. On multiplie donc les deux termes par 7, puis on les divise par 10 :

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \times 7}{5 \times 7} = \frac{14}{35} = \frac{1{,}4}{3{,}5}$$

Vérification. Produits en croix de $\dfrac{2}{5}$ et de $\dfrac{14}{35}$: $2 \times 35 = 5 \times 14 = 70$.

Conclusion. Salma doit ajouter $3{,}5$ litres de blanc.

4. 2 pts

Nora mélange $0{,}7$ litre de bleu et $2{,}1$ litres de blanc. Ilyas mélange $0{,}9$ litre de bleu et $2{,}4$ litres de blanc : il voulait une teinte plus claire que celle de Yassine, mais plus foncée que celle de Nora. Y est-il parvenu ?

INDICE

Écris les quotients de Nora et d'Ilyas sous forme irréductible. Compare celui d'Ilyas à $\frac{2}{5}$ avec le dénominateur 40, puis à celui de Nora avec le dénominateur 24.

CORRIGÉ

Quotient de Nora. On multiplie par 10, puis on divise par 7 :

$$\frac{0{,}7}{2{,}1} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$$

Quotient d'Ilyas. On multiplie par 10, puis on divise par 3 :

$$\frac{0{,}9}{2{,}4} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

Ilyas et Yassine. Au dénominateur positif 40 : $\frac{3}{8} = \frac{15}{40}$ et $\frac{2}{5} = \frac{16}{40}$. Comme $15 < 16$, on a $\frac{3}{8} < \frac{2}{5}$: la teinte d'Ilyas est plus claire que celle de Yassine.

Ilyas et Nora. Au dénominateur positif 24 : $\frac{1}{3} = \frac{8}{24}$ et $\frac{3}{8} = \frac{9}{24}$. Comme $8 < 9$, on a $\frac{1}{3} < \frac{3}{8}$: la teinte d'Ilyas est plus foncée que celle de Nora.

Conclusion. Les deux comparaisons donnent

$$\frac{1}{3} < \frac{3}{8} < \frac{2}{5}$$

La teinte d'Ilyas se place entre celle de Nora et celle de Yassine : il y est parvenu.

Exercice 5 — 5 pts

Un numérateur à trouver

Soit n un nombre entier relatif. On considère le nombre $q = \dfrac{n}{-12}$.

1. — 1 pts

Pour $n = 30$, écris q avec un dénominateur positif, puis sous forme irréductible.

INDICE

Change le signe des deux termes, puis divise par un diviseur commun à 30 et 12.

CORRIGÉ

Dénominateur positif. D'après la propriété du signe, on change le signe des deux termes :

$$q = \frac{30}{-12} = \frac{-30}{12}$$

Simplification. $30 = 6 \times 5$ et $12 = 6 \times 2$. On divise par 6 :

$$\frac{-30}{12} = -\frac{5}{2}$$

Le seul diviseur commun de 5 et de 2 est 1.

Conclusion. Pour $n = 30$, on a $q = \dfrac{-30}{12}$ et, sous forme irréductible, $q = -\dfrac{5}{2}$.

2. — 1 pts

Pour quels entiers n le nombre q est-il positif ? Que vaut q pour $n = 0$?

INDICE

Le dénominateur -12 est négatif : regarde le signe du numérateur.

CORRIGÉ

Le dénominateur -12 est négatif. Le signe de q dépend donc seulement du signe de n.

- Si n est négatif, n et -12 ont le même signe : q est positif.
- Si n est positif, n et -12 sont de signes contraires : q est négatif.
- Si $n = 0$, le numérateur est nul : $q = \dfrac{0}{-12} = 0$.

Conclusion. Pour n non nul, q est positif exactement lorsque n est négatif. Pour $n = 0$, le nombre q vaut 0.

3. 1 pts

On veut $q = \dfrac{3}{4}$. En déduire le signe de n, puis trouve n.

INDICE

Multiplie le numérateur et le dénominateur de $\dfrac{3}{4}$ par un même entier pour obtenir le dénominateur -12.

CORRIGÉ

Signe de n. Le nombre $\dfrac{3}{4}$ est positif. D'après la question 2, n est donc négatif.

Recherche de n. On veut le dénominateur -12. Comme $4 \times (-3) = -12$, on multiplie les deux termes par -3 :

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times (-3)}{4 \times (-3)} = \frac{-9}{-12}$$

Donc $n = -9$, qui est bien négatif.

Vérification. Produits en croix de $\dfrac{-9}{-12}$ et de $\dfrac{3}{4}$: $(-9) \times 4 = -36$ et $(-12) \times 3 = -36$.

Conclusion. On a $q = \dfrac{3}{4}$ pour $n = -9$.

4. 2 pts

On cherche les entiers n pour lesquels q est strictement compris entre 1 et 2. Écris q avec le dénominateur 12, puis 1 et 2 avec le dénominateur 12. Quels numérateurs entiers donnent un nombre strictement compris entre 1 et 2 ? En déduire tous les entiers n cherchés.

INDICE

Change le signe des deux termes de $\dfrac{n}{-12}$, comme à la question 1.

CORRIGÉ

Écriture de q. D'après la propriété du signe, on change le signe des deux termes de $\dfrac{n}{-12}$:

$$q = \frac{-n}{12}$$

Les bornes. Avec le dénominateur 12 : $1 = \dfrac{12}{12}$ et $2 = \dfrac{24}{12}$.

Numérateurs possibles. Soit m un entier. Le dénominateur 12 est positif, donc $\dfrac{m}{12}$ est strictement compris entre 1 et 2 exactement lorsque m est strictement compris entre 12 et 24. Les numérateurs qui conviennent sont 13, 14, …, 23.

Valeurs de n. Le nombre q convient exactement lorsque $-n$ est l'un des entiers 13, 14, …, 23. On prend l'opposé valeur par valeur : n vaut -13, -14, …, -23.

Conclusion. Les entiers cherchés vont de $n = -23$ à $n = -13$: il y en a 11.