BURHAN

# Les nombres rationnels

2ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/nombres-rationnels/cours

| Chapitre | Semestre |
| --- | --- |
| Les nombres rationnels | Semestre 1 |

## Un partage qui ne tombe pas juste

Quatre amis se partagent trois galettes à parts égales. Chacun reçoit $3 : 4$, c'est-à-dire $0{,}75$ galette.

Le lendemain, trois amis se partagent sept galettes. Pour $7 : 3$, la calculatrice affiche $2{,}333333333$.

> **Devine : Sept galettes pour trois**
>
> La part de chacun peut-elle s'écrire exactement avec un nombre décimal ?
>
> **A.** Oui : c'est $2{,}333333333$, le nombre affiché.
>
> **Faux.**
> $3 \times 2{,}333333333 = 6{,}999999999$ : on n'obtient pas $7$. La calculatrice a coupé l'écriture.
>
> **B.** Oui : c'est $2{,}33$, avec deux chiffres.
>
> **Faux.**
> $3 \times 2{,}33 = 6{,}99$ : il manque encore un peu pour faire $7$.
>
> **C.** Non, mais on l'écrit exactement $\frac{7}{3}$.
>
> **Juste.**
> La division ne s'arrête jamais. Le trait de fraction donne pourtant la part exacte.
>
> **D.** Non : ce partage ne donne aucun nombre précis.
>
> **Faux.**
> Chacun reçoit une quantité bien précise de galette : seule son écriture décimale ne s'arrête pas.
>
> **Indice 1**
> Multiplie la valeur proposée par $3$ : retrouves-tu exactement $7$ ?
>
> **Correction**
> La division de $7$ par $3$ ne s'arrête jamais : à chaque étape, il reste $1$. Aucune écriture décimale ne donne donc la part exacte.
>
> La part de chacun est pourtant précise. C'est le quotient de $7$ par $3$, que l'on écrit :
>
> $$\frac{7}{3}$$

Dans ce chapitre, tu découvres les nombres qui s'écrivent comme le quotient de deux entiers : les **nombres rationnels**. Tu vas apprendre à trouver leur signe, à simplifier leur écriture et à les comparer.

## Des quotients aux nombres rationnels

### Ce que tu sais déjà

Rappel de la 1AC : un nombre décimal relatif porte un signe, comme $-3{,}5$ ou $+12$. Le quotient de deux nombres de signes contraires est négatif. Par exemple, $(-12) : 4 = -3$.

**Vérifie : Une division qui ne tombe pas juste**

Parmi ces quotients, lequel ne donne pas un nombre décimal ?

**A.** $(-15) : 6$

**Faux.**

La division tombe juste : $(-15) : 6 = -2{,}5$.

**B.** $9 : (-4)$

**Faux.**

La division tombe juste : $9 : (-4) = -2{,}25$.

**C.** $(-7) : (-8)$

**Faux.**

La division tombe juste : $(-7) : (-8) = 0{,}875$.

**D.** $5 : (-6)$

**Juste.**

On trouve $-0{,}8333\ldots$ : le chiffre $3$ se répète sans fin.

**Indice 1**

Pose chaque division, ou utilise la calculatrice, et regarde si elle s'arrête.

**Correction**

Seul $5 : (-6)$ ne tombe pas juste. Les autres valent $-2{,}5$, $-2{,}25$ et $0{,}875$.

Ce quotient s'écrit pourtant exactement, avec un trait de fraction :

$$\frac{5}{-6}$$

### Un nom pour ces quotients

Un quotient qui ne tombe pas juste reste un nombre précis. On l'écrit avec un trait de fraction.

Ainsi, $\frac{7}{3}$ est le nombre qu'on multiplie par $3$ pour obtenir $7$.

**Définition : Nombre rationnel**

Un **nombre rationnel** est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$, où $a$ et $b$ sont des nombres entiers relatifs et où $b$ n'est pas nul.

- $a$ est le **numérateur** et $b$ est le **dénominateur**.
- L'écriture $\frac{a}{b}$ est une **écriture fractionnaire** de ce nombre. Elle désigne le quotient de $a$ par $b$.

**Exemple : Reconnaître un nombre rationnel**

- $\frac{-5}{8}$ est un nombre rationnel. Son numérateur est $-5$ et son dénominateur est $8$.
- $\frac{4}{-9}$ en est un aussi : $4$ et $-9$ sont des entiers relatifs, et $-9$ n'est pas nul.

## Entiers et décimaux

**Vérifie : Un entier négatif**

Le nombre $-6$ est-il un nombre rationnel ?

**A.** Non : il n'a pas de trait de fraction.

**Faux.**

Un nombre peut avoir plusieurs écritures. Il suffit qu'une de ses écritures soit un quotient d'entiers.

**B.** Oui : on peut écrire $-6 = \frac{-6}{1}$.

**Juste.**

Le dénominateur $1$ convient pour tout entier.

**C.** Non : un nombre négatif ne convient pas.

**Faux.**

Le numérateur peut être négatif : c'est un entier relatif.

**Indice 1**

Cherche un quotient d'entiers égal à $-6$.

**Correction**

Oui. Tout entier relatif s'écrit avec le dénominateur $1$ :

$$-6 = \frac{-6}{1}$$

On peut aussi écrire $-6 = \frac{-12}{2}$.

**Exemple : Un décimal en écriture fractionnaire**

Le nombre $-0{,}36$ a deux chiffres après la virgule. On l'écrit donc sans virgule sur $100$ :

$$-0{,}36 = \frac{-36}{100}$$

De même, $4{,}7$ a un seul chiffre après la virgule. On l'écrit sur $10$ :

$$4{,}7 = \frac{47}{10}$$

**Propriété : Entiers, décimaux et quotients de décimaux**

- Tout nombre entier relatif $n$ est un nombre rationnel, car $n = \frac{n}{1}$.
- Tout nombre décimal relatif est un nombre rationnel : il s'écrit avec un dénominateur $10$, $100$, $1\,000$, … Par exemple, $-2{,}35 = \frac{-235}{100}$.
- Le quotient d'un nombre décimal relatif par un nombre décimal relatif non nul est un nombre rationnel.

**Remarque : Admis**

Ce résultat est admis. Les exemples précédents le rendent naturel : un entier se met sur $1$, un décimal sur $10$, $100$ ou $1\,000$. L'exemple suivant le montre pour un quotient de décimaux.

## Le quotient de deux décimaux

**Exemple : Le quotient de deux décimaux**

Dans un quotient, le nombre qu'on divise est le **dividende** ; celui par lequel on divise est le **diviseur**.

Prenons $\frac{2{,}4}{-0{,}3}$. On multiplie le dividende et le diviseur par $10$. Ici, la division tombe juste :

$$\begin{aligned}\frac{2{,}4}{-0{,}3} &= \frac{24}{-3} \\ &= -8\end{aligned}$$

Avec $\frac{0{,}5}{0{,}03}$, on multiplie par $100$. On obtient $\frac{50}{3}$, qui ne tombe pas juste.

**Méthode : écrire un nombre comme un quotient d'entiers**

1. **Un entier** : tu l'écris sur $1$. Ainsi $15 = \frac{15}{1}$.
2. **Un décimal** : tu comptes ses chiffres après la virgule. Puis tu l'écris sans virgule sur $10$, $100$ ou $1\,000$ : $-1{,}08 = \frac{-108}{100}$.
3. **Un quotient de décimaux** : tu multiplies le dividende et le diviseur par $10$, $100$ ou $1\,000$, jusqu'à obtenir deux entiers.

**Attention : Attention au dénominateur**

✗ $\frac{8}{0} = 0$, ou bien $\frac{8}{0} = 8$.

✓ $\frac{8}{0}$ ne désigne aucun nombre : on ne divise jamais par zéro. En revanche, $\frac{0}{8} = 0$.

## À toi

**Vérifie : Deux entiers à la place de deux décimaux**

Quelle écriture avec deux entiers est égale à $\frac{1{,}5}{-0{,}25}$ ?

**A.** $\frac{150}{-25}$

**Juste.**

Tu as multiplié les deux nombres par $100$ : le quotient ne change pas.

**B.** $\frac{15}{-25}$

**Faux.**

Le dividende a été multiplié par $10$, le diviseur par $100$ : le quotient a changé.

**C.** $\frac{150}{25}$

**Faux.**

Le signe moins du diviseur a disparu : ce nombre est positif.

**D.** $\frac{-15}{-25}$

**Faux.**

Ce nombre est positif, alors que le quotient de départ est négatif.

**Indice 1**

Le diviseur a deux chiffres après la virgule.

**Correction**

On multiplie le dividende et le diviseur par $100$ :

$$\frac{1{,}5}{-0{,}25} = \frac{150}{-25}$$

Ce quotient vaut $-6$.

**À toi**

Écris chaque nombre comme un quotient de deux entiers : $-9$ ; $0{,}045$ ; $\frac{-3{,}6}{0{,}12}$.

**Indice 1**

Un entier se met sur $1$ ; un décimal sur $10$, $100$ ou $1\,000$.

**Indice 2**

Pour $0{,}045$, compte les chiffres après la virgule : il y en a trois.

**Indice 3**

Point délicat : dans le quotient, multiplie le dividende **et** le diviseur par le même nombre, ici $100$.

**Réponse**

Un entier s'écrit sur $1$ : $-9 = \dfrac{-9}{1}$.

Le nombre $0{,}045$ a trois chiffres après la virgule : $0{,}045 = \dfrac{45}{1\,000}$.

Pour le quotient, on multiplie le dividende et le diviseur par $100$ :

$$\frac{-3{,}6}{0{,}12} = \frac{-360}{12}$$

Ce quotient vaut $-30$.

## Le signe d'un nombre rationnel

### Observer des signes

Rappel de la 1AC : le quotient de deux nombres de même signe est positif. Le quotient de deux nombres de signes contraires est négatif. Par exemple, $14 : (-5) = -2{,}8$.

**Vérifie : Deux signes moins**

Sans calculer, quel est le signe de $\dfrac{-14}{-5}$ ?

**A.** Positif : les deux termes ont le même signe.

**Juste.**

Deux nombres négatifs ont un quotient positif.

**B.** Négatif : l'écriture contient des signes moins.

**Faux.**

Deux signes moins ne donnent pas un nombre négatif : on compare le signe des deux termes.

**C.** On ne peut pas savoir sans calculer.

**Faux.**

Les signes des deux termes suffisent pour trouver le signe du quotient.

**Indice 1**

Applique la règle rappelée juste au-dessus.

**Correction**

Le numérateur et le dénominateur sont négatifs : le quotient est positif. Il vaut $2{,}8$.

### La règle des signes

Compare $\frac{-3}{4}$, $\frac{3}{-4}$ et $-\frac{3}{4}$. Les trois valent $-0{,}75$ :

$$\frac{-3}{4} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$$

Ce sont trois écritures du même nombre.

**Propriété : Signe d'un nombre rationnel**

Soit $a$ un nombre entier relatif et $b$ un nombre entier relatif non nul.

- On a toujours $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$ et $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$.
- Si $a$ n'est pas nul : lorsque $a$ et $b$ ont le **même signe**, le nombre $\frac{a}{b}$ est positif ; lorsque $a$ et $b$ sont de **signes contraires**, il est négatif.
- Si $a = 0$, alors $\frac{a}{b} = 0$.

Tout nombre rationnel peut donc s'écrire avec un dénominateur positif.

**Remarque : Admis**

Ce résultat est admis. Il prolonge aux écritures fractionnaires la règle des signes du quotient.

**Exemple : Le signe de quelques rationnels**

- $\frac{-8}{-11}$ : même signe, donc positif. On écrit $\frac{-8}{-11} = \frac{8}{11}$.
- $\frac{6}{-13}$ : signes contraires, donc négatif. On écrit $\frac{6}{-13} = -\frac{6}{13}$.
- $\frac{0}{-7} = 0$.

## Un dénominateur positif

**Vérifie : Rendre le dénominateur positif**

Quelle écriture de $\frac{9}{-10}$ a un dénominateur positif ?

**A.** $\frac{-9}{-10}$
**Faux.**
Le dénominateur est encore négatif, et ce nombre est positif.

**B.** $\frac{9}{10}$
**Faux.**
Ce nombre est positif : le signe a été perdu.

**C.** $\frac{-9}{10}$

**Juste.**

On a changé le signe des deux termes : le nombre reste le même.

**D.** $-\frac{-9}{10}$

**Faux.**

C'est l'opposé de $\frac{-9}{10}$ : ce nombre est positif.

**Indice 1**

Change le signe du numérateur et celui du dénominateur.

**Correction**

On change le signe des deux termes :

$$\frac{9}{-10} = \frac{-9}{10} = -\frac{9}{10}$$

Le nombre est négatif, et son dénominateur $10$ est positif.

**Méthode : signe et dénominateur positif**

1. **Regarde les signes** du numérateur et du dénominateur.
2. **Conclus** : deux signes identiques donnent un nombre positif ; deux signes différents, un nombre négatif.
3. **Change les deux signes** si le dénominateur est négatif : $\frac{5}{-12} = \frac{-5}{12}$.

**Attention : Attention aux deux signes moins**

✗ $\frac{-4}{-15}$ est négatif, car il contient des signes moins.

✓ $\frac{-4}{-15}$ est positif : ses deux termes sont négatifs. Il est égal à $\frac{4}{15}$.

## À toi

Rappel de la 1AC : l'opposé d'un nombre est à la même distance de zéro, de l'autre côté. Par exemple, l'opposé de $-3$ est $3$, et l'opposé de $\frac{2}{5}$ est $-\frac{2}{5}$.

**Vérifie : L'opposé d'un nombre négatif**

Quel nombre est égal à $-\frac{-7}{2}$ ?

**A.** $-\frac{7}{2}$

**Faux.**

Ce nombre est négatif, alors que $-\dfrac{-7}{2}$ est l'opposé d'un nombre négatif.

**B.** $\dfrac{-7}{2}$

**Faux.**

C'est le nombre de départ, sans son opposé.

**C.** $\dfrac{7}{-2}$

**Faux.**

Ce nombre est égal à $\dfrac{-7}{2}$ : il est négatif.

**D.** $\dfrac{7}{2}$

**Juste.**

L'opposé d'un nombre négatif est positif.

**Indice 1**

Trouve d'abord le signe de $\dfrac{-7}{2}$.

**Correction**

Le nombre $\dfrac{-7}{2}$ est négatif. Son opposé $-\dfrac{-7}{2}$ est donc positif :

$$-\frac{-7}{2} = \frac{7}{2}$$

**À toi**

Donne le signe de chaque nombre, puis écris-le avec un dénominateur positif : $\dfrac{-12}{-25}$ ; $\dfrac{17}{-3}$ ; $\dfrac{0}{-9}$.

**Indice 1**

Compare d'abord le signe du numérateur et celui du dénominateur.

**Indice 2**

Pour rendre un dénominateur positif, change le signe des deux termes.

**Indice 3**

Point délicat : un numérateur nul donne le nombre $0$, quel que soit le signe du dénominateur.

**Réponse**

- $\dfrac{-12}{-25}$ : ses deux termes sont négatifs, le nombre est positif. On écrit $\dfrac{-12}{-25} = \dfrac{12}{25}$.
- $\dfrac{17}{-3}$ : ses termes ont des signes contraires, le nombre est négatif. On écrit $\dfrac{17}{-3} = -\dfrac{17}{3}$.
- $\dfrac{0}{-9}$ : le numérateur est nul, donc $\dfrac{0}{-9} = 0$.

## Écritures égales et simplification

## Des parts de tarte

**Devine : Deux tartes identiques**

Léa mange $\frac{2}{3}$ d'une tarte coupée en trois parts égales. Sami mange $\frac{4}{6}$ d'une tarte identique, coupée en six parts égales. Qui mange le plus ?

**A.** Sami, car $4$ est plus grand que $2$.

**Faux.**

Les parts de Sami sont deux fois plus petites : le nombre de parts ne suffit pas.

**B.** Léa, car ses parts sont plus grosses.

**Faux.**

Ses parts sont plus grosses, mais Sami en mange deux fois plus.

**C.** Ils mangent autant de tarte.

**Juste.**

Deux fois plus de parts, deux fois plus petites : la quantité est la même.

**Indice 1**

Coupe en deux chaque part de la tarte de Léa.

**Correction**

Ils mangent autant. On multiplie le numérateur et le dénominateur de $\frac{2}{3}$ par $2$ :

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{4}{6}$$

Multiplier le numérateur et le dénominateur par un même nombre non nul ne change pas le quotient.

Cela reste vrai avec des nombres négatifs : $\frac{-2}{5}$ et $\frac{-6}{15}$ valent tous deux $-0{,}4$.

## La propriété

**Propriété : Écritures fractionnaires égales**

Soit $a$ un nombre entier relatif, $b$ et $k$ deux nombres entiers relatifs non nuls. Alors :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}.$$

Un nombre rationnel ne change pas quand on multiplie son numérateur et son dénominateur par un même nombre entier relatif non nul. Il ne change pas non plus quand on les divise par un même diviseur commun non nul.

**Remarque : Admis**

Ce résultat est admis. Les exemples avec des nombres positifs et négatifs le rendent naturel : il reste vrai avec des entiers relatifs.

**Exemple : Produire des écritures égales**

On multiplie les deux termes de $\frac{5}{-2}$ par $-3$ :

$$\begin{aligned}\frac{5}{-2} &= \frac{5 \times (-3)}{(-2) \times (-3)} \\ &= \frac{-15}{6}\end{aligned}$$

On divise les deux termes de $\frac{-28}{36}$ par $4$ :

$$\begin{aligned}\frac{-28}{36} &= \frac{-28 : 4}{36 : 4} \\ &= \frac{-7}{9}\end{aligned}$$

**Vérifie : Le numérateur manquant**

Quel nombre faut-il écrire à la place du point d'interrogation : $\frac{-3}{8} = \frac{?}{40}$ ?

**A.** $-15$

**Juste.**

On passe de $8$ à $40$ en multipliant par $5$ : $(-3) \times 5 = -15$.

**B.** $-35$

**Faux.**

On a ajouté $32$ au dénominateur, et on a retiré $32$ au numérateur : ce n'est pas une multiplication.

**C.** $15$

**Faux.**

Le nombre de départ est négatif : le numérateur doit rester négatif.

**D.** $-3$

**Faux.**

Avec le même numérateur et un dénominateur plus grand, le nombre change.

**Indice 1**

Par quel nombre faut-il multiplier $8$ pour obtenir $40$ ?

**Correction**

Le dénominateur passe de $8$ à $40$, et $40 = 8 \times 5$. On multiplie donc aussi le numérateur par $5$ :

$$\frac{-3}{8} = \frac{-3 \times 5}{8 \times 5} = \frac{-15}{40}$$

## Simplifier

**Exemple : Simplifier pas à pas**

Simplifions $\frac{60}{84}$, une division après l'autre.

- $60$ et $84$ sont pairs : on divise par $2$ et on obtient $\frac{30}{42}$.
- $30$ et $42$ sont encore pairs : on divise par $2$ et on obtient $\frac{15}{21}$.
- $15$ et $21$ sont divisibles par $3$ : on obtient $\frac{5}{7}$.

On résume la suite des écritures :

$$\frac{60}{84} = \frac{30}{42} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$$

**Définition : Simplifier ; écriture irréductible**

Soit $a$ et $b$ deux nombres entiers positifs non nuls.

- **Simplifier** l'écriture $\frac{a}{b}$, c'est diviser $a$ et $b$ par un même diviseur commun autre que $1$.
- L'écriture $\frac{a}{b}$ est **irréductible** lorsque $a$ et $b$ n'ont pas d'autre diviseur commun que $1$.

Pour un nombre rationnel négatif, on simplifie l'écriture de son opposé : on écrit $-\frac{a}{b}$ avec $\frac{a}{b}$ irréductible.

**Exemple : Une écriture irréductible**

L'écriture $\frac{5}{7}$ est irréductible : $5$ et $7$ n'ont pas d'autre diviseur commun que $1$.

Le nombre $\frac{-60}{84}$ est négatif. On simplifie son opposé $\frac{60}{84}$, puis on remet le signe :

$$\frac{-60}{84} = -\frac{5}{7}$$

**Méthode : simplifier jusqu'au bout**

1. **Mets le signe de côté** : travaille sur des nombres positifs.
2. **Cherche un diviseur commun** avec les critères de divisibilité ou les tables.
3. **Divise** le numérateur et le dénominateur par ce diviseur.
4. **Recommence** jusqu'à l'écriture irréductible, puis remets le signe.

**Attention : on ne barre que des facteurs**

✗ $\dfrac{4+9}{4+11} = \dfrac{9}{11}$, en barrant les $4$.

✓ On calcule d'abord le numérateur et le dénominateur :

$$\frac{4+9}{4+11} = \frac{13}{15}$$

Les $4$ étaient des termes d'une somme, pas des facteurs.

## En devoir

**Vérifie : L'écriture irréductible**

Quelle est l'écriture irréductible de $\dfrac{-45}{-75}$ ?

**A.** $-\dfrac{3}{5}$

**Faux.**

Le nombre de départ est positif : ses deux termes sont négatifs.

**B.** $\dfrac{3}{5}$

**Juste.**

On divise $45$ et $75$ par $15$ ; $3$ et $5$ n'ont plus de diviseur commun autre que $1$.

**C.** $\dfrac{9}{15}$

**Faux.**

Cette écriture est égale, mais $9$ et $15$ sont encore divisibles par $3$.

**D.** $\dfrac{15}{25}$

**Faux.**

Cette écriture est égale, mais $15$ et $25$ sont encore divisibles par $5$.

**Indice 1**

Commence par le signe, puis divise par $5$ et par $3$.

**Correction**

Les deux termes sont négatifs : le nombre est positif. On divise ensuite par $5$, puis par $3$ :

$$\begin{aligned}\frac{-45}{-75} &= \frac{45}{75}\\ &= \frac{9}{15}\\ &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

L'écriture $\dfrac{3}{5}$ est irréductible.

**Remarque : Coin devoir : simplifier**

En devoir, on rédige chaque étape. Pour $\frac{-48}{-72}$ :

« D'après la propriété du signe, $\frac{-48}{-72} = \frac{48}{72}$. D'après la propriété des écritures égales, en divisant par $24$, $\frac{48}{72} = \frac{2}{3}$. L'écriture $\frac{2}{3}$ est irréductible. »

**À toi**

Simplifie jusqu'à l'écriture irréductible : $\frac{-90}{126}$ et $\frac{150}{-210}$. Que remarques-tu ?

**Indice 1**

Mets d'abord le signe devant la fraction.

**Indice 2**

$90$ et $126$ sont pairs, puis divisibles par $9$. $150$ et $210$ sont divisibles par $10$, puis par $3$.

**Indice 3**

Point délicat : dans $\frac{150}{-210}$, le signe moins du dénominateur passe devant la fraction.

**Réponse**

**Premier nombre.** Il est négatif. On divise par $2$, puis par $9$ :

$$\begin{aligned}\frac{-90}{126} &= -\frac{90}{126} \\ &= -\frac{45}{63} \\ &= -\frac{5}{7}\end{aligned}$$

**Second nombre.** Il est négatif lui aussi. On divise par $10$, puis par $3$ :

$$\begin{aligned}\frac{150}{-210} &= -\frac{150}{210} \\ &= -\frac{15}{21} \\ &= -\frac{5}{7}\end{aligned}$$

**Conclusion.** Les deux écritures désignent le même nombre, $-\frac{5}{7}$.

## Deux écritures, un même nombre ?

## La question

**Devine : Deux écritures à comparer**

Les écritures $\frac{-21}{35}$ et $\frac{-12}{20}$ désignent-elles le même nombre ?

**A.** Non : leurs numérateurs sont différents.

**Faux.**
Des écritures différentes peuvent désigner le même nombre, comme $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{4}$.

**B.** Oui : les deux valent $-0{,}6$.

**Juste.**
$(-21) : 35 = -0{,}6$ et $(-12) : 20 = -0{,}6$.

**C.** Non : leurs dénominateurs sont différents.

**Faux.**
Le dénominateur seul ne décide pas : il faut regarder le quotient.

**Indice 1**
Calcule chaque quotient à la calculatrice.

**Correction**
Oui. Les deux quotients valent $-0{,}6$ : c'est le même nombre, écrit de deux façons.

Calcule les produits « en croix » :

$$(-21) \times 20 = -420$$
$$35 \times (-12) = -420$$

Les deux produits sont égaux. Ce n'est pas un hasard.

## La propriété

**Propriété : Égalité par les produits en croix**

Soit $a$ et $c$ deux nombres entiers relatifs, $b$ et $d$ deux nombres entiers relatifs non nuls.

Les écritures $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ désignent le même nombre lorsque $a \times d = b \times c$, et seulement dans ce cas.
Les produits $a \times d$ et $b \times c$ s'appellent les **produits en croix**.

**Remarque : Admis**

Ce résultat est admis. Il permet de décider sans calculer de quotient, avec des multiplications d'entiers seulement.

**Exemple : Deux tests**

**Première paire : $\frac{9}{-12}$ et $\frac{-15}{20}$.**

$$9 \times 20 = 180$$
$$(-12) \times (-15) = 180$$

Les produits sont égaux : c'est le même nombre.

**Seconde paire : $\frac{7}{9}$ et $\frac{8}{10}$.**

$$7 \times 10 = 70$$
$$9 \times 8 = 72$$

Les produits sont différents : ce sont deux nombres différents.

## Utiliser les produits en croix

**Méthode : décider si deux écritures sont égales**

1. **Signes** : si l'un des nombres est positif et l'autre négatif, ils sont différents.
2. **Produits en croix** : pour $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, calcule $a \times d$, puis $b \times c$.
3. **Conclus** par une phrase : produits égaux, même nombre ; produits différents, nombres différents.

**Vérifie : Un terme inconnu**

Quel entier faut-il écrire à la place du point d'interrogation : $\frac{?}{12} = \frac{-5}{4}$ ?

**A.** $-60$

**Faux.**
$-60$ est le produit $12 \times (-5)$ : il reste à le diviser par $4$.

**B.** $15$

**Faux.**
Le nombre $\frac{-5}{4}$ est négatif : le numérateur cherché aussi.

**C.** $-15$

**Juste.**
Les produits en croix $(-15) \times 4$ et $12 \times (-5)$ valent tous deux $-60$.

**D.** $-13$

**Faux.**
On a ajouté $8$ au dénominateur et retiré $8$ au numérateur : les produits en croix ne sont pas égaux.

**Indice 1**
Le produit en croix du nombre cherché par $4$ doit être égal à $12 \times (-5)$.

**Correction**
On cherche un entier qui, multiplié par $4$, donne le produit en croix $12 \times (-5) = -60$. C'est $-15$, car $(-15) \times 4 = -60$. Donc :

$$\frac{-15}{12} = \frac{-5}{4}$$

## À toi

**Vérifie : L'intrus**

Quelle paire d'écritures désigne deux nombres **différents** ?

**A.** $\frac{6}{-8}$ et $\frac{-9}{12}$
**Faux.**
$6 \times 12 = 72$ et $(-8) \times (-9) = 72$ : c'est le même nombre.

**B.** $\frac{-10}{14}$ et $\frac{15}{-21}$
**Faux.**
$(-10) \times (-21) = 210$ et $14 \times 15 = 210$ : c'est le même nombre.

**C.** $\frac{-2}{-5}$ et $\frac{6}{15}$
**Faux.**
$(-2) \times 15 = -30$ et $(-5) \times 6 = -30$ : c'est le même nombre.

**D.** $\frac{4}{-6}$ et $\frac{6}{-4}$
**Juste.**
$4 \times (-4) = -16$ et $(-6) \times 6 = -36$ : les nombres sont différents.

**Indice 1**
Calcule les deux produits en croix de chaque paire.

**Correction**
Seule la dernière paire a des produits en croix différents : $-16$ et $-36$.

Une fois simplifiées, ces deux écritures montrent bien deux nombres différents :

$$\frac{4}{-6} = -\frac{2}{3}$$
$$\frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}$$

**À toi**

Utilise les produits en croix. Les écritures $\frac{-14}{18}$ et $\frac{21}{-27}$ désignent-elles le même nombre ? Et les écritures $\frac{11}{-4}$ et $\frac{-33}{13}$ ?

**Indice 1**
Pour chaque paire, calcule $a \times d$ et $b \times c$.
**Indice 2**

Attention aux signes : $(-14) \times (-27)$ est positif.

**Indice 3**

Point délicat : $(-14) \times (-27)$ et $(-4) \times (-33)$ sont des produits positifs.

**Réponse**

**Première paire.**

$$(-14) \times (-27) = 378$$
$$18 \times 21 = 378$$

Les produits sont égaux : c'est le même nombre.

**Seconde paire.**

$$11 \times 13 = 143$$
$$(-4) \times (-33) = 132$$

Les produits sont différents : ce sont deux nombres différents.

## Comparer deux nombres rationnels

## Avec le même dénominateur

**Devine : Deux plongeurs**

Par rapport à la surface de l'eau, un plongeur est à l'altitude $\frac{-17}{4}$ mètres, une plongeuse à $\frac{-13}{4}$ mètres. Qui est le plus bas ?

**A.** Le plongeur.

**Juste.**

Il est à $-4{,}25$ m, plus bas que la plongeuse.

**B.** La plongeuse.

**Faux.**

Elle est à $-3{,}25$ m : elle est au-dessus du plongeur, qui est à $-4{,}25$ m.

**C.** Ils sont à la même altitude.

**Faux.**

Leurs numérateurs sont différents, avec le même dénominateur : les nombres sont différents.

**Indice 1**

Écris chaque altitude avec un nombre décimal.

**Correction**

On écrit les deux altitudes en nombres décimaux :

$$\frac{-17}{4} = -4{,}25$$
$$\frac{-13}{4} = -3{,}25$$

> Or $-4{,}25 < -3{,}25$ : le plongeur est le plus bas.

Avec un même dénominateur positif, on compte des parts de même taille. Le nombre le plus petit a le plus petit numérateur, même s'il est négatif.

Ici, $-17 < -13$, donc :

$$\frac{-17}{4} < \frac{-13}{4}$$

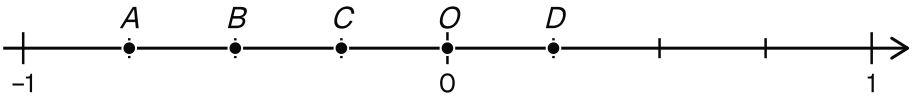
**Propriété : Comparer deux rationnels de même dénominateur positif**

Soit $a$ et $c$ deux nombres entiers relatifs et $b$ un nombre entier **positif** non nul.

Si $a < c$, alors $\frac{a}{b} < \frac{c}{b}$. Deux nombres rationnels écrits avec le même dénominateur positif sont rangés dans le même ordre que leurs numérateurs.

**Remarque : Admis**

Ce résultat est admis. Sur une droite graduée en quarts d'unité, les points d'abscisses $-\frac{3}{4}$, $-\frac{2}{4}$, $-\frac{1}{4}$, $0$, $\frac{1}{4}$ se suivent dans l'ordre de leurs numérateurs.




**En quarts d'unité, A, B, C, O et D ont pour abscisses -3/4, -2/4, -1/4, 0 et 1/4 : ils se suivent de gauche à droite, dans l'ordre des numérateurs.**

**Exemple : Comparer avec le même dénominateur**

- $\frac{-5}{9} < \frac{2}{9}$, car $-5 < 2$.
- $\frac{-11}{6} < \frac{-7}{6}$, car $-11 < -7$.

## Le piège des nombres négatifs

**Attention : Attention aux nombres négatifs**

✗ $\frac{-11}{8} > \frac{-9}{8}$, car $11 > 9$.

✓ $\frac{-11}{8} < \frac{-9}{8}$, car $-11 < -9$. Du côté négatif, le nombre le plus loin de zéro est le plus petit.

**Vérifie : Ranger trois nombres**

Quel est le rangement dans l'ordre croissant de $\frac{-3}{7}$, $\frac{1}{7}$ et $\frac{-6}{7}$ ?

**A.** $\frac{1}{7} < \frac{-3}{7} < \frac{-6}{7}$

**Faux.**

C'est l'ordre décroissant : le nombre positif est le plus grand.

**B.** $\frac{-3}{7} < \frac{-6}{7} < \frac{1}{7}$

**Faux.**

$-6 < -3$, donc $\frac{-6}{7}$ est plus petit que $\frac{-3}{7}$.

**C.** $\frac{-6}{7} < \frac{-3}{7} < \frac{1}{7}$

**Juste.**

Les numérateurs sont rangés : $-6 < -3 < 1$.

**Indice 1**

Les trois nombres ont le même dénominateur positif : range les numérateurs.

**Correction**

Avec le dénominateur $7$, on range les numérateurs : $-6 < -3 < 1$. Donc :

$$\frac{-6}{7} < \frac{-3}{7} < \frac{1}{7}$$

## Des dénominateurs différents

**Devine : Trois quarts ou cinq septièmes**

Lequel est le plus grand : $\frac{3}{4}$ ou $\frac{5}{7}$ ?

**A.** $\frac{5}{7}$, car ses termes sont plus grands.

**Faux.**

Des termes plus grands ne donnent pas forcément un nombre plus grand.

**B.** $\frac{3}{4}$.

**Juste.**

Au même dénominateur $28$, on compare $21$ et $20$.

**C.** Ils sont égaux.

**Faux.**

Les produits en croix $3 \times 7$ et $4 \times 5$ sont différents.

**Indice 1**

Écris les deux nombres avec le dénominateur $28$.

**Correction**

On écrit les deux nombres avec le dénominateur $28$ :

$$\frac{3}{4} = \frac{21}{28}$$
$$\frac{5}{7} = \frac{20}{28}$$

Comme $21 > 20$, on a $\frac{3}{4} > \frac{5}{7}$.

Pour comparer deux nombres de dénominateurs différents, on les écrit d'abord avec un même dénominateur positif.

Ce dénominateur est un **multiple commun** : un nombre qui est à la fois un multiple de $4$ et un multiple de $7$. Le produit des deux dénominateurs convient toujours. Ici, $4 \times 7 = 28$.

**Propriété : Comparer deux rationnels quelconques**

Soit $a$ et $c$ deux nombres entiers relatifs, $b$ et $d$ deux nombres entiers positifs non nuls.

Les nombres $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ s'écrivent avec le même dénominateur positif $b \times d$ :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times d}{b \times d} \quad \text{et} \quad \frac{c}{d} = \frac{c \times b}{d \times b}.$$

Pour les comparer, on compare alors leurs numérateurs : $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ lorsque $a \times d < c \times b$. Tout autre dénominateur commun positif convient aussi.

**Remarque : Admis**

Ce résultat est admis. Il réunit deux règles déjà vues : les écritures égales, puis la comparaison avec un même dénominateur positif.

**Exemple : Deux nombres négatifs**

Comparons $-\frac{5}{6}$ et $-\frac{7}{9}$. Un multiple commun de $6$ et de $9$ est $18$. On écrit :

$$-\frac{5}{6} = \frac{-15}{18}$$
$$-\frac{7}{9} = \frac{-14}{18}$$

Comme $-15 < -14$, on a $-\frac{5}{6} < -\frac{7}{9}$.

## La méthode

**Méthode : comparer deux rationnels**

1. **Signes** : un nombre négatif est plus petit qu'un nombre positif. Si les signes sont contraires, tu as fini.
2. **Dénominateurs positifs** : rends positif chaque dénominateur.
3. **Même dénominateur** : prends un multiple commun des deux dénominateurs, par exemple leur produit.
4. **Compare les numérateurs**, puis conclus par une phrase.

**Attention : le même dénominateur d'abord**

✗ $\frac{4}{5} < \frac{7}{10}$, car $4 < 7$.

✓ On écrit d'abord $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$. Comme $8 > 7$, on a $\frac{4}{5} > \frac{7}{10}$.

On ne compare les numérateurs qu'avec un même dénominateur positif.

## En devoir

**Trouve l'erreur : L'erreur de Yanis**

Yanis écrit : « $\frac{2}{-5} > \frac{1}{3}$, car $2 > 1$. » Où est son erreur ?

**A.** Il n'y a pas d'erreur.

**Faux.**
$\frac{2}{-5}$ est négatif, et $\frac{1}{3}$ est positif : l'inégalité est fausse.

**B.** Il fallait comparer les dénominateurs.

**Faux.**
Comparer les dénominateurs ne suffit pas non plus : il faut d'abord regarder les signes.

**C.** Le premier nombre est négatif, donc plus petit.

**Juste.**
Le dénominateur $-5$ est négatif : $\frac{2}{-5}$ est négatif.

**Indice 1**

Cherche le signe de chacun des deux nombres.

**Correction**

Le dénominateur $-5$ est négatif, donc $\frac{2}{-5} = -\frac{2}{5}$ est négatif. Le nombre $\frac{1}{3}$ est positif. Donc :

$$\frac{2}{-5} < \frac{1}{3}$$

Comparer les numérateurs n'a de sens qu'avec des dénominateurs égaux et positifs.

**Remarque : Coin devoir : comparer**

En devoir, on justifie chaque comparaison. Avec des signes contraires : « D'après la propriété du signe, $\frac{-4}{-7}$ est positif et $\frac{-5}{8}$ est négatif. Un nombre négatif est plus petit qu'un nombre positif, donc $\frac{-5}{8} < \frac{-4}{-7}$. »

Avec le même signe : « D'après la propriété des écritures égales, $\frac{3}{8} = \frac{9}{24}$ et $\frac{1}{3} = \frac{8}{24}$. D'après la propriété de comparaison à même dénominateur positif, comme $9 > 8$, on a $\frac{3}{8} > \frac{1}{3}$. »

**À toi**

Compare $\frac{-7}{12}$ et $\frac{-5}{8}$. Compare ensuite $\frac{9}{-4}$ et $-2$.

**Indice 1**

Les deux premiers nombres sont négatifs : cherche un multiple commun de $12$ et de $8$.

**Indice 2**

$24$ est un multiple commun de $12$ et de $8$ : écris chaque nombre avec le dénominateur $24$.

**Indice 3**

Point délicat : écris $\frac{9}{-4}$ avec un dénominateur positif, et $-2$ avec le dénominateur $4$.

**Réponse**

**Première comparaison.** On prend le dénominateur $24$ :

$$\frac{-7}{12} = \frac{-14}{24}$$
$$\frac{-5}{8} = \frac{-15}{24}$$

Comme $-15 < -14$, on a $\frac{-5}{8} < \frac{-7}{12}$.

**Seconde comparaison.** On prend le dénominateur $4$ :

$$\frac{9}{-4} = \frac{-9}{4}$$
$$-2 = \frac{-8}{4}$$

Comme $-9 < -8$, on a $\frac{9}{-4} < -2$.

## Ranger et encadrer

## Ranger une liste

**Devine : Quatre plongeurs**

Par rapport à la surface, quatre plongeurs sont aux altitudes $-4$ m, $\frac{-13}{3}$ m, $\frac{-19}{5}$ m et $\frac{-9}{2}$ m. Lequel est le plus bas ?

**A.** Celui à $-4$ m.

**Faux.**
$-4 = \frac{-120}{30}$ : deux plongeurs sont plus bas.

**B.** Celui à $\frac{-13}{3}$ m.

**Faux.**
$\frac{-13}{3} = \frac{-130}{30}$ : un plongeur est encore plus bas.

**C.** Celui à $\frac{-19}{5}$ m.

**Faux.**
$\frac{-19}{5} = \frac{-114}{30}$ : c'est le plus haut des quatre.

**D.** Celui à $\frac{-9}{2}$ m.

**Juste.**
$\frac{-9}{2} = \frac{-135}{30}$ : c'est le plus petit nombre.

**Indice 1**

Le dénominateur $30$ est un multiple de $2$, de $3$ et de $5$.

**Correction**

Au dénominateur $30$, les altitudes s'écrivent $\frac{-120}{30}$, $\frac{-130}{30}$, $\frac{-114}{30}$ et $\frac{-135}{30}$.

Le plus petit numérateur est $-135$. Le plongeur à $\frac{-9}{2}$ m est donc le plus bas.

**Exemple : Ranger par signe, puis par numérateur**

Rangeons $\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{5}{6}$ et $-\frac{3}{4}$.

**Les négatifs.** On écrit $-\frac{3}{4} = \frac{-3}{4}$ et $-\frac{1}{2} = \frac{-2}{4}$. Comme $-3 < -2$, on a $-\frac{3}{4} < -\frac{1}{2}$.

**Zéro.** Il se place après les négatifs et avant les positifs.

**Les positifs.** On écrit $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$. Comme $4 < 5$, on a $\frac{2}{3} < \frac{5}{6}$.

**Conclusion.** Dans l'ordre croissant :

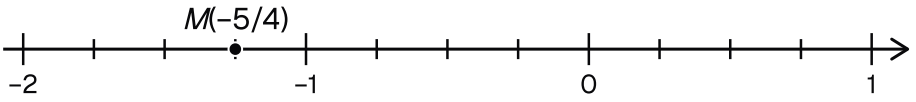
$$-\frac{3}{4} < -\frac{1}{2} < 0 < \frac{2}{3} < \frac{5}{6}$$

**Méthode : ranger et encadrer**

1. **Trie** les nombres : les négatifs, puis zéro, puis les positifs.
2. **Range chaque groupe** en écrivant ses nombres avec un même dénominateur positif.
3. **Encadre** un nombre $\frac{a}{b}$, avec $b$ positif, par les deux multiples de $b$ les plus proches de $a$, l'un en dessous et l'autre au-dessus. Si $a$ est un multiple de $b$, le nombre est un entier.

## Sur la droite graduée

Rappel de la 1AC : sur une droite graduée, chaque point est repéré par un nombre, son **abscisse**. Le plus petit de deux nombres est placé le plus à gauche. Trace une droite graduée en quarts d'unité, de $-2$ à $1$. Le point d'abscisse $-\frac{5}{4}$ est le cinquième trait à gauche de zéro. Il se trouve entre les points d'abscisses $-2$ et $-1$.




**Droite graduée en quarts d'unité, de -2 à 1 : le point M d'abscisse -5/4 est cinq traits à gauche de zéro, entre -2 et -1.**

**Exemple : Encadrer entre deux entiers consécutifs**

Encadrons $\frac{23}{6}$. Les multiples de $6$ qui entourent $23$ sont $18$ et $24$. Donc $\frac{18}{6} < \frac{23}{6} < \frac{24}{6}$. Comme $\frac{18}{6} = 3$ et $\frac{24}{6} = 4$ :

$$3 < \frac{23}{6} < 4$$

Pour $\frac{-23}{6}$, les multiples de $6$ qui entourent $-23$ sont $-24$ et $-18$. Comme $\frac{-24}{6} = -4$ et $\frac{-18}{6} = -3$ :

$$-4 < \frac{-23}{6} < -3$$

**Vérifie : Deux entiers consécutifs**

Entre quels entiers consécutifs se trouve $\frac{-31}{7}$ ?

**A.** Entre $-5$ et $-4$.

**Juste.**
$-35 < -31 < -28$, donc $\frac{-35}{7} < \frac{-31}{7} < \frac{-28}{7}$.

**B.** Entre $-4$ et $-3$.

**Faux.**
$-4 = \frac{-28}{7}$ et $-31 < -28$ : le nombre est plus petit que $-4$.

**C.** Entre $4$ et $5$.

**Faux.**

Le nombre est négatif : il est plus petit que $0$.

**D.** Entre $-31$ et $-30$.

**Faux.**

Ces entiers encadrent le numérateur, pas le nombre $\frac{-31}{7}$.

**Indice 1**

Cherche les multiples de $7$ qui entourent $-31$.

**Correction**

Les multiples de $7$ qui entourent $-31$ sont $-35$ et $-28$. Donc $\frac{-35}{7} < \frac{-31}{7} < \frac{-28}{7}$, c'est-à-dire :

$$-5 < \frac{-31}{7} < -4$$

## En devoir

**Remarque : Coin devoir : ranger**

En devoir, on justifie le rangement. Pour $\frac{-7}{10}$ et $\frac{-3}{5}$ : « D'après la propriété des écritures égales, $\frac{-3}{5} = \frac{-6}{10}$. D'après la propriété de comparaison à même dénominateur positif, comme $-7 < -6$, on a $\frac{-7}{10} < \frac{-3}{5}$. »

**À toi**

Range dans l'ordre croissant : $\frac{5}{-8}$ ; $\frac{1}{4}$ ; $-\frac{3}{4}$ ; $\frac{3}{8}$. Encadre ensuite $\frac{-17}{3}$ entre deux entiers consécutifs.

**Indice 1**

Rends positif le dénominateur de $\frac{5}{-8}$.

**Indice 2**

Écris tous les nombres avec le dénominateur $8$.

**Indice 3**

Point délicat : pour encadrer $\frac{-17}{3}$, cherche les multiples de $3$ qui entourent $-17$, sans oublier les signes.

**Réponse**

**Ranger.** Au dénominateur $8$, les quatre nombres s'écrivent $\frac{-5}{8}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{-6}{8}$ et $\frac{3}{8}$. On range les numérateurs : $-6 < -5 < 2 < 3$. Donc :

$$-\frac{3}{4} < \frac{5}{-8} < \frac{1}{4} < \frac{3}{8}$$

**Encadrer.** Les multiples de $3$ qui entourent $-17$ sont $-18$ et $-15$. Donc $\frac{-18}{3} < \frac{-17}{3} < \frac{-15}{3}$, c'est-à-dire :

$$-6 < \frac{-17}{3} < -5$$

## Ce qu'il faut retenir

**À retenir : Ce qu'il faut retenir**

- Un nombre rationnel s'écrit comme le quotient de deux entiers relatifs, le second n'étant pas nul.
- Numérateur non nul et même signe : positif. Signes contraires : négatif.
- On simplifie en divisant les deux termes par un même diviseur commun autre que $1$.
- Deux écritures désignent le même nombre lorsque leurs produits en croix sont égaux.
- Pour comparer deux rationnels, on leur donne d'abord un dénominateur commun positif.

Au chapitre suivant, tu apprendras à calculer avec les nombres rationnels : additionner, soustraire, multiplier et diviser.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Les nombres rationnels » (2ac · general · mathematiques)