BURHAN

Triangle : milieux et parallèles, l'essentiel

2ème Année Collège · Mathématiques

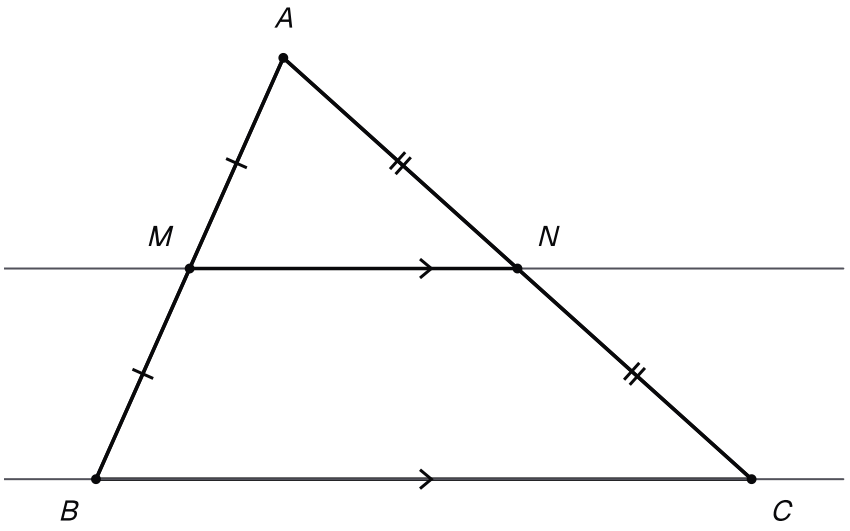
Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/milieux-et-paralleles-dans-un-triangle/resume

Chapitre	Semestre
Triangle : milieux et parallèles	Semestre 1

La droite des milieux

À retenir : Deux milieux, une parallèle

Dans un triangle, relie les milieux de deux côtés. Le segment obtenu est parallèle au troisième côté. Sa longueur est la moitié de celle de ce troisième côté.



Les milieux M et N de deux côtés : la droite (MN) est parallèle au côté [BC], le troisième.

Théorème : La droite des milieux

Dans un triangle ABC, soit M le milieu du côté $[AB]$ et N le milieu du côté $[AC]$. Alors :

- la droite (MN) est **parallèle** à la droite (BC) ;
- la longueur MN est **la moitié** de la longueur BC : $MN = \frac{BC}{2}$.

La droite (MN) est appelée la **droite des milieux** du triangle ABC relative au côté $[BC]$.

Exemple

Trace un triangle EFG avec $EF = 6$ cm, $EG = 7$ cm et $FG = 9$ cm. Place I, milieu de $[EF]$, et J, milieu de $[EG]$.

- I et J sont les milieux de deux côtés du même triangle EFG.
- D'après la propriété de la droite des milieux, $(IJ) \parallel (FG)$.
- De plus, $IJ = \dfrac{FG}{2} = \dfrac{9}{2} = 4{,}5$ cm.

Méthode : prouver un parallélisme avec deux milieux

1. **Repère** le triangle et les deux côtés qui portent les points.
2. **Vérifie** que chaque point est le milieu de son côté, avec une donnée de l'énoncé.
3. **Cite** la propriété de la droite des milieux.
4. **Conclus** : la droite des deux milieux est parallèle au troisième côté. Pour une longueur, ajoute que le segment des milieux vaut la moitié du troisième côté.

Attention : deux vrais milieux, dans un même triangle

La propriété demande **deux milieux**, sur deux côtés **d'un même triangle**. Si N est seulement un point de $[AC]$, rien ne prouve que (MN) est parallèle à (BC).

Ne te fie pas à la figure : un point qui semble au milieu n'est pas forcément le milieu.

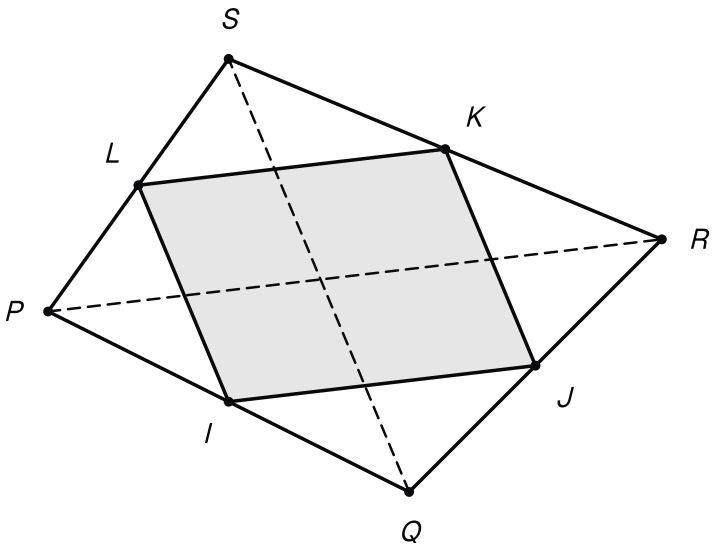
Les milieux des côtés d'un quadrilatère

Méthode : le quadrilatère des milieux

Soit $PQRS$ un quadrilatère dont les diagonales $[PR]$ et $[QS]$ se coupent, et I, J, K, L les milieux de $[PQ]$, $[QR]$, $[RS]$ et $[SP]$.

1. **Avec la diagonale** $[PR]$: dans les triangles PQR et PSR, la propriété de la droite des milieux donne $(IJ) \parallel (PR)$ et $(LK) \parallel (PR)$, avec $IJ = LK = \dfrac{PR}{2}$.
2. **Recommence avec la diagonale** $[QS]$: dans les triangles QRS et QPS, tu obtiens $(JK) \parallel (QS)$ et $(IL) \parallel (QS)$, avec $JK = IL = \dfrac{QS}{2}$.
3. **Conclus.** Rappel de 1re année : deux droites parallèles à (PR) sont parallèles entre elles. Donc $(IJ) \parallel (LK)$. De même avec (QS) : $(IL) \parallel (JK)$.

Les côtés opposés de $IJKL$ sont parallèles deux à deux : par définition, $IJKL$ est un parallélogramme.



PQRS et ses deux diagonales : les milieux I, J, K, L des côtés forment un parallélogramme.

Exemple

Si la diagonale $[PR]$ mesure 8 cm, alors $IJ = LK = \dfrac{8}{2} = 4$ cm.

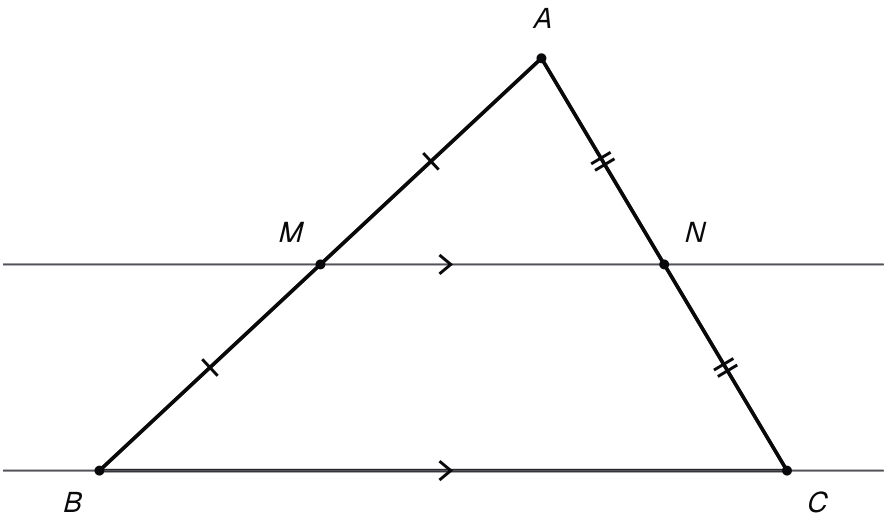
Si l'autre diagonale $[QS]$ mesure 5 cm, les triangles QRS et QPS donnent $JK = IL = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$ cm.

Le périmètre de $IJKL$ vaut alors $4 + 2{,}5 + 4 + 2{,}5 = 13$ cm.

La parallèle par un milieu

Théorème : Droite passant par le milieu d'un côté et parallèle à un deuxième côté

Dans un triangle ABC, soit M le milieu du côté $[AB]$. La droite qui passe par M et qui est **parallèle** à la droite (BC) coupe le côté $[AC]$ **en son milieu**.



Une parallèle à (BC) qui part du milieu M de [AB] arrive au milieu N de [AC].

Exemple

Trace un triangle RST avec $RS = 8$ cm, $ST = 6$ cm et $RT = 10$ cm. Place K, milieu de $[RS]$. La parallèle à (ST) passant par K coupe $[RT]$ en L.

- K est le milieu du côté $[RS]$, et (KL) est parallèle à (ST).
- D'après la propriété de la parallèle par un milieu, L est le milieu de $[RT]$: $RL = \dfrac{10}{2} = 5$ cm.
- Maintenant, K et L sont deux milieux : la propriété de la droite des milieux donne $KL = \dfrac{ST}{2} = 3$ cm.

Méthode : prouver qu'un point est un milieu

1. **Repère** le triangle et le milieu que tu connais déjà.
2. **Vérifie** que la droite tracée par ce milieu est parallèle à un deuxième côté.
3. **Cite** la propriété de la parallèle par un milieu.
4. **Conclus** : cette droite coupe le troisième côté en son milieu.

Attention : deux propriétés voisines

Ces deux propriétés se ressemblent, mais elles ne partent pas des mêmes données.

- Avec **deux milieux**, la propriété de la droite des milieux te donne un parallélisme et une longueur.

- Avec **un milieu et une parallèle**, la propriété de la parallèle par un milieu te donne un nouveau milieu.

Avant d'écrire, note ce que tu sais et ce que tu cherches.

Des longueurs proportionnelles

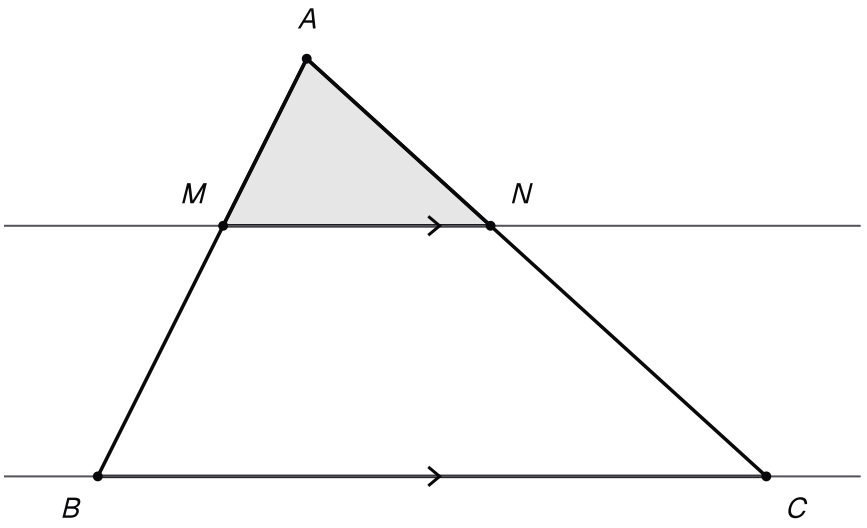
Propriété : Parallèle à un côté : longueurs proportionnelles

Dans un triangle ABC, soit M un point du côté $[AB]$ et N un point du côté $[AC]$, distincts de A. Si la droite (MN) est **parallèle** à la droite (BC), alors les longueurs des côtés des triangles AMN et ABC sont **proportionnelles** :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Tu le reverras plus en détail l'année prochaine.



Le petit triangle AMN et le grand triangle ABC, emboîtés en A, avec (MN) parallèle à (BC).

À retenir : En clair

Les longueurs des côtés des deux triangles sont **proportionnelles**.

Pour aller d'un côté du grand triangle au côté correspondant du petit, on multiplie par le rapport $\frac{AM}{AB}$.

Du petit au grand, on divise par ce même rapport.

Méthode : calculer une longueur avec les rapports

1. **Vérifie** les hypothèses : un point sur chacun de deux côtés, et la droite qui les joint parallèle au troisième côté.
2. **Écris** les trois rapports égaux : les côtés du petit triangle en haut, ceux du grand en bas.
3. **Remplace** les longueurs connues. Garde le rapport connu et celui qui contient l'inconnue.
4. **Calcule** avec l'égalité des produits en croix. Contrôle ton résultat : dans le petit triangle, chaque côté mesure moins que son correspondant dans le grand.

Exemple

Dans un triangle DEF, $DE = 5$ cm, $DF = 7{,}5$ cm et $EF = 6$ cm. Le point M est sur $[DE]$ avec $DM = 3$ cm, le point N est sur $[DF]$, et $(MN) \parallel (EF)$.

- Les hypothèses sont vérifiées, donc $\dfrac{DM}{DE} = \dfrac{DN}{DF} = \dfrac{MN}{EF}$.
- Avec les longueurs : $\dfrac{3}{5} = \dfrac{DN}{7{,}5} = \dfrac{MN}{6}$.
- Par les produits en croix, $DN = \dfrac{3 \times 7{,}5}{5} = 4{,}5$ cm.
- De la même façon, $MN = \dfrac{3 \times 6}{5} = 3{,}6$ cm.

Attention : en bas, un côté entier

Dans chaque rapport, le nombre du bas est un côté **entier** du grand triangle.

Si $AM = 4$ cm et $MB = 6$ cm, alors $AB = 4 + 6 = 10$ cm. Le bon rapport est $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{4}{10}$, et non $\dfrac{4}{6}$.

Attention : la moitié, seulement avec deux milieux

L'égalité $MN = \dfrac{BC}{2}$ n'est vraie que si M et N sont les milieux des deux côtés.

Dans l'exemple du triangle DEF, $MN = 3{,}6$ cm, alors que $\dfrac{EF}{2} = 3$ cm. Pour une autre parallèle, utilise les rapports.

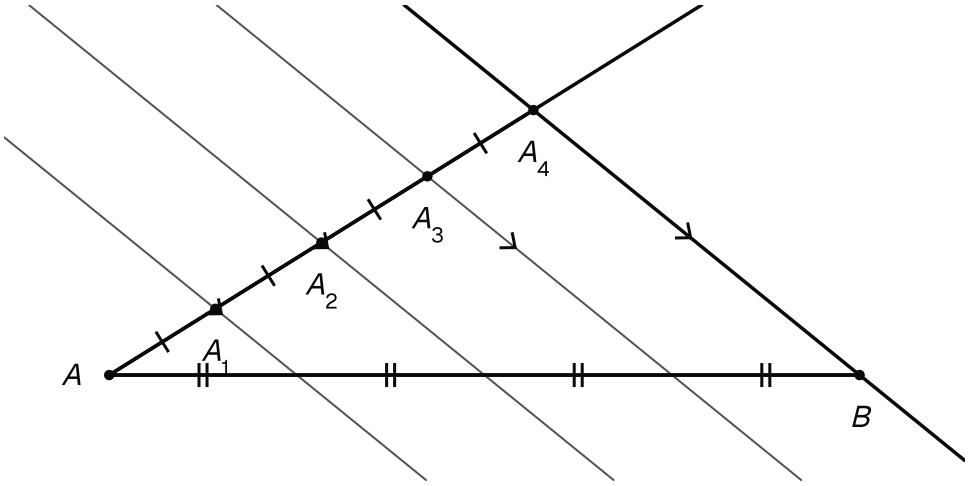
Partager un segment

Méthode : partager un segment en parts égales

Pour partager $[AB]$ en n segments de même longueur :

1. **Trace** une demi-droite d'origine A, qui ne porte pas B.
2. **Reporte** au compas n fois le même écartement, à partir de A : tu obtiens A_1, A_2, …, A_n.

3. **Trace** la droite (A_nB).
4. **Trace** les parallèles à (A_nB) qui passent par A_1, ..., A_{n-1}. Elles coupent $[AB]$ en n segments de même longueur.



Partage de [AB] en quatre : quatre reports égaux sur une demi-droite issue de A, puis des parallèles à (A4B).

Exemple : un segment de 7 cm en trois

On partage $[AB]$, de longueur 7 cm, en trois. Le nombre $\frac{7}{3}$ ne tombe pas juste en millimètres : la règle graduée ne suffit pas.

Reporte trois fois 2 cm sur la demi-droite : A_1, A_2, A_3. Les parallèles à (A_3B) par A_1 et A_2 coupent $[AB]$ en P et Q.

Dans le triangle AA_3B, $(A_1P) \parallel (A_3B)$. Les longueurs sont proportionnelles :

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AA_1}{AA_3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Donc $AP = \frac{7}{3}$ cm.

De même, $AQ = \frac{14}{3}$ cm : chaque part mesure $\frac{7}{3}$ cm.

Remarque : Pour deux ou quatre parts

Les milieux suffisent. Le milieu de $[AB]$ le coupe en deux parts égales. Les milieux de ces deux moitiés le coupent en quatre parts égales.

Quelle propriété choisir ?

Méthode : Quelle propriété pour quelle question ?

- Tu connais **deux milieux** et tu cherches un parallélisme ou une longueur : la propriété de la droite des milieux.
- Tu connais **un milieu** et **une parallèle** à un deuxième côté, et tu cherches un milieu : la propriété de la parallèle par un milieu.
- Tu connais un point sur chacun de deux côtés, et la droite qui les joint est **parallèle** au troisième côté ; tu cherches une longueur : la propriété des longueurs proportionnelles.
- Tu dois **partager un segment** en parts égales : demi-droite, compas, puis parallèles.

Méthode : Rédiger une démonstration courte

Une démonstration courte tient en trois temps.

1. **On sait que** : écris les données utiles de l'énoncé.
2. **Or** : cite la propriété du cours que tu emploies.
3. **Donc** : écris la conclusion par une phrase.

Chaque hypothèse de la propriété doit figurer dans la première étape.

M et N milieux de [AB] et [AC] : parallélisme

$$(MN) \parallel (BC)$$

M et N milieux de [AB] et [AC] : longueur

$$MN = \frac{BC}{2}$$

M sur [AB], N sur [AC], (MN) parallèle à (BC)

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Égalité des produits en croix, b et d non nuls

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ signifie } a \times d = b \times c$$