BURHAN

Triangle : milieux et parallèles : exercices, niveau examen

2ème Année Collège · Mathématiques

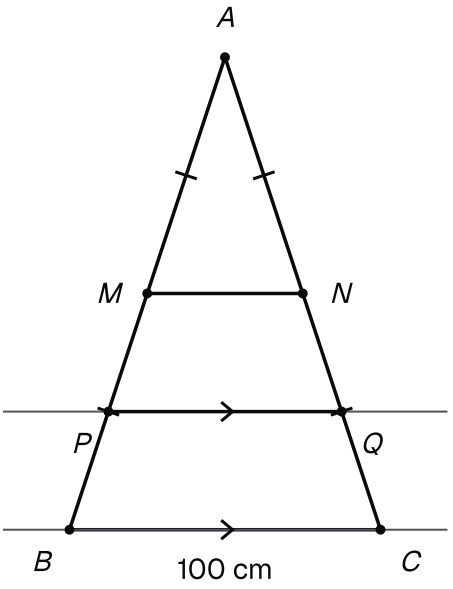
Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/milieux-et-paralleles-dans-un-triangle/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Triangle : milieux et parallèles	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Le chevalet du peintre

Durée conseillée : 20 minutes. Vu de face, un chevalet forme un triangle ABC : A est le sommet, $AB = AC = 160$ cm et $BC = 100$ cm. Une tablette $[MN]$ est fixée au milieu M de $[AB]$ et au milieu N de $[AC]$. Une seconde tablette $[PQ]$ est fixée plus bas : P est sur $[AB]$ avec $AP = 120$ cm, Q est sur $[AC]$, et (PQ) est parallèle à (BC). Pour ta figure, prends 1 cm pour 20 cm.



Le chevalet vu de face : AB = AC = 160 cm, BC = 100 cm, la tablette [MN] aux milieux et la tablette [PQ] parallèle à [BC], avec AP = 120 cm.

1. 1,5 pts

Justifie, en citant la propriété utilisée, que (MN) est parallèle à (BC).

INDICE

Outil : écris d'abord ce que sont M et N pour le triangle ABC.

CORRIGÉ

On sait que, dans le triangle ABC, le point M est le milieu du côté $[AB]$ et le point N est le milieu du côté $[AC]$.

Or, d'après la propriété de la droite des milieux, (MN) est alors parallèle au troisième côté, $[BC]$.

Donc (MN) est parallèle à (BC).

Conclusion. La tablette (MN) est parallèle à (BC), d'après la propriété de la droite des milieux.

2. 1 pts

Calcule la longueur MN.

INDICE

Outil : la propriété de la question précédente donne aussi la longueur du segment des milieux.

CORRIGÉ

Les points M et N sont les milieux de $[AB]$ et de $[AC]$. D'après la propriété de la droite des milieux, la tablette $[MN]$ mesure la moitié de $[BC]$:

$$MN = \frac{BC}{2} = \frac{100}{2} = 50 \text{ cm}$$

Conclusion. La tablette du haut mesure 50 cm.

3. 1 pts

Calcule le périmètre du triangle AMN.

INDICE

Début : AM et AN sont des moitiés de côtés du triangle ABC.

CORRIGÉ

Les côtés $[AM]$ et $[AN]$. Le point M est le milieu de $[AB]$, donc $AM = \frac{160}{2} = 80$ cm. De même, N est le milieu de $[AC]$, donc $AN = 80$ cm.

Le périmètre. On ajoute les trois côtés du triangle AMN, avec $MN = 50$ cm (question 2) :

$$\begin{aligned} &AM + AN + MN \\ &= 80 + 80 + 50 \\ &= 210 \text{ cm} \end{aligned}$$

Conclusion. Le périmètre du triangle AMN est 210 cm.

4. 1,5 pts

En utilisant l'égalité des rapports dans le triangle ABC, calcule la longueur PQ.

INDICE

Point délicat : P n'est pas un milieu : la moitié ne convient pas. Commence par simplifier $\dfrac{AP}{AB}$.

CORRIGÉ

Les conditions. Dans le triangle ABC, le point P est sur $[AB]$, le point Q est sur $[AC]$, et (PQ) est parallèle à (BC).

Les rapports. D'après la propriété des longueurs proportionnelles, $\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{PQ}{BC}$. Le rapport connu se simplifie :

$$\frac{AP}{AB} = \frac{120}{160} = \frac{3}{4}$$

La longueur. On a donc $\dfrac{3}{4} = \dfrac{PQ}{100}$. Par l'égalité des produits en croix :

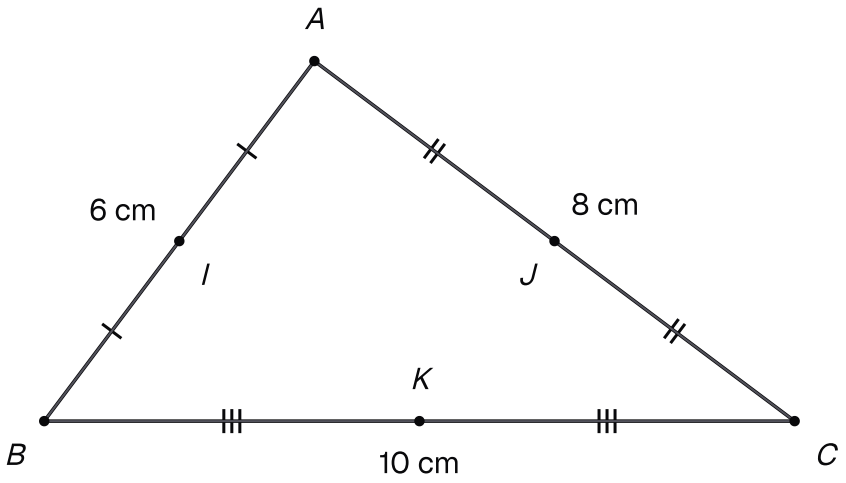
$$PQ = \frac{3 \times 100}{4} = 75 \text{ cm}$$

Conclusion. La seconde tablette mesure $PQ = 75$ cm.

Exercice 2 — 5 pts

Trois milieux et un parallélogramme

Durée conseillée : 20 minutes. Trace un triangle ABC tel que $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm et $BC = 10$ cm. Place I, milieu de $[AB]$, J, milieu de $[AC]$, et K, milieu de $[BC]$.



Le triangle ABC avec AB = 6 cm, AC = 8 cm et BC = 10 cm, et les milieux I, J et K de ses trois côtés.

1. — 1,5 pts

Justifie que (IJ) est parallèle à (BC), puis calcule IJ.

INDICE

Outil : I et J sont les milieux de deux côtés du triangle ABC ; repère le troisième côté.

CORRIGÉ

Les milieux. Dans le triangle ABC, le point I est le milieu de $[AB]$ et le point J est le milieu de $[AC]$.

Parallélisme. D'après la propriété de la droite des milieux, (IJ) est parallèle au troisième côté, $[BC]$.

Longueur. La même propriété donne la moitié de BC :

$$IJ = \frac{BC}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm}$$

Conclusion. La droite (IJ) est parallèle à (BC), et $IJ = 5$ cm.

2. 1 pts

De la même façon, justifie que (JK) est parallèle à (AB), puis calcule JK.

INDICE

Début : cette fois, les deux milieux sont sur les côtés $[AC]$ et $[BC]$.

CORRIGÉ

Les milieux. Dans le triangle ABC, le point J est le milieu de $[AC]$ et le point K est le milieu de $[BC]$.

Parallélisme. D'après la propriété de la droite des milieux, (JK) est parallèle au troisième côté, $[AB]$.

Longueur. La même propriété donne la moitié de AB :

$$JK = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm}$$

Conclusion. La droite (JK) est parallèle à (AB), et $JK = 3$ cm.

3. 1,5 pts

Déduis-en que le quadrilatère $IBKJ$ est un parallélogramme.

INDICE

Outil : rappelle-toi la définition d'un parallélogramme : que doivent vérifier ses côtés opposés ?

CORRIGÉ

Première paire de côtés. D'après la question 1, (IJ) est parallèle à (BC), la droite qui porte le côté $[BK]$.

Seconde paire de côtés. D'après la question 2, (JK) est parallèle à (AB), la droite qui porte le côté $[IB]$.

Définition. Les côtés opposés du quadrilatère $IBKJ$ sont donc parallèles deux à deux. Par définition, $IBKJ$ est un parallélogramme.

Conclusion. Le quadrilatère $IBKJ$ est un parallélogramme.

4. 1 pts

Calcule le périmètre du parallélogramme $IBKJ$.

INDICE

Début : calcule IB et BK, puis pense aux côtés opposés d'un parallélogramme.

CORRIGÉ

Deux côtés. Le point I est le milieu de $[AB]$, donc $IB = 3$ cm. Le point K est le milieu de $[BC]$, donc $BK = 5$ cm.

Le périmètre. Les côtés opposés d'un parallélogramme ont la même longueur. Le périmètre vaut donc deux fois la somme de deux côtés consécutifs :

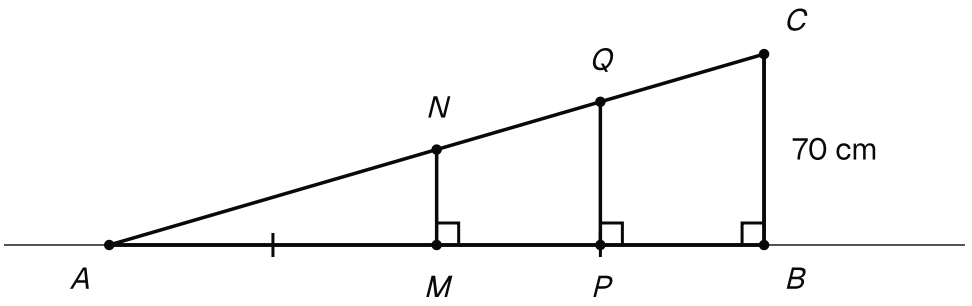
$$2 \times (3 + 5) = 16 \text{ cm}$$

Conclusion. Le périmètre du parallélogramme $IBKJ$ est 16 cm.

Exercice 3 — 5 pts

La rampe de chargement

Durée conseillée : 20 minutes. Vue de côté, une rampe de chargement forme un triangle ABC : $[AB]$ est le sol, $[BC]$ est un poteau perpendiculaire au sol et $[AC]$ est la rampe. On a $AB = 240$ cm, $BC = 70$ cm et $AC = 250$ cm. Deux supports sont perpendiculaires au sol : $[MN]$, où M est le milieu de $[AB]$, et $[PQ]$, où P est sur $[AB]$ avec $AP = 180$ cm. Les points N et Q sont sur la rampe $[AC]$. Pour ta figure, prends 1 cm pour 20 cm.



La rampe de chargement vue de côté : sol [AB] de 240 cm, poteau [BC] de 70 cm, rampe [AC] de 250 cm, et deux supports perpendiculaires au sol.

1. — 1 pts

Justifie que (MN) et (PQ) sont parallèles à (BC).

INDICE

Outil : les trois droites (MN), (PQ) et (BC) ont une chose en commun : leur position par rapport au sol (AB).

CORRIGÉ

Rappel de 1re année : deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles.

Le support $[MN]$. Les droites (MN) et (BC) sont toutes les deux perpendiculaires au sol (AB). Donc (MN) est parallèle à (BC).

Le support $[PQ]$. De même, (PQ) et (BC) sont perpendiculaires à (AB). Donc (PQ) est parallèle à (BC).

Conclusion. Les droites (MN) et (PQ) sont parallèles à (BC).

2. 1,5 pts

Justifie que N est le milieu de $[AC]$, puis calcule MN.

INDICE

Début : tu connais le milieu M du côté $[AB]$ et une parallèle à (BC) qui passe par M.

CORRIGÉ

Le milieu N. Dans le triangle ABC, le point M est le milieu du côté $[AB]$, et la droite (MN) passe par M parallèlement à (BC) (question 1). D'après la propriété de la parallèle par un milieu, (MN) coupe $[AC]$ en son milieu : N est le milieu de $[AC]$.

La longueur MN. Les points M et N sont maintenant deux milieux de côtés. D'après la propriété de la droite des milieux, $[MN]$ mesure la moitié de $[BC]$:

$$MN = \frac{BC}{2} = \frac{70}{2} = 35 \text{ cm}$$

Conclusion. Le point N est le milieu de $[AC]$, et $MN = 35$ cm.

3. 1,5 pts

Calcule la hauteur PQ du second support.

INDICE

Point délicat : P n'est pas un milieu. Écris l'égalité des rapports dans le triangle ABC et simplifie $\frac{AP}{AB}$.

CORRIGÉ

Les conditions. Dans le triangle ABC, le point P est sur $[AB]$, le point Q est sur $[AC]$, et (PQ) est parallèle à (BC) (question 1).

Les rapports. D'après la propriété des longueurs proportionnelles :

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC}$$

Le rapport connu se simplifie :

$$\frac{AP}{AB} = \frac{180}{240} = \frac{3}{4}$$

La longueur. La hauteur PQ vaut les trois quarts de BC :

$$PQ = \frac{3 \times 70}{4} = 52{,}5 \text{ cm}$$

Conclusion. Le second support mesure $52{,}5$ cm de haut.

4. 1 pts

Déduis-en la longueur AQ.

INDICE

Début : utilise le même rapport, avec le côté $[AC]$.

CORRIGÉ

D'après l'égalité des rapports de la question 3, $\dfrac{AQ}{AC} = \dfrac{AP}{AB} = \dfrac{3}{4}$. La longueur AQ vaut donc les trois quarts de AC :

$$AQ = \frac{3 \times 250}{4} = 187{,}5 \text{ cm}$$

Conclusion. On a $AQ = 187{,}5$ cm.

Exercice 4 5 pts

Un côté partagé en trois

Durée conseillée : 20 minutes. Trace un triangle ABC tel que $AB = 7$ cm, $AC = 6$ cm et $BC = 9$ cm. Les points P et R du côté $[AB]$, construits à la question 1, le partagent en trois segments de même longueur, P étant le plus près de A. La parallèle à (BC) passant par P coupe $[AC]$ en Q ; la parallèle à (BC) passant par R coupe $[AC]$ en S.

1. 1,5 pts

Sur une demi-droite $[Ax)$ qui ne porte pas B, reporte au compas trois fois 2 cm : tu obtiens A_1, A_2, A_3. Trace (A_3B), puis les parallèles à (A_3B) passant par A_1 et A_2 : elles coupent $[AB]$ en P et R. Justifie que $AP = PR = RB$.

INDICE

Outil : travaille dans le triangle AA_3B ; pour PR et RB, calcule d'abord AR, puis des différences.

CORRIGÉ

Le triangle de travail. Dans le triangle AA_3B, les points A_1 et A_2 sont sur le côté $[AA_3]$, les points P et R sont sur le côté $[AB]$, et les droites (A_1P) et (A_2R) sont parallèles à (A_3B).

Les rapports. D'après la propriété des longueurs proportionnelles, avec $AA_1 = 2$ cm, $AA_2 = 4$ cm et $AA_3 = 6$ cm :

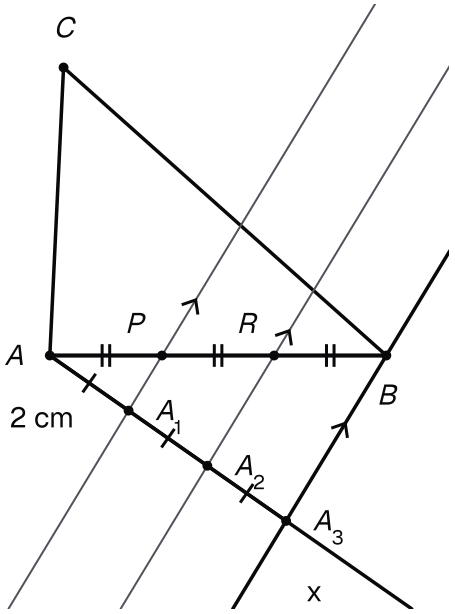
$$\frac{AP}{AB} = \frac{AA_1}{AA_3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$
$$\frac{AR}{AB} = \frac{AA_2}{AA_3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Les longueurs AP et AR. On multiplie par $AB = 7$ cm : $AP = \frac{7}{3}$ cm et $AR = \frac{14}{3}$ cm.

Les longueurs PR et RB. On calcule des différences :

$$\begin{aligned} PR &= AR - AP \\ &= \frac{14}{3} - \frac{7}{3} = \frac{7}{3}\ \text{cm} \\ RB &= AB - AR \\ &= 7 - \frac{14}{3} = \frac{7}{3}\ \text{cm} \end{aligned}$$

Conclusion. Les trois longueurs valent $\frac{7}{3}$ cm, donc $AP = PR = RB$.



Le côté [AB] du triangle partagé en trois : reports de 2 cm sur la demi-droite [Ax), droite (A3B) et parallèles qui placent P et R.

2. 1 pts

Calcule AQ et PQ.

INDICE

Début : la question précédente donne déjà la valeur du rapport $\dfrac{AP}{AB}$.

CORRIGÉ

Les conditions. Dans le triangle ABC, le point P est sur $[AB]$, le point Q est sur $[AC]$, et (PQ) est parallèle à (BC).

Les rapports. D'après la propriété des longueurs proportionnelles, $\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{AQ}{AC} = \dfrac{PQ}{BC}$, et ce rapport vaut $\dfrac{1}{3}$ d'après la question 1.

Les longueurs. On prend le tiers de AC et le tiers de BC :

$$AQ = \frac{6}{3} = 2 \text{ cm}$$
$$PQ = \frac{9}{3} = 3 \text{ cm}$$

Conclusion. On a $AQ = 2$ cm et $PQ = 3$ cm.

3. 1,5 pts

On regarde maintenant le triangle ARS. Justifie que Q est le milieu de $[AS]$.

INDICE

Point délicat : le triangle de travail n'est plus ABC. Regarde d'abord la position de P sur $[AR]$, puis compare les droites (PQ) et (RS).

CORRIGÉ

Le milieu P. Le point P est sur $[AR]$ et $AP = PR$ d'après la question 1 : P est le milieu de $[AR]$.

Le parallélisme. Les droites (PQ) et (RS) sont toutes les deux parallèles à (BC). Rappel de 1re année : elles sont alors parallèles entre elles. Donc (PQ) est parallèle à (RS).

La propriété. Dans le triangle ARS, la droite (PQ) passe par le milieu P du côté $[AR]$ et elle est parallèle à (RS). D'après la propriété de la parallèle par un milieu, elle coupe le côté $[AS]$ en son milieu. Donc Q est le milieu de $[AS]$.

Conclusion. Dans le triangle ARS, le point Q est le milieu du côté $[AS]$.

4. 1 pts

Déduis-en AS et RS. Contrôle ensuite RS par l'égalité des rapports dans le triangle ABC.

INDICE

Ensuite : P et Q sont deux milieux du triangle ARS ; pour le contrôle, utilise $\dfrac{AR}{AB}$.

CORRIGÉ

Calcul de AS. D'après la question 3, Q est le milieu de $[AS]$:

$$\begin{aligned} AS &= 2 \times AQ \\ &= 2 \times 2 = 4 \text{ cm} \end{aligned}$$

Calcul de RS. Dans le triangle ARS, les points P et Q sont les milieux de $[AR]$ et de $[AS]$. D'après la propriété de la droite des milieux, $PQ = \dfrac{RS}{2}$, donc :

$$\begin{aligned} RS &= 2 \times PQ \\ &= 2 \times 3 = 6 \text{ cm} \end{aligned}$$

Contrôle. Dans le triangle ABC, R est sur $[AB]$, S est sur $[AC]$ et (RS) est parallèle à (BC) ; d'après la propriété des longueurs proportionnelles, $\dfrac{RS}{BC} = \dfrac{AR}{AB} = \dfrac{2}{3}$. On en tire :

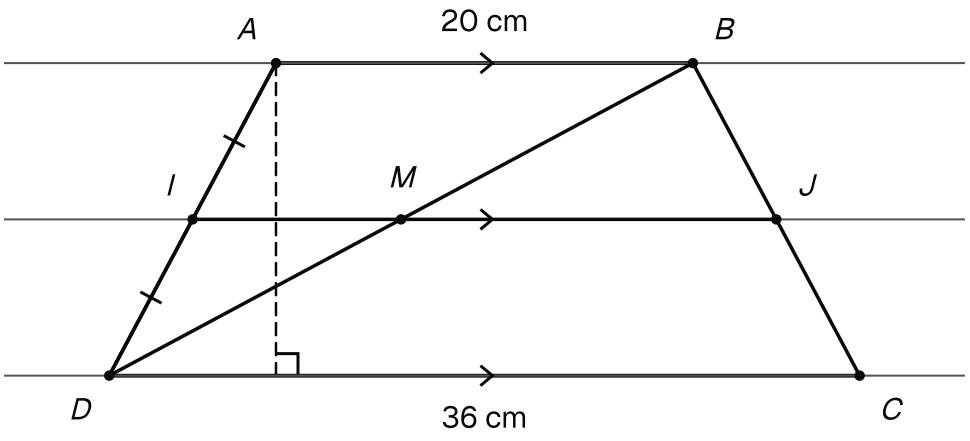
$$RS = \frac{2 \times 9}{3} = 6 \text{ cm}$$

Conclusion. On a $AS = 4$ cm et $RS = 6$ cm ; les deux méthodes donnent la même valeur de RS.

Exercice 5 5 pts

Le ruban de l'abat-jour

Durée conseillée : 20 minutes. Vu de face, un abat-jour forme un quadrilatère $ABCD$: le bord du haut $[AB]$ et le bord du bas $[DC]$ sont parallèles, avec $AB = 20$ cm et $DC = 36$ cm ; les bords inclinés mesurent $AD = BC = 17$ cm et la hauteur de l'abat-jour est 15 cm. On trace la diagonale $[BD]$. Le point I est le milieu de $[AD]$. La parallèle à (AB) passant par I coupe $[BD]$ en M, puis $[BC]$ en J. On admet que M est entre I et J. Pour ta figure, prends 1 cm pour 4 cm.



L'abat-jour ABCD vu de face : bords parallèles AB = 20 cm et DC = 36 cm, hauteur 15 cm, diagonale [BD] et parallèle à (AB) menée par le milieu I de [AD].

1. 1,5 pts

Justifie que M est le milieu de $[BD]$, puis calcule IM.

INDICE

Outil : travaille dans le triangle DAB : I est le milieu d'un de ses côtés.

CORRIGÉ

Le milieu M. Dans le triangle DAB, le point I est le milieu du côté $[AD]$, et la droite (IM) passe par I parallèlement à (AB). D'après la propriété de la parallèle par un milieu, (IM) coupe le côté $[BD]$ en son milieu : M est le milieu de $[BD]$.

La longueur IM. Les points I et M sont donc les milieux de deux côtés du triangle DAB. D'après la propriété de la droite des milieux, $[IM]$ mesure la moitié de $[AB]$:

$$IM = \frac{AB}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ cm}$$

Conclusion. Le point M est le milieu de $[BD]$, et $IM = 10$ cm.

2. 1 pts

Justifie que (MJ) est parallèle à (DC).

INDICE

Début : la droite (MJ) est la droite tracée par I ; compare-la, puis compare (DC), à la même droite (AB).

CORRIGÉ

Rappel de 1re année : deux droites parallèles à une même droite sont parallèles entre elles.

La droite (MJ) est la parallèle à (AB) tracée par I. La droite (DC) est parallèle à (AB), car les deux bords de l'abat-jour sont parallèles d'après l'énoncé.

Les deux droites (MJ) et (DC) sont parallèles à (AB). Donc (MJ) est parallèle à (DC).

Conclusion. Les droites (MJ) et (DC) sont parallèles.

3. 1,5 pts

Déduis-en que J est le milieu de $[BC]$, puis calcule MJ.

INDICE

Ensuite : change de triangle : utilise le triangle BDC et le milieu trouvé à la question 1.

CORRIGÉ

Le milieu J. On change de triangle. Dans le triangle BDC, le point M est le milieu du côté $[BD]$ (question 1), et la droite (MJ) passe par M parallèlement à (DC) (question 2). D'après la propriété de la parallèle par un milieu, (MJ) coupe le côté $[BC]$ en son milieu : J est le milieu de $[BC]$.

La longueur MJ. Les points M et J sont les milieux de deux côtés du triangle BDC. D'après la propriété de la droite des milieux, $[MJ]$ mesure la moitié de $[DC]$:

$$MJ = \frac{DC}{2} = \frac{36}{2} = 18 \text{ cm}$$

Conclusion. Le point J est le milieu de $[BC]$, et $MJ = 18$ cm.

4. 1 pts

Un ruban est cousu le long de $[IJ]$. Calcule sa longueur, puis compare-la à $\dfrac{AB+DC}{2}$.

INDICE

Début : M est entre I et J ; ajoute les deux longueurs trouvées.

CORRIGÉ

Longueur du ruban. Les points I, M et J sont sur la même droite, et M est entre I et J (donnée de l'énoncé). On ajoute les longueurs des questions 1 et 3 :

$$\begin{aligned} IJ &= IM + MJ \\ &= 10 + 18 = 28 \text{ cm} \end{aligned}$$

Comparaison. On calcule la demi-somme des deux bords parallèles :

$$\begin{aligned} \frac{AB+DC}{2} &= \frac{20+36}{2} \\ &= \frac{56}{2} = 28 \text{ cm} \end{aligned}$$

Conclusion. Le ruban mesure 28 cm : sa longueur est égale à $\dfrac{AB+DC}{2}$, la demi-somme des longueurs des deux bords parallèles.