BURHAN

Triangle : milieux et parallèles : exercices, entraînement

2ème Année Collège · Mathématiques

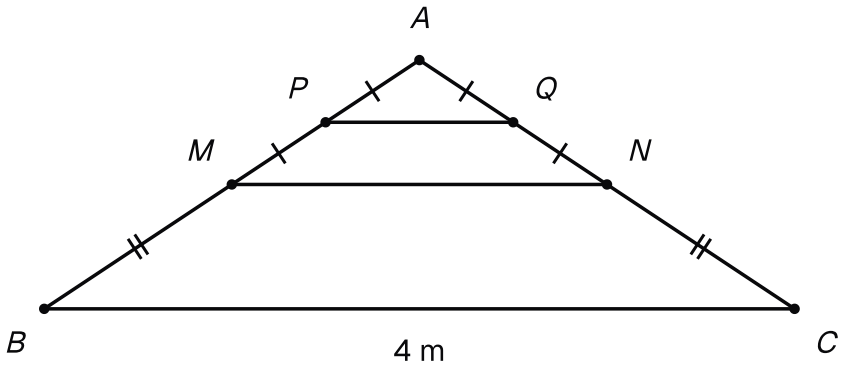
Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/milieux-et-paralleles-dans-un-triangle/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Triangle : milieux et parallèles	Entraînement	7

Exercice 1

Les poutres du toit

La façade d'une cabane a un toit en forme de triangle ABC. Le point A est le **faîte**, c'est-à-dire le point le plus haut. On a $AB = AC = 2{,}4$ m et $BC = 4$ m. Une poutre $[MN]$ joint le milieu M de $[AB]$ et le milieu N de $[AC]$. Une petite poutre $[PQ]$ joint le milieu P de $[AM]$ et le milieu Q de $[AN]$. Pour ta figure, prends 2 cm pour 1 m.



La façade de la cabane : le toit ABC avec AB = AC = 2,4 m et BC = 4 m, la poutre [MN] entre les milieux et la petite poutre [PQ] plus haut.

1.

Justifie que (MN) est parallèle à (BC), puis calcule MN.

INDICE

Outil : M et N sont les milieux de deux côtés du triangle ABC.

CORRIGÉ

Les milieux. Dans le triangle ABC, le point M est le milieu de $[AB]$ et le point N est le milieu de $[AC]$.

Parallélisme. D'après la propriété de la droite des milieux, (MN) est parallèle au troisième côté, donc à (BC).

Longueur. La même propriété donne la longueur de la poutre :

$$MN = \frac{BC}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ m}$$

Conclusion. La droite (MN) est parallèle à (BC), et la poutre $[MN]$ mesure 2 m.

2.

Calcule la longueur de la petite poutre $[PQ]$.

INDICE

Outil : applique la même propriété, mais dans un autre triangle : celui qui a pour sommets A, M et N.

CORRIGÉ

On change de triangle : on se place maintenant dans le triangle AMN.

Les milieux. Le point P est le milieu de $[AM]$ et le point Q est le milieu de $[AN]$.

Longueur. D'après la propriété de la droite des milieux, (PQ) est parallèle à (MN), et $[PQ]$ mesure la moitié de $[MN]$:

$$PQ = \frac{MN}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ m}$$

Conclusion. La petite poutre $[PQ]$ mesure 1 m.

3.

Calcule AP, puis retrouve la longueur PQ avec l'égalité des rapports dans le triangle ABC.

INDICE

Début : AM est la moitié de AB, et AP est la moitié de AM. Pour les rapports, vérifie d'abord que (PQ) est parallèle à (BC).

CORRIGÉ

Calcul de AP. Le point M est le milieu de $[AB]$, puis le point P est le milieu de $[AM]$:

$$AM = \frac{2{,}4}{2} = 1{,}2 \text{ m}$$
$$AP = \frac{1{,}2}{2} = 0{,}6 \text{ m}$$

Parallélisme. D'après la question 2, (PQ) est parallèle à (MN), et d'après la question 1, (BC) l'est aussi. Rappel de 1re année : (PQ) et (BC) sont alors parallèles entre elles. Donc $(PQ) \parallel (BC)$.

Les rapports. Dans le triangle ABC, P est sur $[AB]$, Q est sur $[AC]$ et (PQ) est parallèle à (BC). D'après la propriété des longueurs proportionnelles, $\frac{AP}{AB} = \frac{PQ}{BC}$, soit :

$$\frac{0{,}6}{2{,}4} = \frac{PQ}{4}$$

Calcul. Le rapport connu se simplifie, et PQ est le quart de BC :

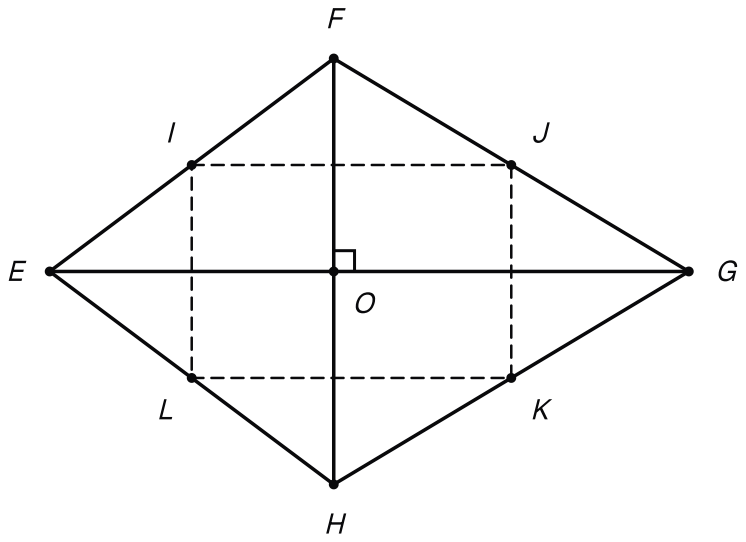
$$\frac{0{,}6}{2{,}4} = \frac{1}{4}$$
$$PQ = \frac{4}{4} = 1 \text{ m}$$

Conclusion. On a $AP = 0{,}6$ m, et l'égalité des rapports redonne $PQ = 1$ m, le résultat de la question 2.

Exercice 2

Le fil du cerf-volant

Yasmine fabrique un cerf-volant $EFGH$. Ses deux baguettes sont les diagonales : $EG = 90$ cm et $FH = 60$ cm. Elles sont perpendiculaires et se coupent en O, avec $EO = 40$ cm et $OF = OH = 30$ cm. Elle tend un fil qui joint les milieux I, J, K et L des côtés $[EF]$, $[FG]$, $[GH]$ et $[HE]$. Pour ta figure, prends 1 cm pour 10 cm.



Le cerf-volant EFGH : les baguettes [EG] et [FH], perpendiculaires en O, et le fil IJKL qui relie les milieux des côtés.

1.

Dans le triangle EFG, justifie que (IJ) est parallèle à (EG), et calcule IJ.

INDICE

Outil : repère les deux côtés du triangle EFG qui portent I et J.

CORRIGÉ

Les milieux. Dans le triangle EFG, le point I est le milieu de $[EF]$ et le point J est le milieu de $[FG]$.

Parallélisme. D'après la propriété de la droite des milieux, (IJ) est parallèle au troisième côté, $[EG]$.

Longueur. La même propriété donne la moitié de la baguette $[EG]$:

$$IJ = \frac{EG}{2} = \frac{90}{2} = 45 \text{ cm}$$

Conclusion. La droite (IJ) est parallèle à (EG), et $IJ = 45$ cm.

2.

Fais de même dans le triangle EHG pour le segment $[LK]$.

INDICE

Début : dans le triangle EHG, L est sur $[HE]$ et K est sur $[GH]$.

CORRIGÉ

Les milieux. Dans le triangle EHG, le point L est le milieu de $[HE]$ et le point K est le milieu de $[GH]$.

Parallélisme. D'après la propriété de la droite des milieux, (LK) est parallèle au troisième côté, $[EG]$.

Longueur. Comme à la question 1, on prend la moitié de EG :

$$LK = \frac{EG}{2} = 45 \text{ cm}$$

Conclusion. La droite (LK) est parallèle à (EG), et $LK = 45$ cm.

3.

Utilise maintenant l'autre baguette $[FH]$: dans les triangles GFH et EFH, étudie les segments $[JK]$ et $[IL]$.

INDICE

Début : dans le triangle GFH, J est sur $[GF]$ et K est sur $[GH]$; dans le triangle EFH, I est sur $[EF]$ et L est sur $[EH]$.

CORRIGÉ

Le segment $[JK]$. Dans le triangle GFH, le point J est le milieu de $[GF]$ et le point K est le milieu de $[GH]$. D'après la propriété de la droite des milieux, (JK) est parallèle à (FH) et $JK = \frac{FH}{2} = \frac{60}{2} = 30$ cm.

Le segment $[IL]$. Dans le triangle EFH, le point I est le milieu de $[EF]$ et le point L est le milieu de $[EH]$. La même propriété donne : (IL) est parallèle à (FH) et $IL = \frac{FH}{2} = 30$ cm.

Conclusion. Les segments $[JK]$ et $[IL]$ sont tous les deux portés par des parallèles à (FH), et ils mesurent chacun 30 cm.

4.

Déduis-en que $IJKL$ est un parallélogramme. Quelle longueur de fil faut-il pour en faire le tour ?

INDICE

Outil : compare les côtés opposés de $IJKL$ deux par deux, puis pense à la définition du parallélogramme.

CORRIGÉ

Première paire de côtés. Les droites (IJ) et (LK) sont parallèles à la même droite (EG). Rappel de 1re année : elles sont alors parallèles entre elles. Donc $(IJ) \parallel (LK)$.

Seconde paire de côtés. De même, (IL) et (JK) sont parallèles à (FH), donc $(IL) \parallel (JK)$.

Nature de $IJKL$. Les côtés opposés de $IJKL$ sont parallèles deux à deux : par définition, $IJKL$ est un parallélogramme.

Longueur du fil. On ajoute les quatre côtés trouvés aux questions 1 à 3 :

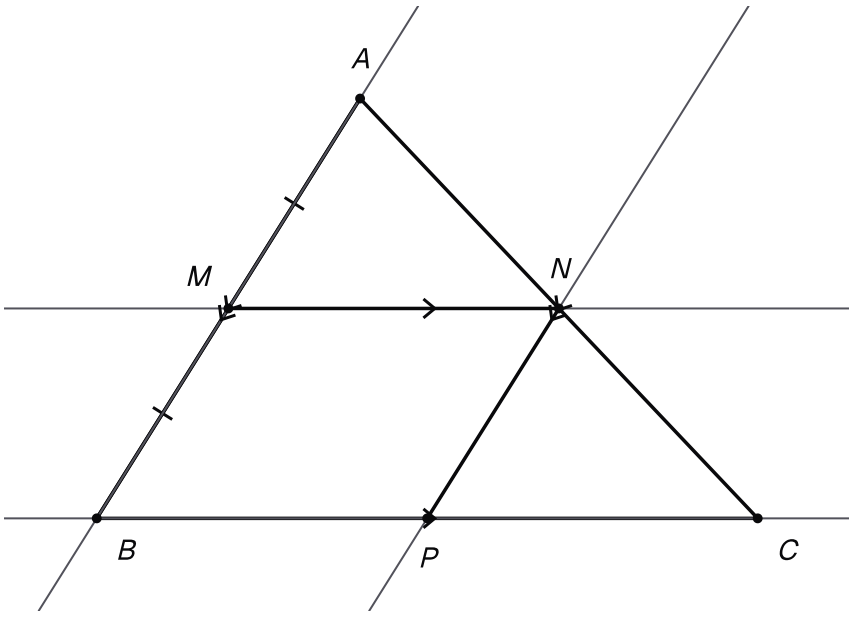
$$\begin{aligned} & IJ + JK + KL + LI \\ &= 45 + 30 + 45 + 30 \\ &= 150 \text{ cm} \end{aligned}$$

Conclusion. Le quadrilatère $IJKL$ est un parallélogramme, et il faut 150 cm de fil pour en faire le tour.

Exercice 3

Deux parallèles, deux milieux

Trace un triangle ABC tel que $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm et $AC = 7$ cm. Place M, milieu de $[AB]$. La parallèle à (BC) passant par M coupe $[AC]$ en N. La parallèle à (AB) passant par N coupe $[BC]$ en P.



Le triangle ABC de côtés 6 cm, 8 cm et 7 cm, le milieu M de [AB] et deux parallèles successives qui donnent N sur [AC] puis P sur [BC].

1.

Démontre que N est le milieu de $[AC]$.

INDICE

Outil : tu connais un milieu d'un côté et une parallèle à un deuxième côté.

CORRIGÉ

Dans le triangle ABC, le point M est le milieu du côté $[AB]$.

La droite (MN) passe par M, et elle est parallèle à (BC) par construction.

D'après la propriété de la parallèle par un milieu, (MN) coupe le côté $[AC]$ en son milieu. Donc N est le milieu de $[AC]$.

Conclusion. Le point N est le milieu du segment $[AC]$.

2.

Démontre que P est le milieu de $[BC]$.

INDICE

Outil : utilise la même propriété dans le même triangle, mais le milieu connu est maintenant N, sur le côté $[AC]$.

CORRIGÉ

On reste dans le triangle ABC. D'après la question 1, le point N est le milieu du côté $[AC]$.

La droite (NP) passe par N, et elle est parallèle à (AB) par construction.

D'après la propriété de la parallèle par un milieu, (NP) coupe le troisième côté, $[BC]$, en son milieu. Donc P est le milieu de $[BC]$.

Conclusion. Le point P est le milieu du segment $[BC]$.

3.

Déduis-en la nature du quadrilatère $MNPB$, puis calcule son périmètre.

INDICE

Début : regarde les côtés opposés de $MNPB$ deux par deux : sont-ils parallèles ? Pour les longueurs, pense aux milieux que tu viens de trouver.

CORRIGÉ

Nature de $MNPB$. La droite (MN) est parallèle à (BC), qui porte le côté $[PB]$. La droite (NP) est parallèle à (AB), qui porte le côté $[BM]$. Les côtés opposés de $MNPB$ sont donc parallèles deux à deux : par définition, $MNPB$ est un parallélogramme.

Deux côtés. Le point P est le milieu de $[BC]$, donc $PB = 4$ cm. Le point M est le milieu de $[AB]$, donc $BM = 3$ cm.

Les deux autres côtés. Les côtés opposés d'un parallélogramme ont la même longueur, donc $MN = 4$ cm et $NP = 3$ cm.

Le périmètre. Il vaut deux fois la somme de deux côtés consécutifs :

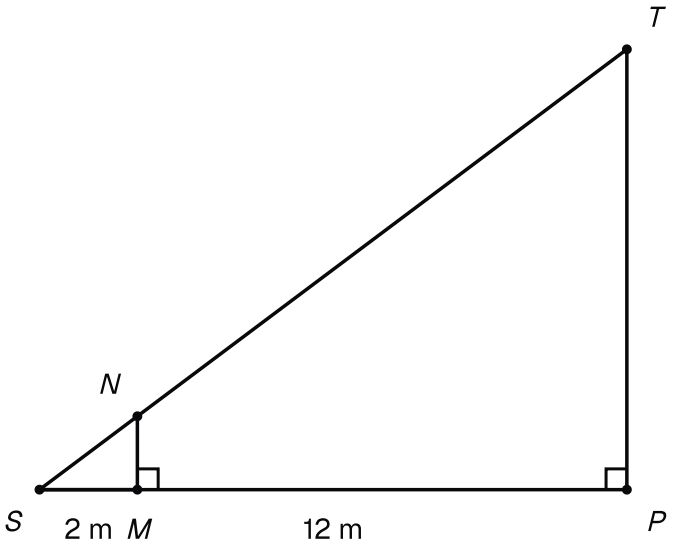
$$2 \times (4 + 3) = 14 \text{ cm}$$

Conclusion. Le quadrilatère $MNPB$ est un parallélogramme, et son périmètre est 14 cm.

Exercice 4

L'ombre de l'arbre

Pour mesurer un arbre $[PT]$, Karim plante un bâton $[MN]$ de $1{,}5$ m. Les ombres de l'arbre et du bâton se terminent au même point S du sol. Ainsi, M est sur $[SP]$ et N est sur $[ST]$, avec $SM = 2$ m, $SN = 2{,}5$ m et $SP = 12$ m. Le bâton et l'arbre sont verticaux : ils sont perpendiculaires au sol (SP). Rappel de 1re année : deux droites perpendiculaires à (SP) sont parallèles entre elles. Donc (MN) est parallèle à (PT). Pour ta figure, prends 1 cm pour 1 m ; le triangle SPT a un angle droit en P.



L'arbre [PT] et le bâton [MN] : leurs ombres finissent en S, avec SM = 2 m, SN = 2,5 m, MN = 1,5 m et SP = 12 m.

1.

Écris l'égalité des rapports dans le triangle SPT.

INDICE

Outil : vérifie les trois hypothèses : M sur $[SP]$, N sur $[ST]$, et (MN) parallèle à (PT).

CORRIGÉ

On vérifie les conditions de la propriété des longueurs proportionnelles dans le triangle SPT :

- le point M est sur le côté $[SP]$;
- le point N est sur le côté $[ST]$;
- le bâton (MN) est parallèle à l'arbre (PT), comme l'explique l'énoncé.

La propriété s'applique donc :

$$\frac{SM}{SP} = \frac{SN}{ST} = \frac{MN}{PT}$$

Conclusion. Dans le triangle SPT, les rapports $\frac{SM}{SP}$, $\frac{SN}{ST}$ et $\frac{MN}{PT}$ sont égaux.

2.

Calcule la hauteur PT de l'arbre.

INDICE

Début : garde le rapport $\frac{SM}{SP}$, que tu connais, et celui qui contient PT.

CORRIGÉ

Remplacement. On garde le premier rapport, qui est connu, et le troisième, qui contient PT :

$$\frac{2}{12} = \frac{1{,}5}{PT}$$

Produits en croix. Les produits en croix sont égaux, puis on divise par 2 :

$$2 \times PT = 12 \times 1{,}5 = 18$$
$$PT = \frac{18}{2} = 9 \text{ m}$$

Conclusion. L'arbre mesure 9 m de haut.

3.

Calcule la longueur ST, du point S jusqu'au sommet de l'arbre.

INDICE

Début : cette fois, le rapport qui contient l'inconnue est $\frac{SN}{ST}$.

CORRIGÉ

Remplacement. Cette fois, on garde le premier rapport et le deuxième, qui contient ST :

$$\frac{2}{12} = \frac{2{,}5}{ST}$$

Produits en croix. Les produits en croix sont égaux, puis on divise par 2 :

$$2 \times ST = 12 \times 2{,}5 = 30$$
$$ST = \frac{30}{2} = 15 \text{ m}$$

Conclusion. Du point S au sommet de l'arbre, la longueur est $ST = 15$ m.

4.

Karim affirme : « L'arbre est six fois plus haut que le bâton. » A-t-il raison ?

INDICE

Outil : divise la hauteur de l'arbre par celle du bâton.

CORRIGÉ

On divise la hauteur de l'arbre par celle du bâton :

$$\frac{PT}{MN} = \frac{9}{1{,}5} = 6$$

L'arbre est donc six fois plus haut que le bâton. Le rapport connu le laissait prévoir : $\frac{SM}{SP} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$, et ce rapport est aussi celui du bâton à l'arbre.

Conclusion. Oui, Karim a raison : l'arbre est six fois plus haut que le bâton.

Exercice 5

Une bande de papier en quatre, puis en cinq

Nora a deux bandes de papier de 13 cm. Elle veut partager la première en quatre parts égales, et la seconde en cinq parts égales. Sur ton cahier, chaque bande est un segment $[AB]$ de 13 cm.

1.

Partage la première bande en quatre avec des milieux seulement. Donne la longueur de chaque part.

INDICE

Début : place d'abord le milieu I de $[AB]$, puis les milieux des segments $[AI]$ et $[IB]$.

CORRIGÉ

Premier partage. On place I, milieu de $[AB]$: $AI = IB = \dfrac{13}{2} = 6{,}5$ cm.

Second partage. On place J, milieu de $[AI]$, et K, milieu de $[IB]$. Chaque moitié est coupée en deux : $AJ = JI = IK = KB = \dfrac{6{,}5}{2} = 3{,}25$ cm.

Conclusion. Les points J, I et K partagent la première bande en quatre parts de $3{,}25$ cm chacune.

2.

Pour la seconde bande, calcule la longueur d'une part. Construis ensuite les points de partage avec la méthode de partage, en reportant cinq fois 2 cm au compas.

INDICE

Début : sur une demi-droite d'origine A, tu obtiens A_1, ..., A_5 ; la droite (A_5B) donne la direction des parallèles.

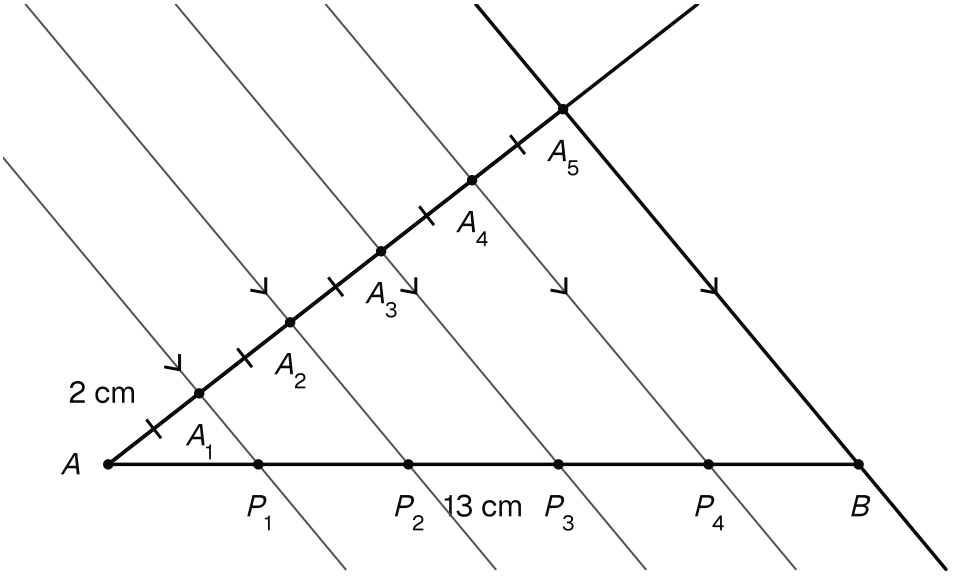
CORRIGÉ

Longueur d'une part. On partage 13 cm en cinq : chaque part mesure $\frac{13}{5} = 2{,}6$ cm.

Construction. On applique la méthode de partage :

1. On trace une demi-droite d'origine A qui ne contient pas B.
2. Au compas, on y reporte cinq fois 2 cm : on obtient A_1, A_2, A_3, A_4 et A_5, avec $AA_5 = 10$ cm.
3. On trace la droite (A_5B).
4. Par A_1, A_2, A_3 et A_4, on trace les parallèles à (A_5B). Elles coupent $[AB]$ en P_1, P_2, P_3 et P_4.

Conclusion. Une part mesure $2{,}6$ cm, et les points P_1, P_2, P_3 et P_4 partagent la seconde bande en cinq parts égales.



La seconde bande de Nora : cinq reports de 2 cm sur une demi-droite issue de A, la droite (A5B) et quatre parallèles qui placent P1 à P4.

3.

Justifie que $AP_2 = 5{,}2$ cm.

INDICE

Outil : dans le triangle AA_5B, la droite (A_2P_2) est parallèle à (A_5B).

CORRIGÉ

Le triangle de travail. Dans le triangle AA_5B, le point A_2 est sur le côté $[AA_5]$, le point P_2 est sur le côté $[AB]$, et (A_2P_2) est parallèle à (A_5B).

Les rapports. D'après la propriété des longueurs proportionnelles, avec $AA_2 = 4$ cm et $AA_5 = 10$ cm :

$$\frac{AP_2}{AB} = \frac{AA_2}{AA_5} = \frac{4}{10}$$

La longueur. On multiplie par $AB = 13$ cm :

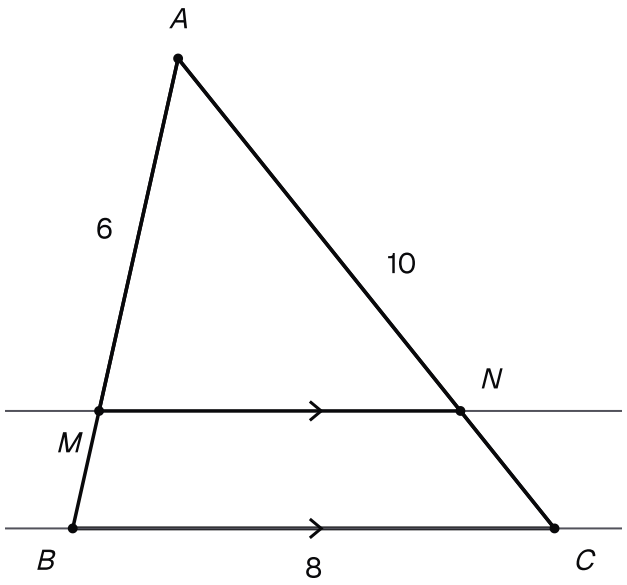
$$AP_2 = \frac{4 \times 13}{10} = 5{,}2 \text{ cm}$$

Conclusion. On a bien $AP_2 = 5{,}2$ cm, c'est-à-dire deux parts de $2{,}6$ cm.

Exercice 6

La voile du bateau

La voile d'un petit bateau est un triangle ABC avec $AB = 8$ dm, $AC = 10$ dm et $BC = 8$ dm. Une couture $[MN]$ est parallèle au bord $[BC]$: M est sur $[AB]$ avec $AM = 6$ dm, et N est sur $[AC]$. Pour ta figure, prends 1 cm pour 1 dm.



La voile ABC en décimètres : AB = 8, AC = 10, BC = 8, et la couture [MN] parallèle à [BC] avec AM = 6.

1.

Calcule AN et MN.

INDICE

Point délicat : écris le rapport connu $\frac{AM}{AB}$ et simplifie-le : il sert pour les deux calculs.

CORRIGÉ

Les conditions. Dans le triangle ABC, le point M est sur $[AB]$, le point N est sur $[AC]$, et la couture (MN) est parallèle à (BC).

Les rapports. D'après la propriété des longueurs proportionnelles :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Le rapport connu se simplifie :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Les deux longueurs. Les longueurs AN et MN valent les trois quarts de AC et de BC :

$$AN = \frac{3 \times 10}{4} = 7{,}5 \text{ dm}$$
$$MN = \frac{3 \times 8}{4} = 6 \text{ dm}$$

Conclusion. On a $AN = 7{,}5$ dm et $MN = 6$ dm.

2.

Calcule MB et NC.

INDICE

Outil : M est sur le segment $[AB]$, donc $AM + MB = AB$.

CORRIGÉ

Calcul de MB. Le point M est sur le segment $[AB]$, donc $AM + MB = AB$:

$$\begin{aligned} MB &= AB - AM \\ &= 8 - 6 = 2 \text{ dm} \end{aligned}$$

Calcul de NC. De même, le point N est sur $[AC]$:

$$\begin{aligned} NC &= AC - AN \\ &= 10 - 7{,}5 = 2{,}5 \text{ dm} \end{aligned}$$

Conclusion. On a $MB = 2$ dm et $NC = 2{,}5$ dm.

3.

Le bas de la voile, le quadrilatère $MBCN$, est bordé d'un ruban cousu tout autour. Quelle longueur de ruban faut-il ?

INDICE

Début : le tour de $MBCN$ est formé des segments $[MB]$, $[BC]$, $[CN]$ et $[NM]$.

CORRIGÉ

Le ruban fait le tour du quadrilatère $MBCN$. Sa longueur est le périmètre de $MBCN$, avec les longueurs des questions 1 et 2 :

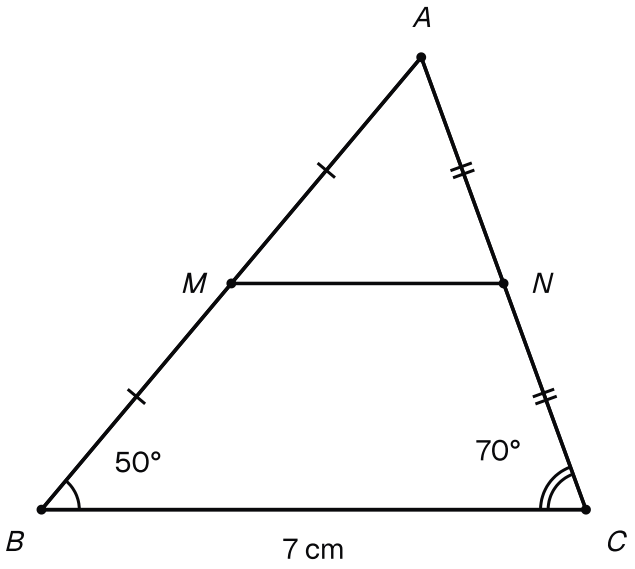
$$\begin{aligned} &MB + BC + CN + NM \\ &= 2 + 8 + 2{,}5 + 6 \\ &= 18{,}5 \text{ dm} \end{aligned}$$

Conclusion. Il faut $18{,}5$ dm de ruban.

Exercice 7

Les angles du petit triangle

Trace un segment $[BC]$ de 7 cm. Construis le point A tel que $\widehat{ABC} = 50°$ et $\widehat{ACB} = 70°$. Place M, milieu de $[AB]$, et N, milieu de $[AC]$.



Le triangle ABC construit sur [BC] de 7 cm avec des angles de 50 degrés en B et de 70 degrés en C, et les milieux M et N.

1.

Justifie que (MN) est parallèle à (BC), puis calcule MN.

INDICE

Outil : M et N sont des milieux de deux côtés du triangle ABC.

CORRIGÉ

Les milieux. Dans le triangle ABC, le point M est le milieu de $[AB]$ et le point N est le milieu de $[AC]$.

Parallélisme. D'après la propriété de la droite des milieux, (MN) est parallèle au troisième côté, $[BC]$.

Longueur. La même propriété donne la moitié de BC :

$$MN = \frac{BC}{2} = \frac{7}{2} = 3{,}5 \text{ cm}$$

Conclusion. La droite (MN) est parallèle à (BC), et $MN = 3{,}5$ cm.

2.

Déduis-en les mesures des angles $\widehat{AMN}$ et $\widehat{ANM}$.

INDICE

Outil : les parallèles (MN) et (BC) sont coupées par la sécante (AB), puis par la sécante (AC). Cherche des angles correspondants.

CORRIGÉ

Les parallèles. D'après la question 1, les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Avec la sécante (AB). Les angles $\widehat{AMN}$ et $\widehat{ABC}$ sont correspondants.

Avec la sécante (AC). Les angles $\widehat{ANM}$ et $\widehat{ACB}$ sont correspondants.

Les mesures. Rappel de 1re année : deux angles correspondants formés par deux parallèles et une sécante ont la même mesure. Donc $\widehat{AMN} = 50^\circ$ et $\widehat{ANM} = 70^\circ$.

Conclusion. L'angle $\widehat{AMN}$ mesure 50° et l'angle $\widehat{ANM}$ mesure 70°.

3.

Calcule la mesure de l'angle $\widehat{MAN}$ de deux façons.

INDICE

Début : la somme des mesures des angles d'un triangle vaut 180°. Utilise-la dans le triangle ABC, puis dans le triangle AMN.

CORRIGÉ

Première façon, dans le triangle ABC. La somme des angles d'un triangle vaut 180° :

$$\begin{aligned}\widehat{BAC} &= 180^\circ - 50^\circ - 70^\circ \\ &= 60^\circ\end{aligned}$$

Le point M est sur $[AB]$ et le point N est sur $[AC]$: l'angle $\widehat{MAN}$ est le même angle que $\widehat{BAC}$. Il mesure donc 60°.

Seconde façon, dans le triangle AMN. On utilise les angles trouvés à la question 2 :

$$\begin{aligned}\widehat{MAN} &= 180^\circ - 50^\circ - 70^\circ \\ &= 60^\circ\end{aligned}$$

Conclusion. Les deux façons donnent le même résultat : l'angle $\widehat{MAN}$ mesure 60°.