BURHAN

Triangle : milieux et parallèles : exercices, application

2ème Année Collège · Mathématiques

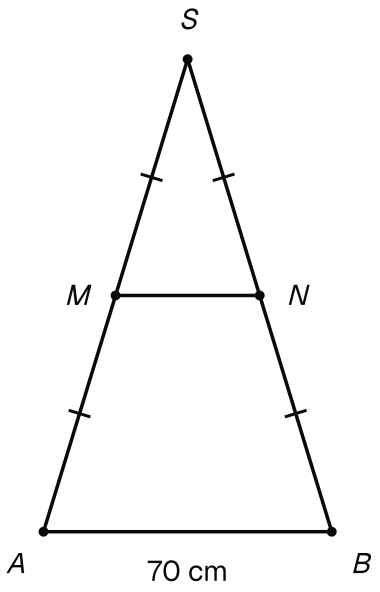
Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/milieux-et-paralleles-dans-un-triangle/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Triangle : milieux et parallèles	Application	8

Exercice 1

La barre de l'escabeau

Vu de côté, un escabeau ouvert forme un triangle SAB : S est le haut, A et B sont les pieds posés au sol. On a $SA = SB = 120$ cm et $AB = 70$ cm. Une barre de sécurité $[MN]$ est fixée au milieu M de $[SA]$ et au milieu N de $[SB]$. Pour ta figure, divise toutes les longueurs par 10.



L'escabeau vu de côté : le triangle SAB, avec SA = SB = 120 cm et AB = 70 cm, et la barre [MN] fixée aux milieux des montants.

1.

Justifie que la barre est parallèle au sol, c'est-à-dire que (MN) est parallèle à (AB).

INDICE

Outil : regarde ce que sont M et N pour le triangle SAB, puis cherche la propriété qui part de deux milieux.

CORRIGÉ

On sait que, dans le triangle SAB, le point M est le milieu du côté $[SA]$ et le point N est le milieu du côté $[SB]$.

Or, d'après la propriété de la droite des milieux, (MN) est alors parallèle au troisième côté, $[AB]$.

Donc (MN) est parallèle à (AB).

Conclusion. La barre $[MN]$ est parallèle au sol (AB).

2.

Calcule la longueur de la barre.

INDICE

Outil : la même propriété donne aussi une longueur. Compare MN à la longueur AB.

CORRIGÉ

Les points M et N sont les milieux des côtés $[SA]$ et $[SB]$ du triangle SAB.

D'après la propriété de la droite des milieux, la barre $[MN]$ mesure la moitié du côté $[AB]$:

$$MN = \frac{AB}{2} = \frac{70}{2} = 35 \text{ cm}$$

Conclusion. La barre de sécurité mesure 35 cm.

Exercice 2

Retrouver le troisième côté

Dans un triangle KLR, on donne $KL = 7$ cm et $KR = 8$ cm. Le point P est le milieu de $[KL]$, le point Q est le milieu de $[KR]$, et $PQ = 4{,}6$ cm.

1.

Calcule la longueur LR.

INDICE

Outil : la propriété de la droite des milieux relie PQ à l'un des côtés du triangle KLR. Lequel ?

CORRIGÉ

Les milieux. Dans le triangle KLR, le point P est le milieu de $[KL]$ et le point Q est le milieu de $[KR]$.

La propriété. D'après la propriété de la droite des milieux, $[PQ]$ mesure la moitié du troisième côté, $[LR]$:

$$PQ = \frac{LR}{2}$$

Le calcul. La longueur LR est donc le double de PQ :

$$\begin{aligned} LR &= 2 \times PQ \\ &= 2 \times 4{,}6 \\ &= 9{,}2 \text{ cm} \end{aligned}$$

Conclusion. Le côté $[LR]$ mesure $9{,}2$ cm.

2.

Trace le triangle KLR en vraie grandeur, place P et Q, puis mesure PQ pour contrôler.

INDICE

Début : trace d'abord $[KL]$, puis place R avec le compas : à 8 cm de K et à la distance trouvée de L.

CORRIGÉ

Le triangle. On trace $[KL]$ de 7 cm. Au compas, on trace un arc de centre K et de rayon 8 cm, puis un arc de centre L et de rayon $9{,}2$ cm, la longueur trouvée à la question 1. Les deux arcs se coupent en R.

Les milieux. On place P sur $[KL]$ avec $KP = 3{,}5$ cm, puis Q sur $[KR]$ avec $KQ = 4$ cm.

Le contrôle. On mesure le segment $[PQ]$ à la règle : on lit $PQ = 4{,}6$ cm, à la précision du tracé près.

Conclusion. La mesure lue sur la figure est bien la longueur donnée, ce qui confirme le calcul de LR.

3.

Calcule le périmètre du triangle KPQ.

INDICE

Début : calcule d'abord KP et KQ : ce sont des moitiés de côtés.

CORRIGÉ

Calcul de KP. Le point P est le milieu de $[KL]$, donc $KP = \dfrac{7}{2} = 3{,}5$ cm.

Calcul de KQ. Le point Q est le milieu de $[KR]$, donc $KQ = \dfrac{8}{2} = 4$ cm.

Le périmètre. On ajoute les longueurs des trois côtés du triangle KPQ :

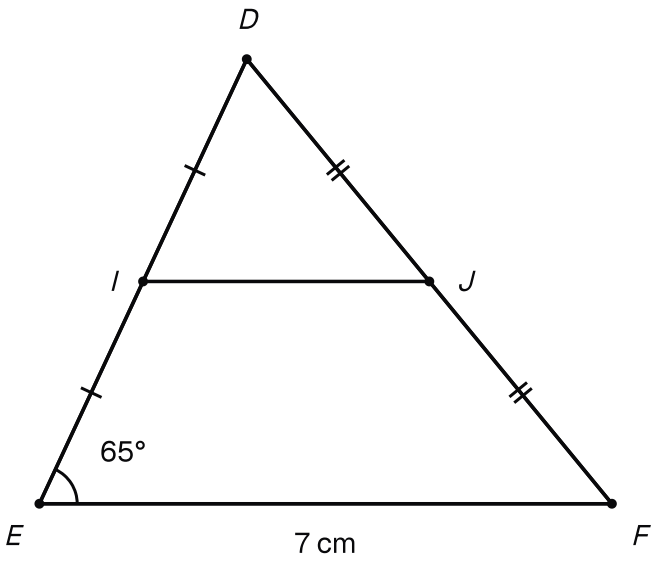
$$\begin{aligned} & KP + KQ + PQ \\ & = 3{,}5 + 4 + 4{,}6 \\ & = 12{,}1 \text{ cm} \end{aligned}$$

Conclusion. Le périmètre du triangle KPQ est $12{,}1$ cm.

Exercice 3

Un angle reporté par la droite des milieux

Trace un segment $[EF]$ de 7 cm. Place le point D tel que $ED = 6$ cm et $\widehat{DEF} = 65°$. Place I, milieu de $[DE]$, et J, milieu de $[DF]$.



Les données de l'exercice : [EF] de 7 cm, ED = 6 cm, un angle de 65 degrés en E, et les milieux I de [DE] et J de [DF].

1.

Justifie que (IJ) est parallèle à (EF).

INDICE

Outil : cherche deux milieux sur deux côtés du triangle DEF.

CORRIGÉ

Dans le triangle DEF, le point I est le milieu du côté $[DE]$ et le point J est le milieu du côté $[DF]$.

D'après la propriété de la droite des milieux, (IJ) est donc parallèle au troisième côté, $[EF]$.

Conclusion. Les droites (IJ) et (EF) sont parallèles.

2.

Déduis-en la mesure de l'angle $\widehat{DIJ}$.

INDICE

Point délicat : la droite (DE) coupe les deux parallèles (IJ) et (EF). Repère la position des angles $\widehat{DIJ}$ et $\widehat{DEF}$.

CORRIGÉ

Les parallèles. D'après la question 1, les droites (IJ) et (EF) sont parallèles. La droite (DE) les coupe toutes les deux : en I et en E.

Les angles. Les angles $\widehat{DIJ}$ et $\widehat{DEF}$ ont la même position : ils sont du même côté de la sécante (DE), et tous les deux du côté de D. Ce sont des angles correspondants.

La mesure. Rappel de 1re année : deux angles correspondants formés par deux parallèles et une sécante ont la même mesure. On en déduit :

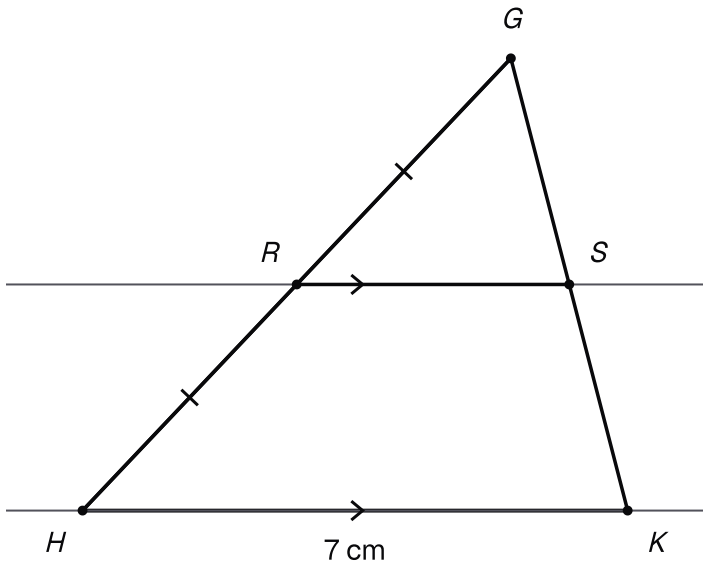
$$\widehat{DIJ} = \widehat{DEF} = 65^\circ$$

Conclusion. L'angle $\widehat{DIJ}$ mesure 65°.

Exercice 4

Le panneau triangulaire

Un panneau a la forme d'un triangle GHK. Sur la figure réduite, $GH = 8$ cm, $GK = 6$ cm et $HK = 7$ cm. Le peintre marque R, milieu de $[GH]$. Il trace ensuite par R la parallèle à (HK) : elle coupe $[GK]$ en S. Trace la figure ; pour la parallèle, fais glisser ton équerre le long de ta règle.



Le panneau GHK réduit : GH = 8 cm, GK = 6 cm, HK = 7 cm, le milieu R de [GH] et la parallèle à (HK) menée par R, qui coupe [GK] en S.

1.

Démontre que S est le milieu de $[GK]$.

INDICE

Outil : les données sont un milieu de côté et une droite parallèle à un autre côté. Choisis la propriété qui part de là.

CORRIGÉ

Dans le triangle GHK, le point R est le milieu du côté $[GH]$.

La droite (RS) passe par R, et le peintre l'a tracée parallèle à (HK).

D'après la propriété de la parallèle par un milieu, (RS) coupe le côté $[GK]$ en son milieu. Donc S est le milieu de $[GK]$.

Conclusion. Le point S est le milieu du côté $[GK]$ du panneau.

2.

Calcule GS.

INDICE

Début : souviens-toi de ce que fait le milieu d'un segment.

CORRIGÉ

D'après la question 1, le point S est le milieu de $[GK]$. Il partage ce côté en deux segments de même longueur : GS est la moitié de GK.

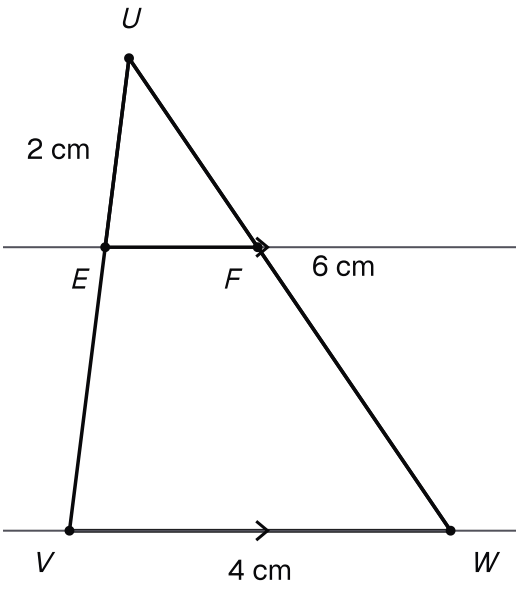
$$GS = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm}$$

Conclusion. On a $GS = 3$ cm.

Exercice 5

Écrire les bons rapports

Trace un triangle UVW tel que $UV = 5$ cm, $UW = 6$ cm et $VW = 4$ cm. Place E sur $[UV]$ tel que $UE = 2$ cm. Trace par E la parallèle à (VW) : elle coupe $[UW]$ en F.



Le triangle UVW avec UV = 5 cm, UW = 6 cm et VW = 4 cm, le point E à 2 cm de U et la parallèle à (VW) qui donne F.

1.

Écris l'égalité des trois rapports de longueurs.

INDICE

Outil : vérifie les hypothèses de la propriété des longueurs proportionnelles. Mets en haut les côtés du triangle UEF.

CORRIGÉ

On vérifie les conditions de la propriété des longueurs proportionnelles dans le triangle UVW :

- le point E est sur le côté $[UV]$;
- le point F est sur le côté $[UW]$;
- la droite (EF) est parallèle à (VW).

Les trois conditions sont remplies. La propriété donne donc :

$$\frac{UE}{UV} = \frac{UF}{UW} = \frac{EF}{VW}$$

Conclusion. Les trois rapports $\frac{UE}{UV}$, $\frac{UF}{UW}$ et $\frac{EF}{VW}$ sont égaux.

2.

Calcule UF.

INDICE

Début : remplace les longueurs connues dans les deux premiers rapports.

CORRIGÉ

Remplacement. Dans les deux premiers rapports de la question 1, on remplace UE, UV et UW par leurs valeurs :

$$\frac{2}{5} = \frac{UF}{6}$$

Produits en croix. Les produits en croix sont égaux, puis on divise par 5 :

$$5 \times UF = 2 \times 6 = 12$$
$$UF = \frac{12}{5} = 2{,}4 \text{ cm}$$

Conclusion. La longueur UF est égale à $2{,}4$ cm.

3.

Calcule EF.

INDICE

Début : garde le rapport connu et le rapport qui contient EF.

CORRIGÉ

Remplacement. On garde le premier rapport, dont on connaît les deux longueurs, et le troisième, qui contient EF :

$$\frac{2}{5} = \frac{EF}{4}$$

Produits en croix. Les produits en croix sont égaux, puis on divise par 5 :

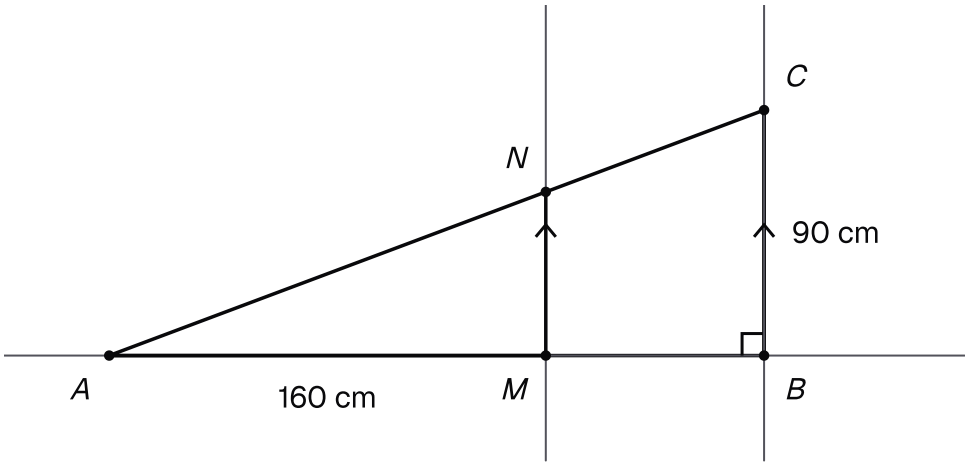
$$5 \times EF = 2 \times 4 = 8$$
$$EF = \frac{8}{5} = 1{,}6 \text{ cm}$$

Conclusion. La longueur EF est égale à $1{,}6$ cm.

Exercice 6

Le support du toboggan

Vu de côté, un toboggan forme un triangle ABC : $[AB]$ est au sol, $[BC]$ est l'échelle, perpendiculaire au sol, et $[AC]$ est la glissière. On a $AB = 240$ cm et $BC = 90$ cm. Un support $[MN]$ relie le point M de $[AB]$, avec $AM = 160$ cm, au point N de la glissière. Le support est parallèle à l'échelle. Pour ta figure, prends 1 cm pour 20 cm.



Le toboggan vu de côté : le sol [AB] de 240 cm, l'échelle [BC] de 90 cm, et le support [MN] parallèle à l'échelle, avec AM = 160 cm.

1.

Écris l'égalité des rapports dans le triangle ABC.

INDICE

Outil : repère sur quels côtés du triangle ABC se trouvent M et N, et à quel côté (MN) est parallèle.

CORRIGÉ

Dans le triangle ABC, on vérifie les conditions de la propriété des longueurs proportionnelles :

- le point M est sur le côté $[AB]$;
- le point N est sur le côté $[AC]$, la glissière ;
- le support (MN) est parallèle à l'échelle (BC).

La propriété s'applique donc :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Conclusion. Dans le triangle ABC, les rapports $\frac{AM}{AB}$, $\frac{AN}{AC}$ et $\frac{MN}{BC}$ sont égaux.

2.

Calcule la hauteur MN du support.

INDICE

Point délicat : le rapport connu est $\frac{AM}{AB}$; simplifie-le avant de calculer.

CORRIGÉ

Remplacement. On garde le premier rapport de la question 1, qui est connu, et le troisième, qui contient MN :

$$\frac{160}{240} = \frac{MN}{90}$$

Simplification. On divise 160 et 240 par 80 :

$$\frac{160}{240} = \frac{2}{3}$$

On a donc $\frac{2}{3} = \frac{MN}{90}$.

Produits en croix. Les produits en croix sont égaux, puis on divise par 3 :

$$3 \times MN = 2 \times 90 = 180$$
$$MN = \frac{180}{3} = 60 \text{ cm}$$

Conclusion. Le support $[MN]$ mesure 60 cm de haut.

Exercice 7

Partager une baguette en trois

Amine veut couper une baguette de bois en trois morceaux de même longueur. Sur son cahier, il représente la baguette par un segment $[AB]$ de 10 cm.

1.

Calcule la longueur d'un morceau. Pourquoi la règle graduée ne suffit-elle pas pour placer les points de coupe ?

INDICE

Début : divise 10 par 3 et regarde si le résultat tombe juste en millimètres.

CORRIGÉ

Longueur d'un morceau. On partage 10 cm en trois parts égales : un morceau mesure $\frac{10}{3}$ cm.

Écriture décimale. On effectue la division :

$$10 \div 3 = 3{,}333\ldots$$

Le chiffre 3 revient sans fin : la division ne s'arrête jamais.

La règle. Une règle n'a que des graduations en centimètres et en millimètres. Aucune ne tombe exactement sur $\frac{10}{3}$ cm.

Conclusion. Un morceau mesure $\frac{10}{3}$ cm. Ce nombre n'a pas d'écriture décimale qui s'arrête, donc la règle graduée ne permet pas de placer exactement les points de coupe.

2.

Construis les deux points de coupe P et Q avec la méthode de partage, en reportant trois fois 3 cm au compas.

INDICE

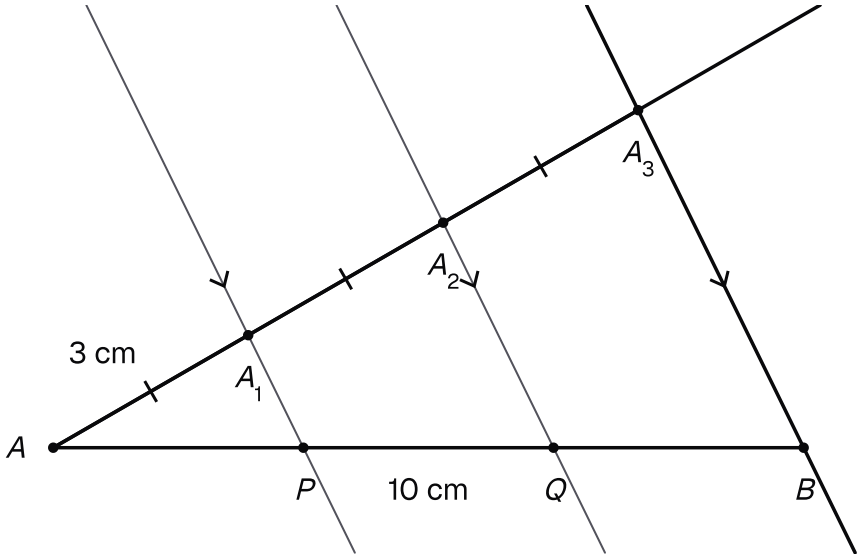
Début : trace une demi-droite d'origine A qui ne contient pas B, et place sur elle A_1, A_2, A_3 avec $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = 3$ cm.

CORRIGÉ

On applique la méthode de partage en quatre gestes :

1. On trace une demi-droite d'origine A qui ne contient pas B.
2. Au compas, on reporte trois fois 3 cm à partir de A. On obtient A_1, A_2 et A_3, avec $AA_3 = 9$ cm.
3. On trace la droite (A_3B).
4. Avec l'équerre et la règle, on trace par A_1, puis par A_2, la parallèle à (A_3B). Ces deux droites coupent $[AB]$ en P et en Q.

Conclusion. Les points P et Q ainsi construits sont les deux points de coupe ; P est celui qui est le plus près de A.



La construction d'Amine : trois reports de 3 cm sur une demi-droite issue de A, la droite (A3B) et les parallèles qui placent P et Q.

3.

Justifie que $AP = \dfrac{10}{3}$ cm.

INDICE

Outil : regarde le triangle AA_3B : la droite (A_1P) est parallèle à l'un de ses côtés.

CORRIGÉ

Le triangle de travail. On se place dans le triangle AA_3B :

- le point A_1 est sur le côté $[AA_3]$;
- le point P est sur le côté $[AB]$;
- la droite (A_1P) est parallèle à (A_3B).

Les rapports. D'après la propriété des longueurs proportionnelles :

$$\begin{aligned}\frac{AP}{AB} &= \frac{AA_1}{AA_3} \\ &= \frac{3}{9} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

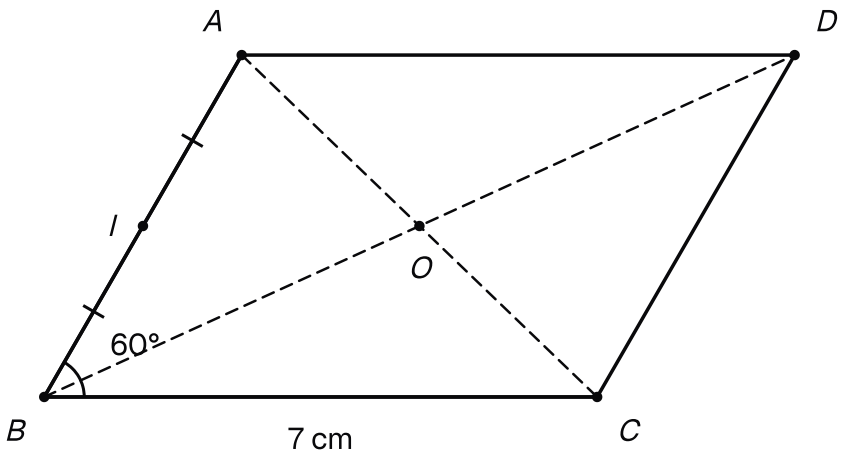
La longueur. Le segment $[AP]$ mesure donc le tiers de $[AB]$, soit $AP = \dfrac{10}{3}$ cm.

Conclusion. On a bien $AP = \dfrac{10}{3}$ cm : le point P est le premier point de coupe.

Exercice 8

Le centre d'un parallélogramme

Trace un parallélogramme $ABCD$ tel que $AB = 5$ cm, $BC = 7$ cm et $\widehat{ABC} = 60°$. Ses diagonales se coupent en O. Place I, milieu de $[AB]$.



Le parallélogramme ABCD avec AB = 5 cm, BC = 7 cm et un angle de 60 degrés en B, ses diagonales qui se coupent en O, et le milieu I de [AB].

1.

Explique pourquoi O est le milieu de $[AC]$.

INDICE

Outil : c'est une propriété des diagonales d'un parallélogramme, vue en 1re année.

CORRIGÉ

Rappel de 1re année : les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme. Ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en O : d'après ce rappel, O est le milieu de chacune d'elles.

Conclusion. Le point O est le milieu de $[AC]$.

2.

Démontre que (IO) est parallèle à (BC), puis calcule IO.

INDICE

Outil : choisis un triangle qui a $[AB]$ et $[AC]$ pour côtés.

CORRIGÉ

Les milieux. On travaille dans le triangle ABC. Le point I est le milieu du côté $[AB]$, et le point O est le milieu du côté $[AC]$ d'après la question 1.

Parallélisme. D'après la propriété de la droite des milieux, (IO) est parallèle au troisième côté, $[BC]$.

Longueur. La même propriété dit que $[IO]$ mesure la moitié de $[BC]$:

$$IO = \frac{BC}{2} = \frac{7}{2} = 3{,}5 \text{ cm}$$

Conclusion. La droite (IO) est parallèle à (BC), et $IO = 3{,}5$ cm.