BURHAN

# Triangle : milieux et parallèles

2ème Année Collège · Mathématiques

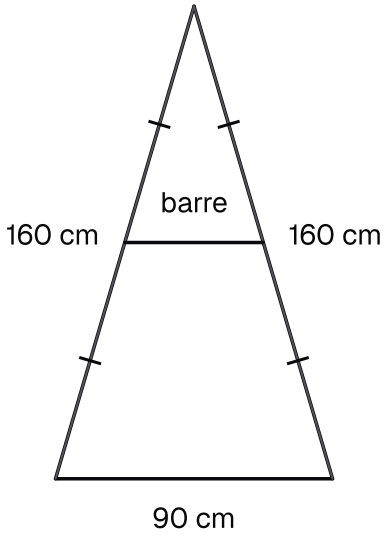
Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/milieux-et-paralleles-dans-un-triangle/cours

| Chapitre | Semestre |
| --- | --- |
| Triangle : milieux et parallèles | Semestre 1 |

## Une barre au milieu

Regarde un escabeau ouvert, posé sur le sol. Ses deux **montants**, les barres qui le tiennent debout, se rejoignent en haut. Une barre de sécurité relie le milieu d'un montant au milieu de l'autre.

Prends l'escabeau de Karim. Chaque montant mesure $160$ cm et, en bas, les deux pieds sont écartés de $90$ cm. Il faut couper la barre à la bonne longueur.




**L'escabeau de Karim vu de côté : deux montants de 160 cm, des pieds écartés de 90 cm et une barre entre les milieux des montants.**

**Devine : Avant de calculer**

Quelle longueur faut-il donner à la barre qui relie les milieux des deux montants ?

**A.** $80$ cm, la moitié d'un montant

**Faux.**

Faux. La barre ne suit pas un montant : elle va d'un montant à l'autre.

**B.** $45$ cm, la moitié de l'écart des pieds

**Juste.**

Oui. Tu vas découvrir pourquoi dans ce chapitre.

**C.** $90$ cm, autant que l'écart des pieds

**Faux.**

Faux. Plus on monte, plus les montants se rapprochent : la barre est plus courte que l'écart des pieds.

**D.** On ne peut pas le savoir sans mesurer

**Faux.**

Faux. Une propriété du triangle donne cette longueur sans rien mesurer.

**Correction**

Les deux montants et le sol forment un triangle. La barre relie les milieux de deux côtés de ce triangle.

Elle mesure donc la moitié du troisième côté, l'écart des pieds : $90 \div 2 = 45$. Elle est aussi parallèle au sol.

La barre mesure $45$ cm. Ce résultat s'appelle « la propriété de la droite des milieux » : tu vas le démontrer dans ce chapitre.

Dans ce chapitre, tu vas apprendre trois propriétés du triangle. Elles parlent de milieux, de droites parallèles et de longueurs.

Avec elles, tu calculeras des longueurs sans les mesurer. Tu sauras aussi partager un segment en morceaux de même longueur.

Garde près de toi ton cahier, une règle graduée, une équerre et un compas.

Chaque figure du cours est décrite avec ses mesures. Trace-la avant de lire la suite : une figure soignée aide à comprendre.

## Ce que tu sais déjà

Avant de commencer, relis ces outils de 1re année du collège : ils servent dans les preuves et les exercices de ce chapitre.

Inutile de tout retenir d'un coup. Tu les retrouveras plus loin, au moment où tu en auras besoin.

Rappel de 1AC : le **milieu** d'un segment $[AB]$ est le point $I$ du segment tel que $IA = IB$. Il coupe $[AB]$ en deux segments de même longueur :

$$AI = IB = \frac{AB}{2}.$$

Par exemple, si $AB = 7$ cm, alors $AI = 3{,}5$ cm.

Rappel de 1AC : un **parallélogramme** est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux. Dans un parallélogramme $EFGH$ :

- les côtés opposés ont la même longueur : $EF = HG$ et $FG = EH$ ;

- les diagonales $[EG]$ et $[FH]$ ont le même milieu.

Rappel de 1AC : deux propriétés permettent de reconnaître un parallélogramme.

- Si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu, alors c'est un parallélogramme.
- Si un quadrilatère n'est pas croisé et si deux de ses côtés opposés sont parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme.

Un quadrilatère est **croisé** quand deux de ses côtés opposés se coupent, comme un nœud papillon.

**Vérifie : Reconnaître un parallélogramme**

Trace deux segments $[EG]$ et $[FH]$ qui se coupent en leur milieu $O$, avec $EG = 6$ cm et $FH = 10$ cm. Le quadrilatère $EFGH$ est-il un parallélogramme ?

**A.** Non, car ses diagonales n'ont pas la même longueur

**Faux.**

Faux. Des diagonales de même longueur ne sont pas exigées : c'est le cas particulier du rectangle.

**B.** On ne peut pas savoir sans mesurer ses côtés

**Faux.**

Faux. Les diagonales suffisent ici : regarde leur milieu.

**C.** Oui, car ses diagonales sont perpendiculaires

**Faux.**

Faux. Rien ne dit que les diagonales sont perpendiculaires. Et ce ne serait pas la bonne raison.

**D.** Oui, car ses diagonales ont le même milieu $O$

**Juste.**

Oui. C'est la première propriété du rappel.

**Correction**

Les diagonales $[EG]$ et $[FH]$ se coupent en $O$, qui est le milieu de chacune. Or un quadrilatère dont les diagonales ont le même milieu est un parallélogramme.

Donc $EFGH$ est un parallélogramme. Les longueurs $6$ cm et $10$ cm ne changent rien à la conclusion.

Rappel de 1AC : par un point $M$, il passe **une seule** droite parallèle à une droite donnée $(BC)$. Si deux droites passent par $M$ et sont parallèles à $(BC)$, elles sont donc **confondues** : c'est la même droite.

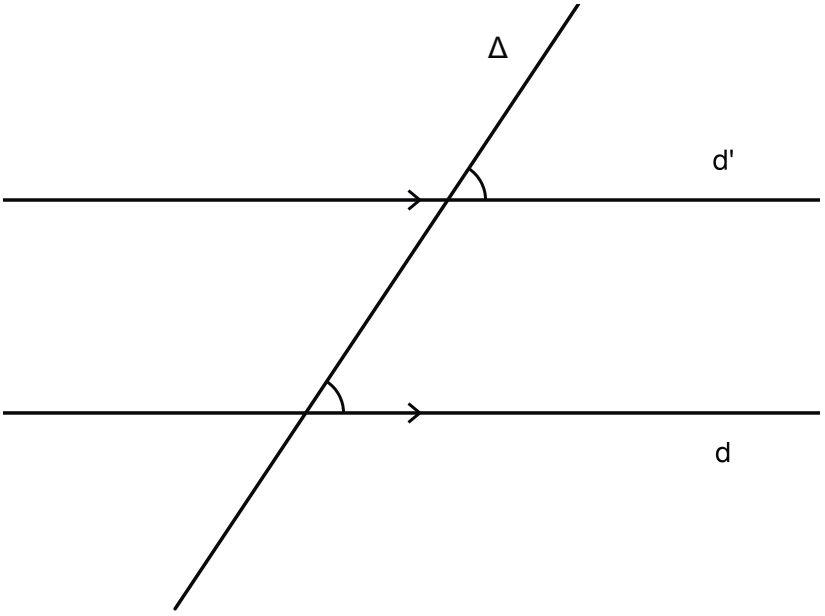
De plus, deux droites distinctes ont au plus un point commun.

Rappel de 1AC : deux droites parallèles à une même droite $d$ sont parallèles entre elles. De même, deux droites perpendiculaires à une même droite $d$ sont parallèles entre elles.

Par exemple, deux poteaux plantés bien droits sur un sol plat sont perpendiculaires au sol : ils sont parallèles.

Rappel de 1AC : une droite $\Delta$ coupe deux droites parallèles $d$ et $d'$. On l'appelle une **sécante**.

Deux angles **correspondants** sont du même côté de $\Delta$, et chacun du même côté de sa parallèle : par exemple, l'un au-dessus de $d$ et l'autre au-dessus de $d'$. Deux angles correspondants ont la même mesure.




**Deux parallèles d et d' coupées par la sécante Δ : les deux angles correspondants marqués d'un arc ont la même mesure.**

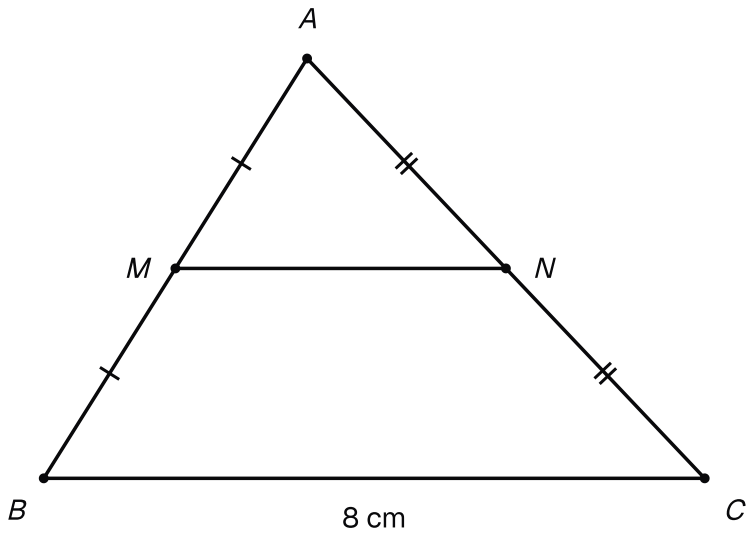
Rappel de 1AC : pour construire un triangle $ABC$ dont tu connais les trois côtés, trace d'abord $[BC]$ à la règle. Trace ensuite un arc de centre $B$ et de rayon $AB$, puis un arc de centre $C$ et de rayon $AC$. Les deux arcs se coupent au point $A$.

Pour tracer une parallèle, utilise ta règle et ton équerre.

## La droite des milieux

## Tracer et mesurer

Trace un triangle $ABC$ avec $BC = 8$ cm, $AB = 6$ cm et $AC = 7$ cm. Place le point $M$, milieu du côté $[AB]$, et le point $N$, milieu du côté $[AC]$. Trace le segment $[MN]$, puis mesure-le avec soin.




**La figure à tracer : un triangle ABC avec BC = 8 cm, AB = 6 cm et AC = 7 cm, les milieux M et N, et le segment [MN] à mesurer.**

**Devine : Ce que tu mesures**

Quelle longueur trouves-tu pour $MN$, à un millimètre près ?

**A.** $MN = 3$ cm, la moitié de $AB$

**Faux.**

Faux. Tu as peut-être mesuré $AM$ ou $MB$ : ces segments mesurent $3$ cm.

**B.** $MN = 6$ cm, autant que $AB$

**Faux.**

Faux. Sur ta figure, le segment $[MN]$ est bien plus court que $[AB]$.

**C.** $MN = 4$ cm, la moitié de $BC$

**Juste.**

Oui. Sur une figure soignée, tu trouves $4$ cm, à un millimètre près.

**D.** $MN = 3{,}5$ cm, la moitié de $AC$

**Faux.**

Faux. C'est la longueur $AN$. Mesure le segment qui relie les deux milieux.

**Correction**

Tu trouves $MN = 4$ cm, à un millimètre près. Or $BC = 8$ cm : le segment $[MN]$ mesure donc la moitié de $BC$.

Ce n'est pas un hasard : ce chapitre va le démontrer.

Pose ton équerre contre $(BC)$ et ta règle contre l'équerre. Fais glisser l'équerre le long de la règle jusqu'à $M$.

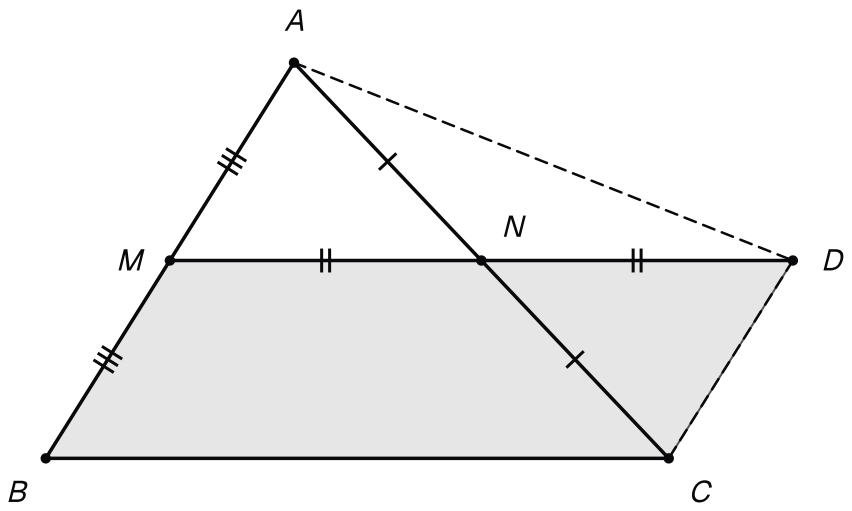
Le bord de l'équerre passe aussi par $N$ : la droite $(MN)$ semble **parallèle** à $(BC)$. Une mesure reste approchée : il faut une preuve.

## La propriété et sa preuve

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve sous l'énoncé n'utilise aucune mesure. Elle fabrique deux parallélogrammes, $AMCD$ puis $MBCD$, avec les rappels de 1AC.

Un seul point est lu sur la figure et accepté sans preuve : le quadrilatère $MBCD$ n'est pas croisé. Lis la preuve pas à pas, avec ta figure sous les yeux. Tu n'as pas à la réciter : retiens surtout l'encadré qui la suit.

Pour faire court, on appellera ce résultat « la propriété de la droite des milieux ».




**La figure de la preuve : D est placé pour que N soit le milieu de [MD], ce qui fait apparaître les parallélogrammes AMCD et MBCD.**

**Théorème : La droite des milieux**

Dans un triangle $ABC$, soit $M$ le milieu du côté $[AB]$ et $N$ le milieu du côté $[AC]$. Alors :

- la droite $(MN)$ est **parallèle** à la droite $(BC)$ ;
- la longueur $MN$ est **la moitié** de la longueur $BC$ : $MN = \dfrac{BC}{2}$.

La droite $(MN)$ est appelée la **droite des milieux** du triangle $ABC$ relative au côté $[BC]$.

---

**Démonstration**

**Étape 1.** On place le point $D$ tel que $N$ soit le milieu du segment $[MD]$.

**Étape 2.** Le point $M$ n'est pas sur la droite $(AC)$, car c'est un point de $(AB)$ distinct de $A$ : $AMCD$ est un vrai quadrilatère. Ses diagonales $[AC]$ et $[MD]$ ont le même milieu $N$. Or un quadrilatère dont les diagonales ont le même milieu est un parallélogramme. Donc $AMCD$ est un parallélogramme : ses côtés opposés $[AM]$ et $[DC]$ sont parallèles et de même longueur, et $DC = AM$.

**Étape 3.** Comme $M$ est le milieu de $[AB]$, on a $AM = MB$, donc $DC = MB$. De plus, $(DC)$ est parallèle à $(AB)$, qui contient $M$ et $B$.

**Étape 4.** Le quadrilatère $MBCD$ a deux côtés opposés, $[MB]$ et $[DC]$, parallèles et de même longueur. On lit sur la figure qu'il n'est pas croisé ; ce point est admis. C'est donc un parallélogramme.

**Étape 5.** Ses côtés opposés $[MD]$ et $[BC]$ sont donc parallèles et de même longueur. Comme $N$ est sur $[MD]$, la droite $(MN)$ est parallèle à $(BC)$. Enfin, $N$ est le milieu de $[MD]$, donc $MN = \dfrac{MD}{2} = \dfrac{BC}{2}$.

**À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve**

Pour démontrer une propriété des milieux, on **fabrique un parallélogramme**. Ici, on place le point $D$ tel que $N$ soit le milieu de $[MD]$ : les diagonales de $AMCD$ ont alors le même milieu.

Ensuite, $MBCD$ a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, et ta figure montre qu'il n'est pas croisé : c'est un parallélogramme. Ses côtés opposés $[MD]$ et $[BC]$ donnent le parallélisme et la longueur.

**Vérifie : Un argument de la preuve**

Dans la preuve, pourquoi le quadrilatère $AMCD$ est-il un parallélogramme ?

**A.** Ses quatre côtés ont la même longueur

**Faux.**

Faux. La preuve ne dit rien de tel : $AM$ et $AD$ n'ont aucune raison d'être égaux.

**B.** Il a quatre angles droits

**Faux.**

Faux. Le triangle $ABC$ est quelconque : aucun angle droit n'apparaît.

**C.** Ses diagonales $[AC]$ et $[MD]$ ont le même milieu $N$

**Juste.**

Oui. $N$ est le milieu de $[AC]$ par hypothèse, et celui de $[MD]$ par construction.

**D.** La droite $(MN)$ est parallèle à $(BC)$

**Faux.**

Faux. C'est ce que la preuve veut démontrer : on ne peut pas s'en servir avant.

**Correction**

> Le point $N$ est le milieu de $[AC]$ : c'est une hypothèse. Il est aussi le milieu de $[MD]$, car on a placé $D$ ainsi. Les diagonales de $AMCD$ ont donc le même milieu.
>
> Or un quadrilatère dont les diagonales ont le même milieu est un parallélogramme. Donc $AMCD$ en est un.

**Exemple : la barre de l'escabeau**

Reprends l'escabeau de Karim. Le sommet $A$ et les pieds $B$ et $C$ forment un triangle, avec $BC = 90$ cm. La barre relie le milieu $M$ de $[AB]$ et le milieu $N$ de $[AC]$.

D'après la propriété de la droite des milieux, $(MN)$ est parallèle à $(BC)$ et :

$$MN = \frac{BC}{2} = \frac{90}{2} = 45.$$

La barre mesure $45$ cm. Elle est parallèle au sol, qui contient $B$ et $C$.

## En clair

En clair : dans un triangle, la droite qui joint les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté. Le segment qui joint ces milieux mesure la moitié du troisième côté.

À l'inverse, le troisième côté mesure le double du segment des milieux :

$$BC = 2 \times MN.$$

**Exemple : retrouver un côté**

Dans un triangle $RST$, $I$ est le milieu de $[RS]$ et $J$ est le milieu de $[RT]$. On sait que $IJ = 3{,}5$ cm.

D'après la propriété de la droite des milieux, $IJ = \dfrac{ST}{2}$. Le côté $[ST]$ mesure donc le double de $IJ$ :

$$ST = 2 \times IJ = 2 \times 3{,}5 = 7.$$

Le côté $[ST]$ mesure 7 cm.

**Exemple : les trois milieux**

Un triangle $EFG$ a pour côtés $EF = 6$ cm, $FG = 10$ cm et $EG = 8$ cm. On note $I$, $J$ et $K$ les milieux de $[EF]$, $[FG]$ et $[EG]$.

D'après la propriété de la droite des milieux, appliquée trois fois :

- $IK = \dfrac{FG}{2} = 5$ cm ;
- $IJ = \dfrac{EG}{2} = 4$ cm ;

- $JK = \dfrac{EF}{2} = 3$ cm.

Le périmètre du triangle $IJK$ vaut $12$ cm, car $5 + 4 + 3 = 12$. C'est la moitié du périmètre de $EFG$, qui vaut $24$ cm.

**Attention : deux vrais milieux**

La propriété exige **deux milieux**, sur deux côtés du **même** triangle. Un point qui « a l'air » d'être un milieu ne suffit pas : il faut le savoir.

Reprends le triangle $ABC$ du début de la section, avec $AB = 6$ cm et $AC = 7$ cm. Garde $M$, milieu de $[AB]$, et place $P$ sur $[AC]$ avec $AP = 3$ cm, près du milieu de $[AC]$.

Vérifie à l'équerre, comme au début : fais glisser ton équerre le long de la règle jusqu'à $M$. Son bord ne passe pas par $P$ : la droite $(MP)$ n'est pas parallèle à $(BC)$.

Tu pourras le démontrer avec la propriété de la section « Une parallèle qui passe par un milieu ».

## À toi

**Trouve l'erreur : Le raisonnement de Samir**

Dans un triangle $KLM$, Samir sait que $I$ est le milieu de $[KL]$. Il place un point $J$ sur $[KM]$, puis il écrit : « D'après la propriété de la droite des milieux, $(IJ)$ est parallèle à $(LM)$. » Où est l'erreur ?

**A.** La propriété ne parle pas de droites parallèles
**Faux.**
Faux. Elle conclut bien au parallélisme, quand ses hypothèses sont vérifiées.

**B.** Rien ne dit que $J$ est le milieu de $[KM]$
**Juste.**
Oui. Il faut deux milieux : celui de $[KL]$ ne suffit pas.

**C.** $[LM]$ n'est pas un côté du triangle $KLM$
**Faux.**
Faux. $[LM]$ est bien un côté : celui qui ne contient pas $K$.

**D.** Il n'y a aucune erreur
**Faux.**
Faux. Une hypothèse de la propriété n'est pas vérifiée.

**Correction**
La propriété de la droite des milieux demande deux milieux. Ici, seul $I$ est un milieu connu. Le point $J$ est un point quelconque de $[KM]$ : la conclusion de Samir n'est pas justifiée.

Pour conclure, il faudrait savoir que $J$ est le milieu de $[KM]$.

**À toi : un panneau triangulaire**

Trace un triangle $ABC$ avec $AB = 5$ cm, $AC = 5$ cm et $BC = 6$ cm. On note $M$ le milieu de $[AB]$ et $N$ le milieu de $[AC]$.

Montre que $(MN)$ est parallèle à $(BC)$. Calcule ensuite $MN$, puis le périmètre du triangle $AMN$.

**Indice 1**
Cherche deux milieux sur deux côtés du même triangle : la propriété de la droite des milieux s'applique.
**Indice 2**
Elle donne $(MN)$ parallèle à $(BC)$ et $MN = \dfrac{BC}{2}$. Pour $AM$ et $AN$, utilise la définition du milieu.
**Indice 3**
Point délicat : le périmètre de $AMN$ additionne $AM$, $AN$ et $MN$. Ne prends pas les côtés du grand triangle.

**Réponse**
**Parallélisme et longueur $MN$.** Dans le triangle $ABC$, $M$ est le milieu de $[AB]$ et $N$ est le milieu de $[AC]$. D'après la propriété de la droite des milieux, $(MN)$ est parallèle à $(BC)$ et :

$$MN = \frac{BC}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

Donc $MN = 3$ cm.

**Les côtés $[AM]$ et $[AN]$.** Par définition du milieu, $AM = \dfrac{AB}{2} = 2{,}5$ cm et $AN = \dfrac{AC}{2} = 2{,}5$ cm.

**Le périmètre.** Celui du triangle $AMN$ additionne ses trois côtés :

$$2{,}5 + 2{,}5 + 3 = 8.$$

**Conclusion.** La droite $(MN)$ est parallèle à $(BC)$, $MN = 3$ cm, et le périmètre du triangle $AMN$ vaut $8$ cm.

Tu sais maintenant reconnaître une droite des milieux. Tu sais aussi calculer la longueur du segment des milieux. La section suivante t'apprend à le rédiger proprement.

## Utiliser la droite des milieux

## Rédiger une preuve courte

Une **démonstration** est une suite de phrases justifiées. Tu l'écris en trois temps : **On sait que** (les données de l'énoncé), **Or** (la propriété du cours), **Donc** (la conclusion).

Les **hypothèses** d'une propriété sont ce qu'il faut savoir pour l'employer. Avant de citer une propriété, vérifie toujours que ses hypothèses sont dans les données.

**Vérifie : Ce qu'il faut savoir**

Dans un triangle $EFG$, on veut démontrer que $(IJ)$ est parallèle à $(FG)$ avec la propriété de la droite des milieux. Que faut-il savoir ?

**A.** Que $I$ est le milieu de $[EF]$, seulement

**Faux.**

Faux. Un seul milieu ne suffit pas : il en faut deux.

**B.** Que $I$ et $J$ sont les milieux de $[EF]$ et $[EG]$

**Juste.**

Oui. Deux milieux, sur deux côtés du même triangle.

**C.** Que $IJ$ est la moitié de $FG$

**Faux.**

Faux. C'est une conclusion de la propriété, pas une hypothèse.

**D.** Que $(IJ)$ semble parallèle à $(FG)$ sur la figure

**Faux.**

Faux. Une figure ne prouve rien : elle aide à chercher.

**Correction**

Il faut savoir que $I$ est le milieu de $[EF]$ et que $J$ est le milieu de $[EG]$. Ce sont les deux hypothèses de la propriété de la droite des milieux.

La conclusion vient ensuite : $(IJ)$ est parallèle à $(FG)$ et $IJ = \dfrac{FG}{2}$.

**Méthode : démontrer que deux droites sont parallèles**

1. **Repérer** le triangle et les deux côtés dont tu connais les milieux.
2. **Vérifier** les deux hypothèses : chaque point est le milieu d'un côté du même triangle. Écris-les après « On sait que ».
3. **Citer** la propriété après « Or » : « Or, d'après la propriété de la droite des milieux ».
4. **Conclure** après « Donc » : la droite qui joint les deux milieux est parallèle au troisième côté. Si on te demande une longueur, ajoute que le segment des milieux mesure la moitié de ce côté.

**Exemple : une étagère d'angle**

Une étagère d'angle a la forme d'un triangle $RST$. Son bord $[ST]$ mesure $60$ cm. Une baguette relie le milieu $I$ de $[RS]$ au milieu $J$ de $[RT]$.

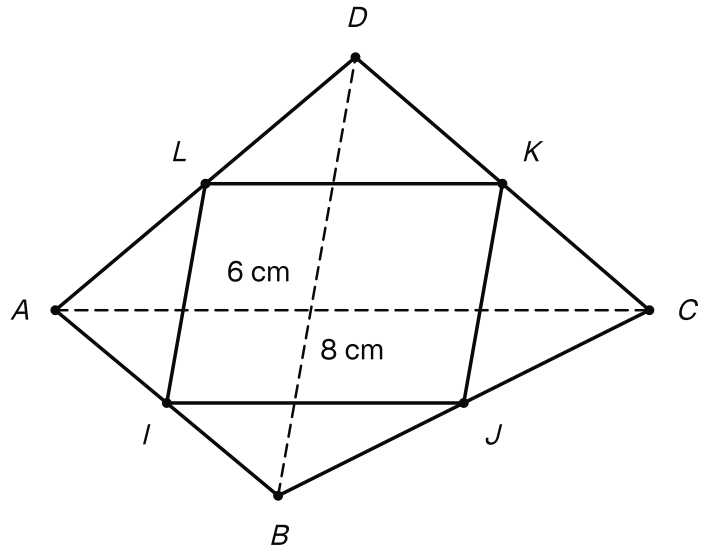
- On sait que, dans le triangle $RST$, $I$ est le milieu de $[RS]$ et $J$ est le milieu de $[RT]$.
- Or, d'après la propriété de la droite des milieux, $(IJ)$ est parallèle à $(ST)$ et $IJ = \dfrac{ST}{2}$.

- Donc la baguette est parallèle au bord $[ST]$ et mesure $IJ = \dfrac{60}{2} = 30$ cm.

## Le quadrilatère des milieux

Trace deux segments $[AC]$ et $[BD]$ qui se coupent, avec $AC = 8$ cm et $BD = 6$ cm. Le quadrilatère $ABCD$ a ces deux segments pour diagonales.

Place les milieux $I$, $J$, $K$ et $L$ des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Le quadrilatère $IJKL$ ressemble à un parallélogramme : démontrons-le.




**Le quadrilatère ABCD, ses diagonales de 8 cm et de 6 cm, et le quadrilatère IJKL qui relie les milieux de ses côtés.**

**Exemple : la diagonale [AC]**

La diagonale $[AC]$ partage $ABCD$ en deux triangles.

- Dans le triangle $ABC$, $I$ et $J$ sont les milieux de $[AB]$ et $[BC]$. D'après la propriété de la droite des milieux, $(IJ)$ est parallèle à $(AC)$ et $IJ = \dfrac{AC}{2} = 4$ cm.
- Dans le triangle $ADC$, $L$ et $K$ sont les milieux de $[AD]$ et $[DC]$. D'après la propriété de la droite des milieux, $(LK)$ est parallèle à $(AC)$ et $LK = \dfrac{AC}{2} = 4$ cm.

**Exemple : la diagonale [BD], puis la conclusion**

Avec la diagonale $[BD]$ et les triangles $ABD$ et $CBD$, on obtient de même : $(IL)$ et $(JK)$ sont parallèles à $(BD)$, et $IL = JK = \dfrac{BD}{2} = 3$ cm.

Rappel de 1AC : deux droites parallèles à une même droite, ici $(AC)$ puis $(BD)$, sont parallèles entre elles. Donc $(IJ)$ est parallèle à $(LK)$, et $(IL)$ est parallèle à $(JK)$.

Les côtés opposés de $IJKL$ sont parallèles deux à deux : $IJKL$ est un parallélogramme.

Son périmètre vaut $4 + 3 + 4 + 3 = 14$ cm.

## Attention et Coin devoir

**Vérifie : La moitié, dans quel cas ?**

Dans un triangle $ABC$, on a $BC = 10$ cm. Les points $M$ et $N$ sont sur les côtés $[AB]$ et $[AC]$. Dans quel cas peut-on affirmer que $MN = 5$ cm ?

**A.** Quand $(MN)$ est parallèle à $(BC)$, sans autre information

**Faux.**

Faux. Une parallèle peut couper les côtés ailleurs qu'en leur milieu : $MN$ dépend alors de sa position.

**B.** Quand $M$ est le milieu de $[AB]$, sans autre information

**Faux.**

Faux. Un seul milieu ne suffit pas : $N$ peut être n'importe où sur $[AC]$.

**C.** Quand $AM = AN$, sans autre information

**Faux.**

Faux. Rien ne dit alors que $M$ et $N$ sont des milieux.

**D.** Quand $M$ et $N$ sont les milieux de $[AB]$ et $[AC]$

**Juste.**

Oui. Ce sont les hypothèses de la propriété de la droite des milieux.

**Correction**

Seul le dernier cas permet de conclure.

Si $M$ et $N$ sont les milieux de $[AB]$ et $[AC]$, la propriété de la droite des milieux donne $MN = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$ cm.

Dans les autres cas, $MN$ peut prendre d'autres valeurs.

**Attention : la moitié, seulement pour des milieux**

L'égalité $MN = \dfrac{BC}{2}$ ne vaut que si $M$ et $N$ sont les **milieux** des deux côtés. Une droite parallèle à $(BC)$ ne coupe pas toujours les côtés en leur milieu.

Prends un triangle $ABC$ avec $BC = 9$ cm. Place $M$ sur $[AB]$ tel que $AM = \dfrac{AB}{3}$. La parallèle à $(BC)$ passant par $M$ coupe $[AC]$ en $N$.

Sur une figure exacte, $MN$ mesure $3$ cm, et non $4{,}5$ cm. Une autre propriété traitera ce cas plus loin.

**Remarque : Coin devoir**

En devoir, la question « Montre que $(IJ)$ est parallèle à $(ST)$ » attend trois temps : On sait que, Or, Donc. Voici une rédaction modèle, pour l'étagère d'angle :

« On sait que, dans le triangle $RST$, $I$ est le milieu de $[RS]$ et $J$ est le milieu de $[RT]$. Or, d'après la propriété de la droite des milieux, la droite qui joint ces deux milieux est parallèle au troisième côté. Donc la droite $(IJ)$ est parallèle à la droite $(ST)$. »

N'oublie pas le nom du triangle : il dit où la propriété s'applique.

## À toi

**À toi : un cadre à quatre lattes**

Trace deux segments $[EG]$ et $[FH]$ qui se coupent, avec $EG = 10$ cm et $FH = 7$ cm. On note $P$, $Q$, $R$ et $S$ les milieux de $[EF]$, $[FG]$, $[GH]$ et $[HE]$. Calcule le périmètre du quadrilatère $PQRS$, en justifiant chaque longueur.

**Indice 1**
Trace une diagonale à la fois : chaque diagonale partage $EFGH$ en deux triangles.
**Indice 2**
Dans le triangle $EFG$, $P$ et $Q$ sont des milieux : $PQ = \dfrac{EG}{2}$. Fais de même dans les triangles $EHG$, $FEH$ et $FGH$.
**Indice 3**
Point délicat : $[PQ]$ et $[SR]$ dépendent de la diagonale $[EG]$, alors que $[PS]$ et $[QR]$ dépendent de $[FH]$.

**Réponse**
**Avec la diagonale $[EG]$.** Dans le triangle $EFG$, $P$ et $Q$ sont les milieux de $[EF]$ et $[FG]$. D'après la propriété de la droite des milieux, $PQ = \dfrac{EG}{2} = 5$ cm. De même, dans le triangle $EHG$, $SR = \dfrac{EG}{2} = 5$ cm.

**Avec la diagonale $[FH]$.** Dans les triangles $FEH$ et $FGH$, on obtient de même $PS = QR = \dfrac{FH}{2} = 3{,}5$ cm.

**Le périmètre.** On additionne les quatre côtés de $PQRS$ :

$$5 + 3{,}5 + 5 + 3{,}5 = 17.$$

**Conclusion.** Le périmètre du quadrilatère $PQRS$ vaut $17$ cm.

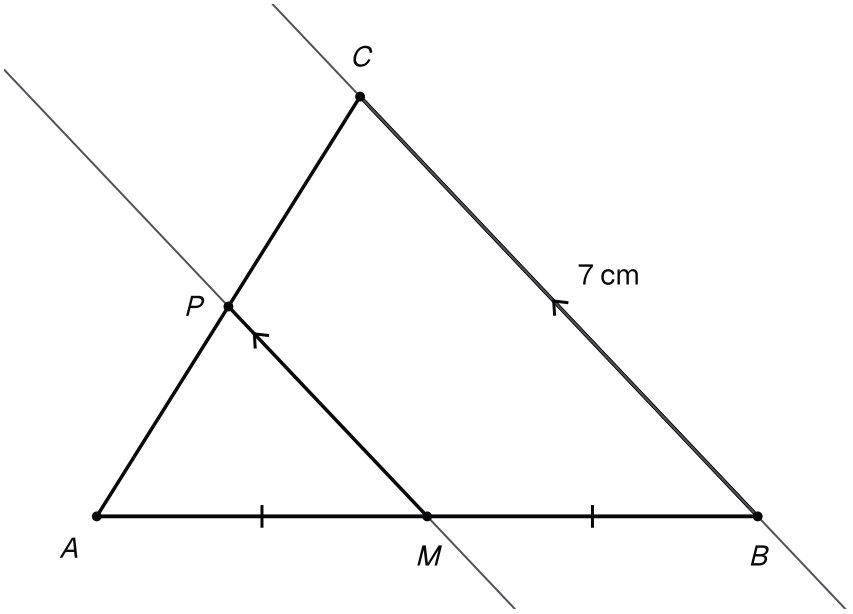
Retiens le geste : une diagonale, deux triangles, deux fois la propriété. Ce geste sert dans beaucoup de figures avec des quadrilatères.

## Une parallèle qui passe par un milieu

### Tracer et observer

Trace un triangle $ABC$ avec $AB = 8$ cm, $AC = 6$ cm et $BC = 7$ cm. Place le point $M$, milieu de $[AB]$.

À l'équerre, trace la droite parallèle à $(BC)$ qui passe par $M$. Elle coupe le côté $[AC]$ en un point : appelle-le $P$.




**La figure à tracer : le triangle ABC avec AB = 8 cm, AC = 6 cm et BC = 7 cm, le milieu M de [AB] et la parallèle à (BC) menée par M, qui coupe [AC] en P.**

**Devine : Où tombe le point P ?**

Mesure $AP$. Que trouves-tu, à un millimètre près ?

**A.** $AP = 2$ cm, le tiers de $AC$

**Faux.**

Faux. Mesure à partir de $A$, sur le côté $[AC]$, jusqu'au point $P$.

**B.** $AP = 4$ cm, autant que $AM$

**Faux.**

Faux. $AM$ mesure bien $4$ cm, mais $AP$ n'a aucune raison de lui être égal : mesure-le.

**C.** $AP = 3$ cm, la moitié de $AC$

**Juste.**

Oui. Le point $P$ semble être le milieu de $[AC]$.

**D.** $AP = 3{,}5$ cm, la moitié de $BC$

**Faux.**
Faux. Tu as divisé $BC$ par deux : ce n'est pas la longueur $AP$.

**Correction**
Tu trouves $AP = 3$ cm, à un millimètre près, et $PC = 3$ cm. Le point $P$ semble être le milieu de $[AC]$.

Une mesure ne suffit pas : la propriété suivante le démontre.

Avec un autre triangle, tu obtiendrais la même chose.

Ici, la situation change par rapport à la section précédente. Avant, tu connaissais deux milieux. Maintenant, tu connais un milieu et une parallèle.

## La propriété et sa preuve

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve sous l'énoncé ne mesure rien. Elle utilise la propriété de la droite des milieux, puis le rappel sur la parallèle unique.

Pour faire court, on appellera ce résultat « la propriété de la parallèle par un milieu ».

**Théorème : Droite passant par le milieu d'un côté et parallèle à un deuxième côté**

Dans un triangle $ABC$, soit $M$ le milieu du côté $[AB]$. La droite qui passe par $M$ et qui est **parallèle** à la droite $(BC)$ coupe le côté $[AC]$ **en son milieu**.

**Démonstration**
**Étape 1.** On note $d$ la droite qui passe par $M$ et qui est parallèle à $(BC)$, et $N$ le milieu du côté $[AC]$.

**Étape 2.** D'après la propriété de la droite des milieux, appliquée aux milieux $M$ et $N$ des côtés $[AB]$ et $[AC]$, la droite $(MN)$ est parallèle à $(BC)$.

**Étape 3.** Par le point $M$, il passe une seule droite parallèle à $(BC)$. Or $d$ et $(MN)$ passent toutes les deux par $M$ et sont parallèles à $(BC)$ : elles sont donc confondues. Ainsi, le point $N$ est sur la droite $d$.

**Étape 4.** Les droites $d$ et $(AC)$ ne sont pas confondues : $M$ est sur $d$, mais pas sur $(AC)$, car $M$ est un point de $(AB)$ distinct de $A$. Elles ont donc au plus un point commun. Or $N$ est sur $d$ et sur $[AC]$ : la droite $d$ coupe le côté $[AC]$ en son milieu $N$.

**À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve**

Pour montrer qu'un point est un milieu, on peut **passer par le vrai milieu** $N$.

La propriété de la droite des milieux donne une parallèle à $(BC)$ qui passe par $M$. Comme il n'existe qu'une seule parallèle à $(BC)$ par $M$, la droite tracée passe par $N$.

**Vérifie : Un argument de la preuve**

Dans la preuve, pourquoi les droites $d$ et $(MN)$ sont-elles confondues ?

**A.** Car elles ont la même longueur

**Faux.**

Faux. Une droite n'a pas de longueur : elle est illimitée.

**B.** Car par $M$, il passe une seule parallèle à $(BC)$

**Juste.**

Oui. Les deux droites passent par $M$ et sont parallèles à $(BC)$.

**C.** Car $N$ est le milieu du côté $[AC]$

**Faux.**

Faux. Ce fait est vrai, mais il ne dit pas que $N$ est sur $d$.

**D.** Car elles sont perpendiculaires à $(AB)$

**Faux.**

Faux. Aucune droite de cette figure n'est perpendiculaire à $(AB)$ par hypothèse.

**Correction**

La droite $d$ passe par $M$ et elle est parallèle à $(BC)$, par hypothèse. La droite $(MN)$ passe aussi par $M$, et elle est parallèle à $(BC)$ d'après la propriété de la droite des milieux.

Or, par $M$, il passe une seule droite parallèle à $(BC)$. Les deux droites sont donc confondues.

**Exemple : la poutre d'un abri**

La façade d'un abri forme un triangle $ABC$ : $[BC]$ est le plancher et $A$ est le haut du toit. Le côté $[AC]$ mesure $5$ m. Une poutre part du milieu $M$ de $[AB]$, parallèle au plancher, et rejoint $[AC]$ en $P$.

On sait que, dans le triangle $ABC$, $M$ est le milieu de $[AB]$ et la poutre est parallèle à $(BC)$. Or, d'après la propriété de la parallèle par un milieu, la poutre coupe $[AC]$ en son milieu. Donc $P$ est le milieu de $[AC]$, et :

$$AP = \frac{5}{2} = 2{,}5.$$

La poutre rejoint le côté $[AC]$ à $2{,}5$ m du haut du toit.

## Rédiger avec cette propriété

En clair : dans un triangle, une droite qui passe par le milieu d'un côté et qui est parallèle à un deuxième côté coupe le troisième côté en son milieu. C'est la propriété de la parallèle par un milieu.

**Méthode : démontrer qu'un point est un milieu**

1. **Repérer** le triangle, le milieu connu d'un côté et la droite qui passe par ce milieu.
2. **Vérifier** que cette droite est parallèle à un deuxième côté du triangle.
3. **Citer** la propriété de la parallèle par un milieu.
4. **Conclure** : le point où la droite coupe le troisième côté est le milieu de ce côté. Tu peux alors calculer des longueurs avec la définition du milieu.

**Exemple : une rédaction complète**

Dans un triangle $EFG$, $I$ est le milieu de $[EF]$. La droite parallèle à $(FG)$ passant par $I$ coupe $[EG]$ en $K$. On sait que $EG = 9$ cm.

- Dans le triangle $EFG$, $I$ est le milieu de $[EF]$ et la droite $(IK)$ est parallèle à $(FG)$.
- D'après la propriété de la parallèle par un milieu, $K$ est le milieu de $[EG]$.
- Donc $EK = KG = \dfrac{9}{2} = 4{,}5$ cm.

## Deux propriétés à ne pas confondre

**Vérifie : Quelle propriété ?**

Dans un triangle $RST$, $U$ est le milieu de $[RS]$. La droite $(UV)$ est parallèle à $(ST)$, avec $V$ sur $[RT]$.

On veut savoir où se trouve $V$. Quelle propriété faut-il citer ?

**A.** La propriété de la droite des milieux

**Faux.**

Faux. Elle demande deux milieux connus : ici, on n'en connaît qu'un.

**B.** Une propriété du parallélogramme

**Faux.**

Faux. Il n'y a pas de parallélogramme dans cette figure.

**C.** Aucune, il faut mesurer $RV$

**Faux.**

Faux. Une mesure ne démontre rien : une propriété du cours suffit.

**D.** La propriété de la parallèle par un milieu

**Juste.**

Oui. Un milieu et une parallèle : elle conclut que $V$ est le milieu de $[RT]$.

**Correction**
On connaît un milieu, $U$, et une parallèle, $(UV)$. On cherche un milieu.

C'est la propriété de la parallèle par un milieu : $V$ est le milieu de $[RT]$.

**Attention : deux propriétés différentes**

La propriété de la droite des milieux part de **deux milieux**. Elle conclut au **parallélisme** et donne une longueur.

La propriété de la parallèle par un milieu part d'**un milieu et d'une parallèle**. Elle conclut à **un milieu**.

Avant de citer une propriété, écris ce que tu sais et ce que tu cherches. C'est ce qui décide de la propriété à employer.

**À toi : le milieu caché**

Trace un triangle $KLM$ avec $KL = 10$ cm, $KM = 8$ cm et $LM = 6$ cm. Place $I$, milieu de $[KL]$.

La parallèle à $(LM)$ passant par $I$ coupe $[KM]$ en $J$. Calcule $KJ$, puis $IJ$, en justifiant.

**Indice 1**
Tu connais un milieu et une parallèle : pense à la propriété de la parallèle par un milieu.
**Indice 2**
Avec cette propriété, que peux-tu dire du point $J$ ? Cherche ensuite le triangle où tu connais deux milieux.
**Indice 3**
Point délicat : pour $IJ$, il faut une deuxième propriété, celle de la droite des milieux.

**Réponse**
**Le point $J$.** Dans le triangle $KLM$, $I$ est le milieu de $[KL]$ et $(IJ)$ est parallèle à $(LM)$. D'après la propriété de la parallèle par un milieu, $J$ est le milieu de $[KM]$. Donc $KJ = \dfrac{8}{2} = 4$ cm.

**La longueur $IJ$.** Maintenant, $I$ et $J$ sont les milieux de $[KL]$ et $[KM]$. D'après la propriété de la droite des milieux, $IJ = \dfrac{LM}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$ cm.

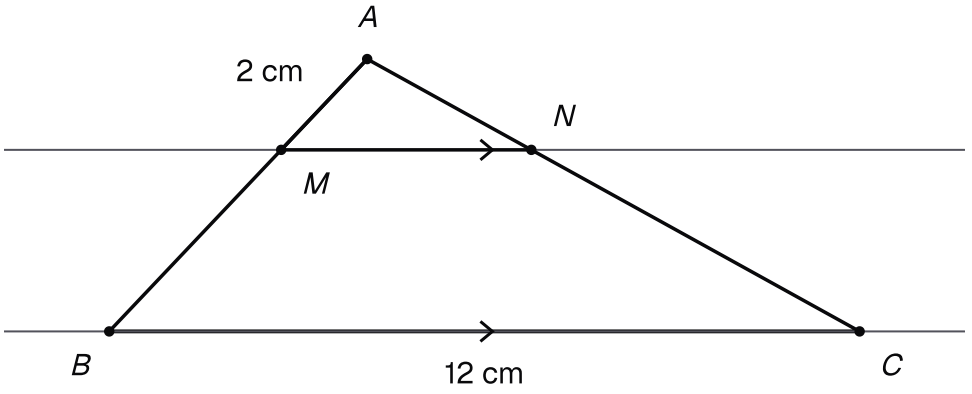
**Conclusion.** On obtient $KJ = 4$ cm et $IJ = 3$ cm.

## Des longueurs proportionnelles

## Mesurer et comparer

Trace un triangle $ABC$ avec $AB = 6$ cm, $AC = 9$ cm et $BC = 12$ cm. Place le point $M$ sur $[AB]$ avec $AM = 2$ cm. Trace la parallèle à $(BC)$ passant par $M$ : elle coupe $[AC]$ en $N$.

Mesure ensuite $AN$ et $MN$.




**La figure à tracer : le triangle ABC de côtés 6 cm, 9 cm et 12 cm, le point M à 2 cm de A sur [AB] et la parallèle à (BC) qui coupe [AC] en N.**

**Devine : Un tableau de longueurs**

Tu trouves $AN = 3$ cm et $MN = 4$ cm. Range tes mesures, en centimètres, dans ce tableau :

| Triangle | Premier côté | Deuxième côté | Troisième côté |
|---|---|---|---|
| petit triangle $AMN$ | $AM = 2$ | $AN = 3$ | $MN = 4$ |
| grand triangle $ABC$ | $AB = 6$ | $AC = 9$ | $BC = 12$ |

Que remarques-tu ?

**A.** Chaque longueur du grand triangle vaut celle du petit plus $4$

**Faux.**

Faux. $2 + 4 = 6$, mais $3 + 4 = 7$, et non $9$.

**B.** Chaque longueur du grand triangle est le triple de celle du petit

**Juste.**

Oui. $6 = 3 \times 2$, $9 = 3 \times 3$ et $12 = 3 \times 4$.

**C.** Chaque longueur du grand triangle est le double de celle du petit

**Faux.**

Faux. $2 \times 2 = 4$, et non $6$.

**D.** Il n'y a aucun lien entre les deux lignes du tableau

**Faux.**

Faux. Regarde chaque colonne : divise la longueur du bas par celle du haut.

**Correction**

Chaque longueur du grand triangle est le triple de celle du petit : $6 = 3 \times 2$, $9 = 3 \times 3$ et $12 = 3 \times 4$. Les deux lignes forment un **tableau de proportionnalité**.

Un **rapport** est le quotient de deux longueurs : ici, on divise une longueur du petit triangle par la longueur correspondante du grand. Les trois rapports sont égaux :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{3}.$$

On dit que les longueurs des côtés des triangles $AMN$ et $ABC$ sont **proportionnelles**. Cela veut dire qu'on passe des unes aux autres en multipliant par un même nombre.

Du petit triangle au grand, ce nombre est $3$. Du grand triangle au petit, c'est $\frac{1}{3}$ : c'est le rapport $\frac{AM}{AB}$.

## La propriété

Ce que tu as observé reste vrai pour toute parallèle à $(BC)$ qui coupe les côtés $[AB]$ et $[AC]$. Voici l'énoncé. Lis bien ses hypothèses : les points sont sur les côtés, et la droite $(MN)$ est parallèle à $(BC)$.

**Propriété : Parallèle à un côté : longueurs proportionnelles**

Dans un triangle $ABC$, soit $M$ un point du côté $[AB]$ et $N$ un point du côté $[AC]$, distincts de $A$. Si la droite $(MN)$ est **parallèle** à la droite $(BC)$, alors les longueurs des côtés des triangles $AMN$ et $ABC$ sont **proportionnelles** :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

**Remarque : Un résultat admis**

Ce résultat est admis. Tu l'étudieras de façon plus complète l'année prochaine. Cette année, tu l'utilises pour calculer des longueurs.

En clair : quand une droite parallèle à un côté coupe les deux autres côtés, elle découpe un petit triangle. Les côtés du petit triangle sont proportionnels à ceux du grand.

On écrit les rapports avec le petit triangle en haut et le grand triangle en bas. Pour faire court, on appellera ce résultat « la propriété des longueurs proportionnelles ».

**Exemple : retrouver tes mesures**

Reprends ta figure : $M$ est sur $[AB]$, $N$ est sur $[AC]$ et $(MN)$ est parallèle à $(BC)$. D'après la propriété des longueurs proportionnelles :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

Avec les longueurs de ta figure, cela s'écrit :

$$\frac{2}{6} = \frac{AN}{9} = \frac{MN}{12}.$$

Le rapport $\frac{2}{6}$ vaut $\frac{1}{3}$. Donc $AN = \frac{9}{3} = 3$ cm et $MN = \frac{12}{3} = 4$ cm : ce sont bien tes mesures.

## Calculer une longueur

Rappel de 1AC : si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, avec $b$ et $d$ non nuls, alors :

$$a \times d = b \times c.$$

C'est l'**égalité des produits en croix**. Elle permet de calculer un nombre inconnu dans une égalité de deux fractions.

**Méthode : calculer une longueur**

1. **Vérifier** les hypothèses : $M$ est sur le côté $[AB]$, $N$ est sur le côté $[AC]$, et $(MN)$ est parallèle à $(BC)$.
2. **Écrire** l'égalité des rapports $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$, petit triangle en haut, grand triangle en bas.
3. **Remplacer** les longueurs connues. Garde ensuite deux rapports : celui que tu connais en entier et celui qui contient l'inconnue.
4. **Calculer** l'inconnue avec l'égalité des produits en croix. Vérifie enfin que le résultat est possible : un côté du petit triangle est plus court que le côté correspondant du grand.

**Exemple : une rampe**

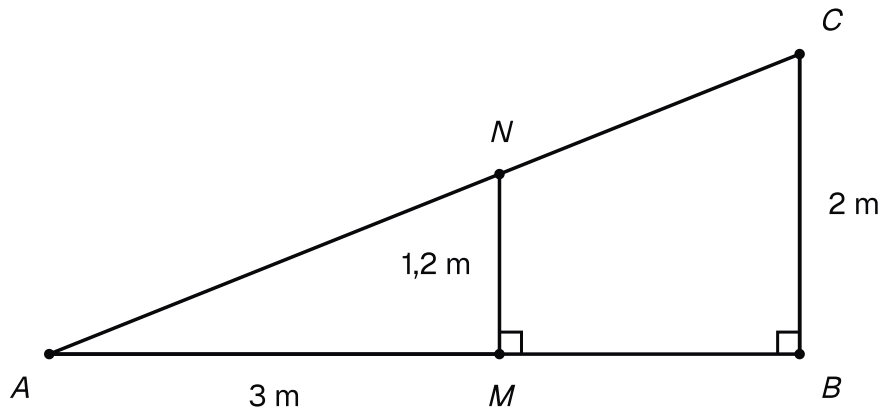
Une rampe a la forme d'un triangle $ABC$ rectangle en $B$ : $[AB]$ est au sol et $[BC]$ est vertical. On a $AB = 5$ m et $BC = 2$ m. Un montant vertical $[MN]$ relie $M$ sur $[AB]$ et $N$ sur $[AC]$, avec $AM = 3$ m : on cherche $MN$.

**Le parallélisme.** Le montant $[MN]$ et le côté $[BC]$ sont verticaux : les droites $(MN)$ et $(BC)$ sont perpendiculaires au sol $(AB)$. Rappel de 1AC : deux droites perpendiculaires à une même droite, ici $(AB)$, sont parallèles entre elles. Donc $(MN)$ est parallèle à $(BC)$.

**Le calcul.** D'après la propriété des longueurs proportionnelles, $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$, soit $\frac{3}{5} = \frac{MN}{2}$. Par l'égalité des produits en croix :

$$5 \times MN = 3 \times 2$$
$$MN = \frac{6}{5} = 1{,}2$$

**Conclusion.** Le montant mesure $1{,}2$ m. C'est moins que $BC$ : le résultat est possible.




**La rampe de l'exemple : le montant [MN], parallèle à [BC], mesure 1,2 m quand AM = 3 m, AB = 5 m et BC = 2 m.**

**Vérifie : À toi de choisir**

Dans un triangle $EFG$, $K$ est sur $[EF]$ et $L$ sur $[EG]$, avec $(KL)$ parallèle à $(FG)$. On sait que $EK = 4$ cm, $EF = 10$ cm et $EG = 15$ cm. Combien mesure $EL$ ?

**A.** $EL = 6$ cm

**Juste.**

Oui. $\dfrac{4}{10} = \dfrac{EL}{15}$, donc $10 \times EL = 60$ et $EL = 6$ cm.

**B.** $EL = 9$ cm

**Faux.**

Faux. Tu as peut-être calculé $15 - 10 + 4$ : on multiplie et on divise, on n'ajoute pas.

**C.** $EL = 37{,}5$ cm

**Faux.**

Faux. Tu as calculé $\dfrac{10 \times 15}{4}$ : les rapports sont inversés, et $EL$ dépasserait $EG$.

**D.** $EL = 4$ cm

**Faux.**

Faux. $EL$ n'a aucune raison d'être égal à $EK$ : écris l'égalité des rapports.

**Correction**

Les hypothèses sont vérifiées : $K$ est sur $[EF]$, $L$ sur $[EG]$ et $(KL)$ est parallèle à $(FG)$.

D'après la propriété des longueurs proportionnelles, $\dfrac{EK}{EF} = \dfrac{EL}{EG}$, soit $\dfrac{4}{10} = \dfrac{EL}{15}$. Par l'égalité des produits en croix :

$$10 \times EL = 4 \times 15 = 60.$$

Donc $EL = 6$ cm.

## Attention et Coin devoir

**Attention : un morceau sur le côté entier**

Dans l'égalité des rapports, on divise un côté du petit triangle par le côté **entier** du grand triangle.

Par exemple, avec $AM = 3$ cm et $MB = 4$ cm, le côté entier mesure $AB = 3 + 4 = 7$ cm. Le bon rapport est $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{3}{7}$, et non $\dfrac{3}{4}$. Le rapport $\dfrac{AM}{MB}$ n'est pas celui de la propriété.

**Remarque : Coin devoir**

En devoir, un calcul de longueur se rédige aussi en trois temps : On sait que, Or, Donc. Voici une rédaction modèle, pour la rampe :

« On sait que, dans le triangle $ABC$, $M$ est sur $[AB]$, $N$ est sur $[AC]$ et $(MN)$ est parallèle à $(BC)$ (deux droites perpendiculaires au sol $(AB)$). Or, d'après la propriété des longueurs proportionnelles, $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{MN}{BC}$, soit $\dfrac{3}{5} = \dfrac{MN}{2}$. Donc $MN = \dfrac{3 \times 2}{5} = 1{,}2$ m. »

Les hypothèses d'abord, la propriété ensuite, le calcul à la fin.

**À toi : deux longueurs**

Dans un triangle $RST$, $U$ est sur $[RS]$ et $V$ sur $[RT]$, avec $(UV)$ parallèle à $(ST)$. On sait que $RU = 6$ cm, $US = 2$ cm, $RV = 4{,}5$ cm et $ST = 10$ cm. Calcule $RT$, puis $UV$.

**Indice 1**

Les hypothèses de la propriété des longueurs proportionnelles sont vérifiées : écris l'égalité des trois rapports.

**Indice 2**

Calcule d'abord le côté entier $RS = RU + US$. Garde ensuite deux rapports à la fois, avec les produits en croix.

**Indice 3**

Point délicat : le rapport utile est $\dfrac{RU}{RS}$, et non $\dfrac{RU}{US}$.

**Réponse**

**Le côté entier $[RS]$.** Le point $U$ est sur $[RS]$, donc $RS = RU + US = 6 + 2 = 8$ cm.

**Les rapports.** Les hypothèses sont vérifiées : $U$ est sur $[RS]$, $V$ sur $[RT]$ et $(UV)$ est parallèle à $(ST)$. D'après la propriété des longueurs proportionnelles :

$$\frac{RU}{RS} = \frac{RV}{RT} = \frac{UV}{ST}.$$

Avec les longueurs connues :

$$\frac{6}{8} = \frac{4{,}5}{RT} = \frac{UV}{10}.$$

**Calcul de $RT$.** Avec les deux premiers rapports et l'égalité des produits en croix, $6 \times RT = 8 \times 4{,}5 = 36$, donc $RT = 6$ cm.

**Calcul de $UV$.** Avec le premier et le dernier rapport, $8 \times UV = 6 \times 10 = 60$, donc $UV = 7{,}5$ cm.

**Conclusion.** Le côté $[RT]$ mesure $6$ cm et le segment $[UV]$ mesure $7{,}5$ cm.

## Partager un segment

### En deux, en quatre

Nadia veut découper une bande de papier de $10$ cm en trois morceaux de même longueur. Elle prend sa règle graduée.

Mais chaque morceau mesurerait $10 \div 3 = 3{,}333\ldots$ cm. Aucune graduation ne tombe juste.

**Devine : En quatre morceaux**

Commence par un cas plus simple. Tu veux partager un segment $[AB]$ de $10$ cm en **quatre** segments de même longueur, sans lire de graduation. Quelle construction convient ?

**A.** Le milieu $I$ de $[AB]$, puis les milieux de $[AI]$ et de $[IB]$

**Juste.**

Oui. Chaque moitié est coupée en deux : tu obtiens quatre quarts.

**B.** Trois points placés à vue d'œil, à peu près régulièrement

**Faux.**

Faux. À vue d'œil, les morceaux ne sont pas exactement égaux.

**C.** Le milieu $I$ de $[AB]$, puis le milieu de $[AI]$ seulement

**Faux.**

Faux. Tu obtiens trois morceaux, qui n'ont pas tous la même longueur.

**D.** Trois arcs de compas de rayon $3$ cm, à partir de $A$

**Faux.**

Faux. Trois reports de $3$ cm font $9$ cm : le dernier morceau mesure $1$ cm.

**Correction**

On construit le milieu $I$ de $[AB]$ : $AI = IB = 5$ cm. On construit ensuite le milieu $J$ de $[AI]$ et le milieu $K$ de $[IB]$. Les quatre segments $[AJ]$, $[JI]$, $[IK]$ et $[KB]$ mesurent chacun $2{,}5$ cm.

Pour trois morceaux, les milieux ne suffisent pas : il faut une autre idée.

### En trois, avec des parallèles

L'idée est de reporter des longueurs faciles sur une autre demi-droite, puis de les ramener sur $[AB]$ avec des parallèles. Une **demi-droite** $[AE)$ est la partie de la droite $(AE)$ qui commence en $A$ et passe par $E$, sans s'arrêter.

**Méthode : partager un segment en morceaux égaux**

Pour partager un segment $[AB]$ en $n$ segments de même longueur :

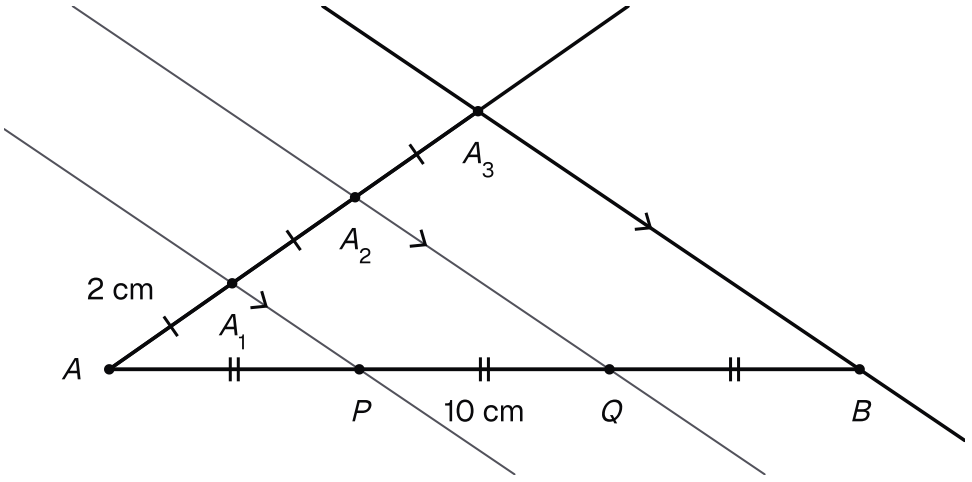
1. **Tracer** une demi-droite d'origine $A$ qui ne porte pas $B$.
2. **Reporter** au compas, sur cette demi-droite et à partir de $A$, $n$ segments de même longueur. Tu obtiens les points $A_1$, $A_2$, jusqu'à $A_n$.
3. **Tracer** la droite $(A_nB)$.
4. **Tracer**, à l'équerre, les parallèles à $(A_nB)$ qui passent par $A_1$, $A_2$, jusqu'à $A_{n-1}$. Elles coupent $[AB]$ en des points qui le partagent en $n$ segments de même longueur.

**Exemple : la bande de Nadia**

Nadia trace $[AB]$ avec $AB = 10$ cm, puis une demi-droite d'origine $A$. Au compas, elle y reporte trois fois $2$ cm : $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = 2$ cm.

Elle trace $(A_3B)$, puis les parallèles à $(A_3B)$ passant par $A_1$ et $A_2$. Elles coupent $[AB]$ en $P$ et $Q$.

Les segments $[AP]$, $[PQ]$ et $[QB]$ ont la même longueur, $\frac{10}{3}$ cm, sans aucune graduation à lire.




**La bande de Nadia partagée en trois : trois reports de 2 cm au compas, la droite (A3B), puis deux parallèles qui marquent P et Q sur [AB].**

## Pourquoi ça marche

**Vérifie : Quelle propriété ?**

Dans la construction de Nadia, quelle propriété justifie que $AP = \dfrac{AB}{3}$ ?

**A.** La propriété de la droite des milieux

**Faux.**

Faux. Ni $A_1$ ni $P$ n'est un milieu.

**B.** La propriété de la parallèle par un milieu

**Faux.**

Faux. $A_1$ n'est pas le milieu de $[AA_3]$ : il est au tiers.

**C.** La propriété des longueurs proportionnelles

**Juste.**

Oui. Dans le triangle $AA_3B$, la parallèle $(A_1P)$ découpe des longueurs proportionnelles.

**D.** Une propriété du parallélogramme

**Faux.**

Faux. Aucun parallélogramme n'intervient dans ce raisonnement.

**Correction**

Dans le triangle $AA_3B$, $A_1$ est sur $[AA_3]$, $P$ est sur $[AB]$ et $(A_1P)$ est parallèle à $(A_3B)$. C'est donc la propriété des longueurs proportionnelles qui s'applique. Le détail du calcul suit.

**Le point $P$.** Dans le triangle $AA_3B$, $A_1$ est sur $[AA_3]$, $P$ sur $[AB]$ et $(A_1P)$ est parallèle à $(A_3B)$. D'après la propriété des longueurs proportionnelles :

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AA_1}{AA_3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Donc $AP = \dfrac{10}{3}$ cm.

**Le point $Q$.** De même, avec la parallèle $(A_2Q)$ :

$$\frac{AQ}{AB} = \frac{AA_2}{AA_3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Donc $AQ = \dfrac{20}{3}$ cm.

**Les trois morceaux.** On en déduit $PQ = \dfrac{20}{3} - \dfrac{10}{3} = \dfrac{10}{3}$ cm et $QB = 10 - \dfrac{20}{3} = \dfrac{10}{3}$ cm. Les trois morceaux ont bien la même longueur.

**À toi : en cinq morceaux**

Partage un segment $[CD]$ de 7 cm en cinq segments de même longueur. Décris ta construction. Donne ensuite la longueur de chaque morceau, en la justifiant.

**Indice 1**

Suis la méthode avec $n = 5$ : une demi-droite d'origine $C$, cinq reports au compas, puis des parallèles.

**Indice 2**

Choisis une longueur facile à reporter au compas, par exemple $1$ cm. Combien de fois la reportes-tu ? Quelle droite traces-tu ensuite ?

**Indice 3**

Point délicat : dans le triangle $CC_5D$, le rapport vaut $\dfrac{CC_1}{CC_5} = \dfrac{1}{5}$, quelle que soit la longueur reportée.

**Réponse**

**Construction.** On trace une demi-droite d'origine $C$ qui ne porte pas $D$. On y reporte cinq fois $1$ cm : on obtient $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ et $C_5$. On trace $(C_5D)$, puis les parallèles à $(C_5D)$ par $C_1$, $C_2$, $C_3$ et $C_4$.

**Justification.** Ces parallèles coupent $[CD]$ en $P_1$, $P_2$, $P_3$ et $P_4$. Dans le triangle $CC_5D$, $C_1$ est sur $[CC_5]$, $P_1$ sur $[CD]$ et $(C_1P_1)$ est parallèle à $(C_5D)$. D'après la propriété des longueurs proportionnelles :

$$\frac{CP_1}{CD} = \frac{CC_1}{CC_5} = \frac{1}{5}.$$

Donc $CP_1 = \dfrac{7}{5} = 1{,}4$ cm.

De même, $CP_2 = \dfrac{2 \times 7}{5} = 2{,}8$ cm, $CP_3 = 4{,}2$ cm et $CP_4 = 5{,}6$ cm. Deux points voisins sont donc toujours séparés de $1{,}4$ cm.

**Conclusion.** Les cinq morceaux mesurent donc chacun $1{,}4$ cm.

Tu sais maintenant partager un segment en autant de morceaux que tu veux, avec une règle, un compas et une équerre. Pour deux ou quatre morceaux, les milieux suffisent.

## Bilan : choisir la bonne propriété

## Choisir la bonne propriété

Tu connais maintenant trois propriétés du triangle. Pour chaque question, la bonne propriété dépend de ce que tu sais et de ce que tu cherches. Commence toujours par les écrire.

**Vérifie : Que faut-il citer ?**

Dans un triangle $ABC$, $M$ est sur $[AB]$ et $N$ sur $[AC]$, avec $(MN)$ parallèle à $(BC)$. On sait que $AM = 3$ cm, $AB = 7$ cm et $BC = 14$ cm.

On cherche $MN$. Quelle propriété faut-il citer ?

**A.** La propriété de la droite des milieux
**Faux.**

Faux. $M$ n'est pas le milieu de $[AB]$ : 3 n'est pas la moitié de 7.

**B.** La propriété de la parallèle par un milieu

**Faux.**

Faux. Elle conclut à un milieu. Ici, on cherche une longueur et on ne connaît aucun milieu.

**C.** Aucune, il faut mesurer $MN$

**Faux.**

Faux. Une mesure ne démontre rien : une propriété du cours suffit.

**D.** La propriété des longueurs proportionnelles

**Juste.**

Oui. Des points sur les côtés, une parallèle, une longueur à calculer.

**Correction**

On sait que $M$ est sur $[AB]$, $N$ sur $[AC]$ et $(MN)$ parallèle à $(BC)$. On cherche une longueur, et $M$ n'est pas un milieu.

On cite donc la propriété des longueurs proportionnelles : $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$, soit $\frac{3}{7} = \frac{MN}{14}$, donc $MN = 6$ cm.

Voici le tableau à garder sous les yeux.

| Ce que je sais | Ce que je cherche | « la propriété de… » |
|---|---|---|
| deux milieux de deux côtés | un parallélisme ou une longueur | la droite des milieux |
| un milieu et une parallèle à un deuxième côté | un milieu | la parallèle par un milieu |
| deux points sur deux côtés et une parallèle au troisième | une longueur | des longueurs proportionnelles |

## Deux parallèles, deux propriétés

**Exemple : un milieu ou pas**

Dans un triangle $ABC$, on a $AB = 12$ cm, $AC = 9$ cm et $BC = 15$ cm. Deux droites parallèles à $(BC)$ coupent $[AB]$ et $[AC]$.

- La première passe par le milieu $I$ de $[AB]$ et coupe $[AC]$ en $J$. D'après la propriété de la parallèle par un milieu, $J$ est le milieu de $[AC]$ : $AJ = 4{,}5$ cm.
- La seconde passe par le point $K$ de $[AB]$ tel que $AK = 4$ cm, qui n'est pas un milieu, et coupe $[AC]$ en $L$. D'après la propriété des longueurs proportionnelles, $\frac{AK}{AB} = \frac{AL}{AC}$, soit $\frac{4}{12} = \frac{AL}{9}$. Donc $12 \times AL = 4 \times 9 = 36$ et $AL = 3$ cm.

**Vérifie : Quelle conclusion ?**

Dans un triangle $DEF$, $G$ est le milieu de $[DE]$ et $H$ est le milieu de $[DF]$. On sait que $EF = 13$ cm. Quelle conclusion est juste ?

**A.** $(GH)$ est parallèle à $(EF)$ et $GH = 6{,}5$ cm

**Juste.**

Oui. Deux milieux : c'est la propriété de la droite des milieux.

**B.** $(GH)$ est parallèle à $(EF)$ et $GH = 26$ cm

**Faux.**

Faux. Le segment des milieux mesure la moitié du troisième côté, pas le double.

**C.** $(GH)$ est perpendiculaire à $(EF)$ et $GH = 6{,}5$ cm

**Faux.**

Faux. La propriété conclut au parallélisme.

**D.** $(GH)$ est parallèle à $(DE)$ et $GH = 6{,}5$ cm

**Faux.**

Faux. $(GH)$ est parallèle au troisième côté, $[EF]$ : celui qui ne contient aucun des deux milieux.

**Correction**

Dans le triangle $DEF$, $G$ et $H$ sont les milieux de $[DE]$ et $[DF]$. D'après la propriété de la droite des milieux, $(GH)$ est parallèle à $(EF)$ et $GH = \dfrac{EF}{2} = \dfrac{13}{2} = 6{,}5$ cm.

## Coin devoir et À toi

**Remarque : Coin devoir**

En devoir, les questions s'enchaînent : la réponse d'une question sert à la suivante. Écris chaque conclusion en entier, pour pouvoir la réutiliser. Voici une rédaction modèle en deux questions.

« Question 1 : On sait que, dans le triangle $ABC$, $I$ est le milieu de $[AB]$, et que la droite qui passe par $I$ et qui est parallèle à $(BC)$ coupe $[AC]$ en $J$. Or, d'après la propriété de la parallèle par un milieu, cette droite coupe $[AC]$ en son milieu. Donc $J$ est le milieu de $[AC]$. »

« Question 2 : On sait que, dans le triangle $ABC$, $I$ (énoncé) et $J$ (question 1) sont les milieux de $[AB]$ et $[AC]$. Or, d'après la propriété de la droite des milieux, $IJ$ est la moitié de $BC$. Donc $IJ = \dfrac{BC}{2}$. »

**À toi : le bilan**

Trace un triangle $ABC$ avec $AB = 8$ cm, $AC = 10$ cm et $BC = 6$ cm. Soit $M$ le milieu de $[AB]$. La parallèle à $(BC)$ passant par $M$ coupe $[AC]$ en $N$.

Soit $P$ le point de $[AB]$ tel que $AP = 2$ cm. La parallèle à $(BC)$ passant par $P$ coupe $[AC]$ en $Q$.

Calcule $MN$, puis $AQ$ et $PQ$.

**Indice 1**
Pour $MN$, écris ce que tu sais : un milieu et une parallèle. Pour $AQ$ et $PQ$, le point $P$ n'est pas un milieu.

**Indice 2**
Pour $MN$, que peux-tu dire du point $N$ ? Pour $AQ$ et $PQ$, écris l'égalité des trois rapports avec les côtés entiers.

**Indice 3**
Point délicat : $\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$. Prends le côté entier $AB$, et non $PB$.

**Réponse**
**Le point $N$.** Dans le triangle $ABC$, $M$ est le milieu de $[AB]$ et $(MN)$ est parallèle à $(BC)$. D'après la propriété de la parallèle par un milieu, $N$ est le milieu de $[AC]$.

**La longueur $MN$.** Ainsi, $M$ et $N$ sont les milieux de $[AB]$ et $[AC]$. D'après la propriété de la droite des milieux, $MN = \dfrac{BC}{2} = 3$ cm.

**Les longueurs $AQ$ et $PQ$.** Le point $P$ est sur $[AB]$, $Q$ sur $[AC]$ et $(PQ)$ est parallèle à $(BC)$. D'après la propriété des longueurs proportionnelles :

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC}.$$

Avec les longueurs connues :

$$\frac{2}{8} = \frac{AQ}{10} = \frac{PQ}{6}.$$

Par l'égalité des produits en croix, $AQ = \dfrac{2 \times 10}{8} = 2{,}5$ cm et $PQ = \dfrac{2 \times 6}{8} = 1{,}5$ cm.

**Conclusion.** On trouve $MN = 3$ cm, $AQ = 2{,}5$ cm et $PQ = 1{,}5$ cm.

Bravo pour ce parcours. Tu sais maintenant démontrer un parallélisme, trouver un milieu, calculer une longueur et partager un segment. Les exercices t'attendent pour t'entraîner.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Triangle : milieux et parallèles » (2ac · general · mathematiques)