BURHAN

Résumé : Les équations

2ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/equations/resume

Chapitre	Semestre
Les équations	Semestre 2

Équation et solution

Définition : Équation, inconnue, solution

Une **équation** est une égalité dans laquelle figure un nombre inconnu, désigné par une lettre, par exemple x. Cette lettre s'appelle l'**inconnue**.

L'égalité a deux **membres** : le membre de gauche et le membre de droite du signe $=$.

Un nombre est une **solution** de l'équation lorsque l'égalité est vraie quand on remplace l'inconnue par ce nombre. **Résoudre** une équation, c'est trouver toutes ses solutions.

Remarque : En clair

Une équation pose une question : pour quelle valeur de l'inconnue les deux membres sont-ils égaux ?

Tester un nombre, c'est vérifier. Résoudre, c'est trouver toutes les valeurs qui conviennent.

Exemple : tester deux nombres

Le nombre 4 est-il solution de $5x - 3 = 2x + 9$?

- Membre de gauche : $5 \times 4 - 3 = 17$.
- Membre de droite : $2 \times 4 + 9 = 17$.

Les deux membres sont égaux : 4 est une solution.

Avec 2, on trouve $5 \times 2 - 3 = 7$ et $2 \times 2 + 9 = 13$. Les résultats sont différents : 2 n'est pas une solution.

Méthode : tester un nombre

1. **Calculer** le membre de gauche en remplaçant l'inconnue par le nombre.
2. **Calculer** le membre de droite de la même façon.
3. **Conclure** : deux résultats égaux, le nombre est solution ; deux résultats différents, il ne l'est pas.

Les règles des égalités

Propriété : Ajouter ou retrancher un même nombre

Soit c un nombre rationnel. Si l'on **ajoute** c aux deux membres d'une équation, on obtient une équation qui a exactement les mêmes solutions. Il en est de même si l'on **retranche** c aux deux membres.

Ainsi, un terme peut passer d'un membre à l'autre, à condition de **changer son signe**.

Propriété : Multiplier ou diviser par un même nombre non nul

Soit c un nombre rationnel **non nul**. Si l'on **multiplie** les deux membres d'une équation par c, on obtient une équation qui a exactement les mêmes solutions. Il en est de même si l'on **divise** les deux membres par c.

Remarque : En clair

Une équation garde les mêmes solutions si tu fais la même opération sur ses deux membres. Tu peux ajouter, retrancher, multiplier ou diviser.

Une seule exception : on ne multiplie pas et on ne divise pas par 0.

Exemple : une règle, une ligne

Pour $x - 7{,}5 = 2$, on ajoute $7{,}5$ aux deux membres :

$$x = 2 + 7{,}5$$
$$x = 9{,}5$$

Vérification : $9{,}5 - 7{,}5 = 2$. La solution de l'équation est $9{,}5$.

Pour $\frac{x}{6} = -2$, on multiplie les deux membres par 6, qui n'est pas nul : $x = -12$.

Vérification : $\frac{-12}{6} = -2$. La solution de l'équation est -12.

Remarque : Pourquoi jamais par zéro ?

Multiplie les deux membres de $x + 1 = 3$ par 0 : tu obtiens $0 = 0$.

Cette égalité est vraie quel que soit le nombre choisi. Elle ne dit plus rien sur l'inconnue : la règle exige un nombre non nul.

Attention : un terme change de membre, il change de signe

✗ De $x - 6 = 11$, écrire $x = 11 - 6$.

✓ On ajoute 6 aux deux membres : $x = 11 + 6$, soit $x = 17$.

Vérification : $17 - 6 = 11$. La solution de l'équation est 17.

Le terme -6 change de membre : il devient $+6$.

Résoudre une équation du premier degré

Définition : Équation du premier degré à une inconnue

Soit a et b deux nombres rationnels, avec $a \neq 0$. L'équation $ax = b$, d'inconnue x, est une **équation du premier degré à une inconnue**.

On donne aussi ce nom à toute équation que les règles de calcul permettent d'écrire sous cette forme, par exemple $3x - 5 = x + 1$.

Les nombres a et b peuvent être des entiers relatifs, des nombres décimaux ou des fractions.

Propriété : Solution de l'équation ax = b

Soit a et b deux nombres rationnels, avec $a \neq 0$. L'équation $ax = b$ a une solution, et une seule : le nombre $\frac{b}{a}$.

On rédige : « La solution de l'équation est $\frac{b}{a}$. »

Retrancher le même nombre

$$x + a = b$$
$$\text{donne } x = b - a$$

Ajouter le même nombre

$$x - a = b$$
$$\text{donne } x = b + a$$

Diviser par un nombre non nul

$$ax = b,\ a \neq 0$$
$$\text{donne } x = \frac{b}{a}$$

Multiplier par un nombre non nul

$$\frac{x}{a} = b,\ a \neq 0$$
$$\text{donne } x = ab$$

Méthode : résoudre pas à pas

1. **Développer** et réduire chaque membre, si besoin.
2. **Rassembler** les termes en x dans un membre et les nombres dans l'autre.
3. **Diviser** les deux membres par le **coefficient** de x, le nombre qui multiplie x ; il n'est pas nul.
4. **Vérifier** en remplaçant x dans l'équation de départ.
5. **Rédiger** la conclusion : « La solution de l'équation est … ».

Exemple : l'inconnue des deux côtés

Résolvons $7x + 4 = 3x - 8$.

On retranche $3x$, puis 4, aux deux membres. Le coefficient 4 n'est pas nul : chaque membre est divisé par 4.

$$\begin{aligned} 4x + 4 &= -8 \\ 4x &= -12 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

Vérification : $7 \times (-3) + 4 = -17$ et $3 \times (-3) - 8 = -17$.

La solution de l'équation est -3.

Exemple : un coefficient décimal

Résolvons $2{,}5x + 1 = 9$.

On retranche 1 aux deux membres. Comme $2{,}5$ n'est pas nul, chaque membre est ensuite divisé par $2{,}5$:

$$\begin{aligned} 2{,}5x &= 8 \\ x &= \frac{8}{2{,}5} = 3{,}2 \end{aligned}$$

Vérification : $2{,}5 \times 3{,}2 + 1 = 9$.

La solution de l'équation est $3{,}2$.

Attention : le coefficient garde son signe

✗ De $-5x = 20$, écrire $x = 4$.

✓ On divise les deux membres par -5, qui n'est pas nul : $x = \frac{20}{-5}$, soit $x = -4$.

Vérification : $-5 \times (-4) = 20$. La solution de l'équation est -4.

Le coefficient -5 garde son signe pendant la division.

Remarque : Bien rédiger

Écris une ligne par transformation, avec la règle employée.

Termine par la vérification dans l'équation de départ, puis par la phrase de conclusion.

Donne la solution sous forme d'entier, de décimal ou de fraction irréductible.

Équations à coefficients fractionnaires

Méthode : faire disparaître les fractions

1. **Trouver** un **dénominateur commun** : le plus petit nombre multiple de tous les dénominateurs.
2. **Multiplier** par ce nombre chaque terme, à gauche et à droite, puis simplifier.
3. **Résoudre** l'équation à coefficients entiers obtenue, puis vérifier et conclure.

Exemple : trois dénominateurs

Résolvons $\frac{3}{4}x - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}x$.

Les dénominateurs sont 4, 3 et 2 : on choisit 12. On multiplie chaque terme par 12, qui n'est pas nul :

$$9x - 4 = 6x$$

On retranche $6x$ aux deux membres, puis on leur ajoute 4. Chaque membre est enfin divisé par 3, qui n'est pas nul :

$$\begin{aligned} 3x - 4 &= 0 \\ 3x &= 4 \\ x &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Vérification : $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ et $\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$.

La solution de l'équation est $\frac{4}{3}$.

Remarque : Autre voie : calculer avec les fractions

Pour $\frac{3}{4}x = \frac{9}{2}$, divise les deux membres par $\frac{3}{4}$, c'est-à-dire multiplie-les par $\frac{4}{3}$.

On obtient $x = \frac{9}{2} \times \frac{4}{3} = 6$.

Vérification : $\frac{3}{4} \times 6 = \frac{9}{2}$. La solution de l'équation est 6.

Exemple : des décimaux ramenés à des entiers

Résolvons $0{,}4x - 1{,}5 = 0{,}1x$.

On multiplie chaque terme par 10, qui n'est pas nul :

$$4x - 15 = x$$

On retranche x aux deux membres, puis on leur ajoute 15. Chaque membre est enfin divisé par 3, qui n'est pas nul :

$$\begin{aligned} 3x - 15 &= 0 \\ 3x &= 15 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Vérification : $0{,}4 \times 5 - 1{,}5 = 0{,}5$ et $0{,}1 \times 5 = 0{,}5$.

La solution de l'équation est 5.

Attention : aucun terme n'est oublié

✗ De $\frac{x}{5} - 2 = 1$, écrire $x - 2 = 5$.

✓ On multiplie chaque terme par 5 : $x - 10 = 5$. On ajoute 10 aux deux membres : $x = 15$.

Vérification : $\frac{15}{5} - 2 = 1$. La solution de l'équation est 15.

Le terme -2 n'a pas de fraction : il est multiplié lui aussi.

Se ramener au premier degré

Remarque : Rappel du calcul littéral

Distributivité : $k(a + b) = ka + kb$.

Double distributivité :

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Méthode : développer d'abord

1. **Développer** chaque produit, avec prudence devant un signe moins.
2. **Réduire** chaque membre. Un même terme en x^2 présent dans les deux membres se retranche : il disparaît.
3. **Résoudre** l'équation du premier degré qui reste, puis vérifier et conclure.

Exemple : des parenthèses

Résolvons $4 - (3x - 5) = 2(x + 1) - 3$.

À gauche, le moins change les signes de la parenthèse : $4 - 3x + 5$, soit $9 - 3x$.

À droite, on développe : $2x + 2 - 3$, soit $2x - 1$.

L'équation devient $9 - 3x = 2x - 1$. On ajoute $3x$, puis 1, aux deux membres. Chaque membre est enfin divisé par 5, qui n'est pas nul :

$$\begin{aligned} 9 &= 5x - 1 \\ 10 &= 5x \\ 2 &= x \end{aligned}$$

Vérification : $4 - (6 - 5) = 3$ et $2 \times 3 - 3 = 3$.

La solution de l'équation est 2.

Exemple : le terme en x² disparaît

Résolvons $(x+3)(x-2)=x^2+4$.

Par la double distributivité, le membre de gauche vaut $x^2-2x+3x-6$, soit x^2+x-6.

On retranche x^2 aux deux membres, puis on leur ajoute 6 :

$$\begin{aligned} x^2+x-6 &= x^2+4 \\ x-6 &= 4 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Vérification : $(10+3)\times(10-2)=13\times 8=104$ et $10^2+4=104$.

La solution de l'équation est 10.

Remarque : Quand l'inconnue disparaît

Parfois, tous les termes en x s'annulent.

Pour $x+4=x+1$, on retranche 4 aux deux membres : $x=x-3$. On retranche x aux deux membres : $0x=-3$. Or $0x$ vaut toujours 0 : aucun nombre n'est solution.

Pour $2(x-1)=2x-2$, on développe : $2x-2=2x-2$. On retranche $2x$ aux deux membres, puis on leur ajoute 2 : $0x=0$. Cette égalité est vraie pour tout nombre : tout nombre est solution.

Attention : le moins devant une parenthèse

✗ $7-(x+2)=7-x+2$.

✓ $7-(x+2)=7-x-2$, soit $5-x$.

Le moins devant la parenthèse change le signe de chaque terme : x devient $-x$ et 2 devient -2.

Mettre un problème en équation

Méthode : du texte à l'équation

1. **Nommer** l'inconnue par une phrase, avec son unité : « Soit x le nombre de … ».
2. **Traduire** chaque information de l'énoncé, puis écrire l'équation.
3. **Résoudre** l'équation et la vérifier.
4. **Contrôler** que la solution a du sens dans le problème.
5. **Répondre** à la question posée par une phrase.

Exemple : une location de vélo

Louer un vélo coûte 20 dirhams, plus 8 dirhams par heure. Nadia paie 52 dirhams. Combien d'heures a-t-elle roulé ?

Soit x le nombre d'heures. Le prix s'écrit $20 + 8x$, donc $20 + 8x = 52$.

On retranche 20 aux deux membres. Ensuite, chaque membre est divisé par 8, qui n'est pas nul :

$$8x = 32$$
$$x = 4$$

Vérification : $20 + 8 \times 4 = 52$. La solution de l'équation est 4.

Nadia a roulé pendant 4 heures.

Exemple : des fractions dans un problème

Samir a lu le tiers d'un livre, puis 40 pages de plus. Il en est alors à la moitié du livre. Combien de pages compte ce livre ?

Soit x le nombre de pages. On traduit : $\frac{x}{3} + 40 = \frac{x}{2}$.

On multiplie chaque terme par 6, qui n'est pas nul, puis on retranche $2x$ aux deux membres :

$$2x + 240 = 3x$$
$$240 = x$$

Vérification : $\frac{240}{3} + 40 = 120$ et $\frac{240}{2} = 120$. La solution de l'équation est 240.

C'est un entier positif, il convient. Le livre compte 240 pages.

Attention : la solution doit avoir du sens

Un nombre de places ou de personnes est un entier positif. Si tu trouves $12{,}5$ personnes, reprends ta mise en équation et tes calculs.

Écris aussi l'unité dans la réponse : heures, pages, dirhams.

Méthode : Quelle méthode pour quelle équation ?

- Un nombre à tester : **calculer** chaque membre avec ce nombre, puis comparer.
- La forme $x + a = b$: **retrancher** a aux deux membres.
- La forme $ax = b$, avec $a \neq 0$: **diviser** les deux membres par a.
- L'inconnue dans les deux membres : **rassembler** les termes en x d'un côté, les nombres de l'autre.
- Des fractions : **multiplier** chaque terme par un dénominateur commun.

- Des décimaux : **multiplier** chaque terme par 10 ou par 100.
- Des parenthèses ou des produits : **développer**, puis réduire chaque membre.
- Un problème : **nommer** l'inconnue, traduire, résoudre, vérifier, répondre.