BURHAN

Les équations : exercices, niveau examen

2ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/equations/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Les équations	Niveau examen	5

Exercice 1 — 5 pts

Développer, puis résoudre

1. — 1,5 pts

Développe et réduis l'expression $A = (x+2)(x-5)$.

INDICE

Outil : double distributivité, quatre produits, puis réduction des termes en x.

CORRIGÉ

On applique la double distributivité, ce qui donne quatre produits, puis on regroupe les termes en x :

$$\begin{aligned} A &= x^2 - 5x + 2x - 10 \\ &= x^2 - 3x - 10 \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout nombre x : $A = x^2 - 3x - 10$.

2. — 2 pts

En déduire la solution de l'équation $(x+2)(x-5) = x^2 + 2$.

INDICE

Ensuite : remplace le membre de gauche par la forme réduite de A ; le terme x^2 figure dans les deux membres, retranche-le.

CORRIGÉ

Remplacer. D'après la question 1, l'équation s'écrit :

$$x^2 - 3x - 10 = x^2 + 2$$

Supprimer x^2. On retranche x^2 aux deux membres, puis on ajoute 10 aux deux membres :

$$\begin{aligned} -3x - 10 &= 2 \\ -3x &= 12 \end{aligned}$$

Isoler x. On divise les deux membres par -3, qui n'est pas nul :

$$x = -4$$

Vérification. Membre de gauche : $(-4+2) \times (-4-5) = (-2) \times (-9) = 18$.

Membre de droite : $(-4)^2 + 2 = 16 + 2 = 18$.

Conclusion. La solution de l'équation est -4.

3. 1,5 pts

Le nombre trouvé à la question 2 est-il aussi une solution de $3x + 7 = -x - 9$?

INDICE

Outil : calcule chaque membre avec $x = -4$, puis compare.

CORRIGÉ

On remplace x par -4 dans chaque membre de l'équation $3x + 7 = -x - 9$.

Membre de gauche : $3 \times (-4) + 7 = -12 + 7 = -5$.

Membre de droite : $-(-4) - 9 = 4 - 9 = -5$.

Conclusion. Les deux membres valent -5 : -4 est aussi une solution de $3x + 7 = -x - 9$.

Exercice 2 5 pts

Une collection de timbres

Yasmine collectionne les timbres. Les deux cinquièmes de sa collection sont des timbres marocains. Le quart vient d'Europe. Les 42 autres timbres viennent d'autres pays.

On note x le nombre total de timbres de la collection.

1. 1 pts

Écris, à l'aide de x, le nombre de timbres marocains, puis celui des timbres d'Europe.

INDICE

Outil : les deux cinquièmes de x s'écrivent $\frac{2}{5}x$.

CORRIGÉ

Les deux cinquièmes de x s'écrivent $\frac{2}{5}x$. Le quart de x s'écrit $\frac{1}{4}x$.

Conclusion. La collection compte $\frac{2}{5}x$ timbres marocains et $\frac{1}{4}x$ timbres d'Europe.

2. 1 pts

Explique pourquoi x vérifie l'équation $\frac{2}{5}x + \frac{1}{4}x + 42 = x$.

INDICE

Début : les trois groupes de timbres forment toute la collection.

CORRIGÉ

La collection se partage en trois groupes : $\frac{2}{5}x$ timbres marocains, $\frac{1}{4}x$ timbres d'Europe et 42 autres timbres.

Réunis, ces trois groupes forment toute la collection, c'est-à-dire x timbres.

Conclusion. Le nombre x vérifie donc l'équation :

$$\frac{2}{5}x + \frac{1}{4}x + 42 = x$$

3. 2 pts

Résous cette équation.

INDICE

Outil : 20 est le plus petit multiple commun de 5 et de 4.

CORRIGÉ

Chasser les dénominateurs. Le nombre 20 est un multiple de 5 et de 4. On multiplie chaque terme par 20, qui n'est pas nul : $20 \times \dfrac{2}{5} = 8$ et $20 \times \dfrac{1}{4} = 5$.

$$8x + 5x + 840 = 20x$$

Regrouper les termes en x. On réduit le membre de gauche, puis on retranche $13x$ aux deux membres :

$$\begin{aligned} 13x + 840 &= 20x \\ 840 &= 7x \end{aligned}$$

Isoler x. On divise les deux membres par 7, qui n'est pas nul :

$$x = 120$$

Vérification. $\dfrac{2}{5} \times 120 + \dfrac{1}{4} \times 120 + 42 = 48 + 30 + 42 = 120$.

Conclusion. La solution de l'équation est 120.

4. 1 pts

En déduire le nombre de timbres marocains et le nombre de timbres d'Europe.

INDICE

Ensuite : remplace x par la solution dans les expressions de la question 1.

CORRIGÉ

La collection compte 120 timbres. C'est un entier positif : la solution convient.

Timbres marocains : $\dfrac{2}{5} \times 120 = 48$.

Timbres d'Europe : $\dfrac{1}{4} \times 120 = 30$.

Conclusion. Yasmine possède 48 timbres marocains et 30 timbres d'Europe.

Exercice 3 — 5 pts

Deux réservoirs d'eau

Le premier réservoir contient 100 litres d'eau et se remplit de $12{,}5$ litres par minute. Au même instant, le second contient 400 litres et se vide de $7{,}5$ litres par minute.

1. — 1 pts

Calcule la quantité d'eau de chaque réservoir au bout de 2 minutes.

INDICE

Outil : en 2 minutes, le premier gagne $2 \times 12{,}5$ litres et le second perd $2 \times 7{,}5$ litres.

CORRIGÉ

En 2 minutes, le premier réservoir gagne $2 \times 12{,}5$ litres et le second perd $2 \times 7{,}5$ litres.

Premier réservoir : $100 + 2 \times 12{,}5 = 100 + 25 = 125$.

Second réservoir : $400 - 2 \times 7{,}5 = 400 - 15 = 385$.

Conclusion. Au bout de 2 minutes, le premier réservoir contient 125 litres et le second 385 litres.

2. — 1 pts

On note x le nombre de minutes écoulées. Exprime, à l'aide de x, la quantité d'eau de chaque réservoir.

INDICE

Début : reprends le calcul de la question 1 en remplaçant 2 par x.

CORRIGÉ

En x minutes, le premier réservoir gagne $12{,}5x$ litres et le second perd $7{,}5x$ litres.

Conclusion. Au bout de x minutes, le premier réservoir contient $100 + 12{,}5x$ litres et le second $400 - 7{,}5x$ litres.

3. 2 pts

Au bout de combien de minutes les deux réservoirs contiennent-ils la même quantité d'eau ?

INDICE

Point délicat : pour rassembler les termes en x, ajoute $7{,}5x$ aux deux membres.

CORRIGÉ

Les deux quantités d'eau sont égales quand :

$$100 + 12{,}5x = 400 - 7{,}5x$$

Regrouper les termes en x. On ajoute $7{,}5x$ aux deux membres, puis on retranche 100 aux deux membres :

$$\begin{aligned} 100 + 20x &= 400 \\ 20x &= 300 \end{aligned}$$

Isoler x. On divise les deux membres par 20, qui n'est pas nul :

$$x = \frac{300}{20} = 15$$

Vérification. Premier réservoir : $100 + 12{,}5 \times 15 = 100 + 187{,}5 = 287{,}5$.

Second réservoir : $400 - 7{,}5 \times 15 = 400 - 112{,}5 = 287{,}5$.

La solution de l'équation est 15.

Conclusion. Une durée est un nombre positif, et 15 l'est. Les deux réservoirs contiennent la même quantité d'eau au bout de 15 minutes.

4. 1 pts

En déduire la quantité d'eau commune aux deux réservoirs à cet instant.

INDICE

Ensuite : remplace x par 15 dans l'une des expressions de la question 2.

CORRIGÉ

On remplace x par 15 dans l'expression du premier réservoir : $100 + 12{,}5 \times 15 = 100 + 187{,}5 = 287{,}5$.

Le second réservoir donne la même valeur : $400 - 112{,}5 = 287{,}5$. Ce nombre est positif, donc ce réservoir n'est pas encore vide.

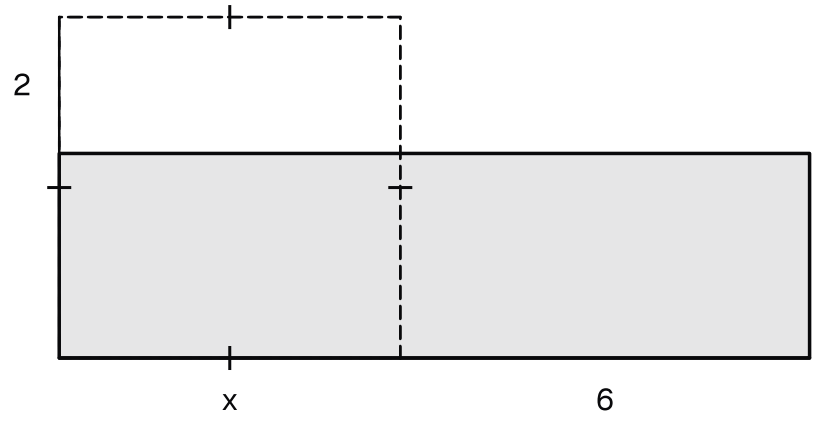
Conclusion. Chaque réservoir contient alors $287{,}5$ litres d'eau.

Exercice 4 5 pts

Un carré devenu rectangle

Un jardin a la forme d'un carré. On note x la longueur, en mètres, de son côté ; x est plus grand que 2.

On allonge deux côtés opposés de 6 mètres et on raccourcit les deux autres de 2 mètres : le jardin devient un rectangle.



Le jardin carré de côté x, en pointillés, et le rectangle obtenu : deux côtés allongés de 6 mètres, les deux autres raccourcis de 2 mètres.

1. 1 pts

Exprime, à l'aide de x, la longueur et la largeur du rectangle, puis l'aire du carré et l'aire du rectangle.

INDICE

Outil : l'aire d'un rectangle est le produit de sa longueur par sa largeur ; l'aire d'un carré de côté x est $x \times x$.

CORRIGÉ

Deux côtés sont allongés de 6 mètres : la longueur du rectangle est $x + 6$ mètres.

Les deux autres côtés sont raccourcis de 2 mètres : sa largeur est $x - 2$ mètres. Ce nombre est positif, car x est plus grand que 2.

L'aire du carré est $x \times x = x^2$ mètres carrés.

L'aire du rectangle est le produit de sa longueur par sa largeur.

Conclusion. Le rectangle mesure $x + 6$ mètres sur $x - 2$ mètres. L'aire du carré est x^2 mètres carrés et celle du rectangle est $(x + 6)(x - 2)$ mètres carrés.

2. 1 pts

Développe et réduis $(x+6)(x-2)$.

INDICE

Outil : double distributivité, quatre produits, puis réduction des termes en x.

CORRIGÉ

D'après la double distributivité, on obtient quatre produits, puis on regroupe les termes en x :

$$\begin{aligned}&(x+6)(x-2)\\&=x^2-2x+6x-12\\&=x^2+4x-12\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout nombre x : $(x+6)(x-2)=x^2+4x-12$.

3. 2 pts

L'aire du rectangle dépasse de 20 mètres carrés l'aire du carré. En déduire une équation vérifiée par x, puis la longueur du côté du carré.

INDICE

Début : l'aire du rectangle est égale à l'aire du carré augmentée de 20 ; écris le membre de gauche sous la forme réduite de la question 2.

CORRIGÉ

Mise en équation. L'aire du rectangle est égale à l'aire du carré augmentée de 20 :

$$(x+6)(x-2)=x^2+20$$

D'après la question 2, cette équation s'écrit :

$$x^2+4x-12=x^2+20$$

Isoler x. On retranche x^2 aux deux membres, puis on ajoute 12 aux deux membres :

$$\begin{aligned}4x-12&=20\\4x&=32\end{aligned}$$

On divise les deux membres par 4, qui n'est pas nul :

$$x=8$$

Vérification. Aire du rectangle : $(8+6)\times(8-2)=14\times6=84$.

Aire du carré augmentée de 20 : $8^2+20=64+20=84$.

La solution de l'équation est 8.

Conclusion. Le nombre 8 est plus grand que 2, et la largeur $8-2=6$ est positive : la solution convient. Le côté du carré mesure 8 mètres.

4. 1 pts

On fait la même transformation sur un autre jardin carré, et l'aire ne change pas. Quelle est la longueur du côté de ce carré ?

INDICE

Point délicat : cette fois, les deux aires sont égales ; réutilise la forme réduite de la question 2.

CORRIGÉ

Mise en équation. On note encore x la longueur du côté, en mètres. Les deux aires sont égales :

$$(x+6)(x-2) = x^2$$

D'après la question 2, cette équation s'écrit :

$$x^2 + 4x - 12 = x^2$$

Isoler x. On retranche x^2 aux deux membres, puis on ajoute 12 aux deux membres :

$$\begin{aligned} 4x - 12 &= 0 \\ 4x &= 12 \end{aligned}$$

On divise les deux membres par 4, qui n'est pas nul :

$$x = 3$$

Vérification. Aire du rectangle : $(3+6) \times (3-2) = 9 \times 1 = 9$.

Aire du carré : $3^2 = 9$.

La solution de l'équation est 3.

Conclusion. Le nombre 3 est plus grand que 2 : la solution convient. Le côté de ce carré mesure 3 mètres ; le rectangle mesure 9 mètres sur 1 mètre.

Exercice 5 5 pts

Une erreur dans une copie

Samir doit résoudre l'équation $5x - (2x - 7) = 2(x + 4)$. Voici sa copie.

- Ligne 1 : $5x - 2x - 7 = 2x + 8$
- Ligne 2 : $3x - 7 = 2x + 8$
- Ligne 3 : $x - 7 = 8$
- Ligne 4 : $x = 15$

Il conclut que la solution de l'équation est 15.

1. 1 pts

Le nombre 15 est-il une solution de l'équation $5x - (2x - 7) = 2(x + 4)$? Que peux-tu en conclure sur la copie de Samir ?

INDICE

Outil : calcule chaque membre avec $x = 15$, en commençant par les parenthèses, puis compare.

CORRIGÉ

On remplace x par 15 dans chaque membre, en calculant d'abord les parenthèses.

Membre de gauche : $5 \times 15 - (2 \times 15 - 7) = 75 - 23 = 52$.

Membre de droite : $2 \times (15 + 4) = 2 \times 19 = 38$.

Les deux membres ne sont pas égaux : on trouve 52 à gauche et 38 à droite.

Conclusion. Le nombre 15 n'est pas une solution de l'équation. La copie de Samir contient donc une erreur.

2. 1 pts

Trouve la ligne de la copie qui contient l'erreur et explique cette erreur.

INDICE

Point délicat : regarde le signe moins placé devant la parenthèse $(2x - 7)$.

CORRIGÉ

La ligne fausse. L'erreur est à la ligne 1. Pour supprimer une parenthèse précédée du signe moins, on change le signe de chacun de ses termes :

$$-(2x - 7) = -2x + 7$$

Samir a écrit $-2x - 7$: il a changé le signe de $2x$, mais il a oublié de changer celui de -7.

Le reste de la copie. Le membre de droite de la ligne 1 est juste, car $2(x + 4) = 2x + 8$. La ligne 2 réduit correctement le membre de gauche. Les lignes 3 et 4 appliquent correctement les règles des égalités, mais elles partent d'une ligne fausse.

Conclusion. L'erreur se trouve à la ligne 1 : en supprimant la parenthèse, Samir n'a pas changé le signe de -7.

3. 2 pts

En déduire une résolution correcte de l'équation $5x - (2x - 7) = 2(x + 4)$.

INDICE

Ensuite : recommence à la ligne 1 avec $-2x + 7$, réduis, puis rassemble les termes en x dans le membre de gauche.

CORRIGÉ

Développer et réduire. On supprime correctement la parenthèse à gauche, on développe à droite, puis on réduit le membre de gauche :

$$\begin{aligned} 5x - 2x + 7 &= 2x + 8 \\ 3x + 7 &= 2x + 8 \end{aligned}$$

Isoler x. On retranche $2x$ aux deux membres, puis on retranche 7 aux deux membres :

$$\begin{aligned} x + 7 &= 8 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Vérification. Membre de gauche : $5 \times 1 - (2 \times 1 - 7) = 5 - (-5) = 5 + 5 = 10$.

Membre de droite : $2 \times (1 + 4) = 2 \times 5 = 10$.

Conclusion. La solution de l'équation est 1.

4. 1 pts

La copie de Samir est en fait une résolution juste d'une autre équation : $5x - (2x + 7) = 2(x + 4)$. Explique pourquoi, puis vérifie que 15 est une solution de cette autre équation.

INDICE

Outil : développe $-(2x + 7)$ et compare avec la ligne 1 de Samir.

CORRIGÉ

Pourquoi. Dans cette autre équation, la parenthèse se supprime ainsi :

$$-(2x + 7) = -2x - 7$$

L'équation $5x - (2x + 7) = 2(x + 4)$ s'écrit donc $5x - 2x - 7 = 2x + 8$: c'est exactement la ligne 1 de Samir. Ses lignes suivantes sont justes ; elles résolvent donc correctement cette autre équation.

Vérification. Membre de gauche : $5 \times 15 - (2 \times 15 + 7) = 75 - 37 = 38$.

Membre de droite : $2 \times (15 + 4) = 2 \times 19 = 38$.

Conclusion. Les deux membres valent 38 : 15 est une solution de $5x - (2x + 7) = 2(x + 4)$.