BURHAN

Les équations

2ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/equations/cours

Chapitre	Semestre
Les équations	Semestre 2

Le nombre caché

Le professeur Burhan te propose une énigme de papeterie. Samir achète trois cahiers identiques et une règle à 6 dirhams.

Il paie 30 dirhams en tout. Le prix d'un cahier est caché : à toi de le retrouver.

Devine : Le prix caché

Combien coûte un cahier ?

A. 24 dirhams

Faux.
Tu as retiré le prix de la règle : $30 - 6 = 24$. Mais 24 dirhams, c'est le prix des trois cahiers ensemble.

B. 12 dirhams

Faux.
Tu as ajouté le prix de la règle au lieu de le retirer : $30 + 6 = 36$, puis tu as pris le tiers. Or la règle est déjà comptée dans les 30 dirhams.

C. 8 dirhams

Juste.
Juste. Les trois cahiers coûtent $30 - 6 = 24$ dirhams, et un cahier coûte le tiers de 24 dirhams.

Indice 1
Commence par retirer ce que coûte la règle.

Correction
Un cahier coûte 8 dirhams.

Vérification :

$$3 \times 8 + 6 = 24 + 6 = 30$$

Derrière cette énigme se cache une **équation** : une égalité qui contient un nombre inconnu, désigné par une lettre.

Si x est le prix d'un cahier en dirhams, l'énigme s'écrit :

$$3x + 6 = 30$$

Dans ce chapitre, tu apprends à résoudre ce genre d'équation avec méthode, puis à vérifier ta réponse.

Équation, inconnue, solution

Devine : Le nombre d'Amine

Amine pense à un nombre. Il le double, puis il ajoute 7. Il trouve 19. Quel nombre a-t-il choisi ?

A. 13

Faux.
Tu as ajouté 7 à 19 au lieu de le retirer. Or $2 \times 13 + 7 = 33$, et non 19.

B. 6

Juste.
Juste : $2 \times 6 + 7 = 12 + 7 = 19$.

C. 12

Faux.
12 est le double du nombre, pas le nombre lui-même. En effet, $2 \times 12 + 7 = 31$.

Indice 1
Essaie chaque nombre : double-le, puis ajoute 7.

Correction
Amine a choisi 6, car $2 \times 6 + 7 = 12 + 7 = 19$.

Rappel de 1re année : pour résoudre $x + 5 = 12$, on retranche 5 des deux côtés et on trouve $x = 7$.

On vérifie en remplaçant x par 7 : $7 + 5 = 12$.

Cette année, les nombres seront aussi négatifs, décimaux ou fractionnaires.

Définition : Équation, inconnue, solution

Une **équation** est une égalité dans laquelle figure un nombre inconnu, désigné par une lettre, par exemple x. Cette lettre s'appelle l'**inconnue**.

L'égalité a deux **membres** : le membre de gauche et le membre de droite du signe $=$.

Un nombre est une **solution** de l'équation lorsque l'égalité est vraie quand on remplace l'inconnue par ce nombre. **Résoudre** une équation, c'est trouver toutes ses solutions.

En clair : dans l'équation $2x + 7 = 19$ d'Amine, l'inconnue est x.

- Le membre de gauche est $2x + 7$.
- Le membre de droite est 19.

Le nombre 6 est une solution, car il rend l'égalité vraie.

Méthode : vérifier qu'un nombre est solution

1. **Remplacer** l'inconnue par le nombre dans le membre de gauche, puis calculer.
2. **Remplacer** l'inconnue par le nombre dans le membre de droite, puis calculer.
3. **Comparer** les deux résultats : s'ils sont égaux, le nombre est une solution ; sinon, il n'en est pas une.

Exemple : un nombre qui est solution

Le nombre -2 est-il solution de l'équation $5x + 3 = 2x - 3$?

On remplace x par -2 dans le membre de gauche :

$$\begin{aligned} 5 \times (-2) + 3 &= -10 + 3 \\ &= -7 \end{aligned}$$

Puis dans le membre de droite :

$$\begin{aligned} 2 \times (-2) - 3 &= -4 - 3 \\ &= -7 \end{aligned}$$

Les deux membres sont égaux. Donc -2 est une solution de l'équation.

Exemple : un nombre qui n'est pas solution

Le nombre 3 est-il solution de l'équation $4x - 1 = 2x + 4$?

On remplace x par 3 dans le membre de gauche :

$$\begin{aligned} 4 \times 3 - 1 &= 12 - 1 \\ &= 11 \end{aligned}$$

Puis dans le membre de droite :

$$\begin{aligned} 2 \times 3 + 4 &= 6 + 4 \\ &= 10 \end{aligned}$$

Les deux membres sont différents. Donc 3 n'est pas une solution de l'équation.

Vérifie : Quel nombre convient ?

Quel nombre est solution de l'équation $3x - 4 = x + 6$?

A. 2

Faux.

Membre de gauche : $3 \times 2 - 4 = 2$. Membre de droite : $2 + 6 = 8$. Les deux membres sont différents.

B. 10

Faux.

Membre de gauche : $3 \times 10 - 4 = 26$. Membre de droite : $10 + 6 = 16$. Les deux membres sont différents.

C. 5

Juste.

Juste. Membre de gauche : $3 \times 5 - 4 = 11$. Membre de droite : $5 + 6 = 11$.

Indice 1

Pour chaque nombre, calcule séparément les deux membres.

Correction

Le nombre 5 est solution : $3 \times 5 - 4 = 11$ et $5 + 6 = 11$.

Remarque : essayer ne suffit pas

Essayer des nombres au hasard peut être très long. Un essai raté ne prouve pas que l'équation n'a pas de solution.

Les règles de la section suivante donnent une méthode sûre.

À toi : vérifier avec une fraction

Le nombre $\frac{1}{2}$ est-il solution de l'équation $6x + 1 = 2x + 3$? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Outil : utilise la méthode, en calculant chaque membre séparément.

Indice 2

Membre de gauche : $6 \times \frac{1}{2} + 1$. Commence par la multiplication.

Indice 3

Point délicat : $6 \times \frac{1}{2}$ vaut 3 ; ce n'est pas $\frac{6}{12}$.

Réponse

Membre de gauche. On remplace x par $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} 6 \times \frac{1}{2} + 1 &= 3 + 1 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Membre de droite. On fait de même :

$$2 \times \frac{1}{2} + 3 = 1 + 3$$
$$= 4$$

Conclusion. Les deux membres valent 4 : le nombre $\frac{1}{2}$ est bien une solution de l'équation $6x + 1 = 2x + 3$.

Les règles des égalités

Imagine une balance à deux plateaux, en équilibre. Sur le plateau de gauche, il y a un sac de masse inconnue et une masse de 3 kg.

Sur le plateau de droite, il y a une masse de 8 kg. Tu peux dessiner cette balance sur ton cahier.

Devine : La balance

On retire 3 kg sur chacun des deux plateaux. Que fait la balance ?

A. Elle penche vers la gauche.

Faux.
Le plateau de gauche a perdu 3 kg, comme celui de droite : aucun ne devient plus lourd.

B. Elle reste en équilibre.

Juste.
Juste. Les deux plateaux ont perdu la même masse : l'équilibre est conservé.

C. Elle penche vers la droite.

Faux.
Le plateau de droite a perdu 3 kg lui aussi : il ne devient pas plus lourd que l'autre.

Indice 1
Les deux plateaux perdent-ils la même masse ?

Correction
La balance reste en équilibre, car on a retiré la même masse des deux côtés.

Il reste le sac seul à gauche et 5 kg à droite.

En clair, la balance en équilibre ressemble à une équation. Si x est la masse du sac en kilogrammes, elle s'écrit $x + 3 = 8$.

Retirer 3 kg sur chaque plateau, c'est retrancher 3 aux deux membres :

$$x + 3 - 3 = 8 - 3$$
$$x = 5$$

Propriété : Ajouter ou retrancher un même nombre

Soit c un nombre rationnel. Si l'on **ajoute** c aux deux membres d'une équation, on obtient une équation qui a exactement les mêmes solutions. Il en est de même si l'on **retranche** c aux deux membres.

Ainsi, un terme peut passer d'un membre à l'autre, à condition de **changer son signe**.

Remarque

Ce résultat est admis.

La balance le rend plausible : faire la même chose sur les deux plateaux garde l'équilibre.

Exemple : retrancher un même nombre

Résoudre l'équation $x + 7{,}5 = 4$.

On retranche $7{,}5$ aux deux membres, puis on calcule :

$$x = 4 - 7{,}5$$
$$x = -3{,}5$$

Vérification : $-3{,}5 + 7{,}5 = 4$.

La solution de l'équation est $-3{,}5$.

La balance dit aussi autre chose. Trois sacs identiques pèsent ensemble 12 kg.

Un seul sac pèse alors le tiers de 12 kg, soit 4 kg : on a divisé les deux membres de $3x = 12$ par 3.

Propriété : Multiplier ou diviser par un même nombre non nul

Soit c un nombre rationnel **non nul**. Si l'on **multiplie** les deux membres d'une équation par c, on obtient une équation qui a exactement les mêmes solutions. Il en est de même si l'on **divise** les deux membres par c.

Remarque : jamais par zéro

Ce résultat est admis. Le nombre doit être non nul.

Si l'on multiplie les deux membres de $x + 3 = 8$ par 0, on obtient $0 = 0$. Cette égalité est vraie, mais elle ne dit plus rien de x.

Exemple : multiplier les deux membres

Résoudre l'équation $\frac{x}{3} = -4$.

On multiplie les deux membres par 3, qui n'est pas nul, puis on calcule :

$$x = -4 \times 3$$
$$x = -12$$

Vérification : $\frac{-12}{3} = -4$.

La solution de l'équation est -12.

Attention : changer de membre, c'est changer de signe

Un terme qui passe d'un membre à l'autre **change de signe**. Pour résoudre $x + 6 = 2$:

- ✗ $x = 2 + 6$;
- ✓ $x = 2 - 6$, soit $x = -4$.

En effet, on a retranché 6 aux deux membres.

À toi : isoler l'inconnue

Résous l'équation $x - 2{,}4 = -1$, en nommant la règle employée. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Outil : pour isoler x, ajoute un même nombre aux deux membres.
Indice 2
On ajoute $2{,}4$ aux deux membres : $x = -1 + 2{,}4$.
Indice 3
Point délicat : $-1 + 2{,}4$ est positif, car $2{,}4$ est plus grand que 1.

Réponse
Pour isoler x, on emploie la règle : ajouter un même nombre aux deux membres. On ajoute $2{,}4$ aux deux membres, puis on calcule :

$$x = -1 + 2{,}4$$
$$x = 1{,}4$$

Vérification : $1{,}4 - 2{,}4 = -1$.

Conclusion. La solution de l'équation est $1{,}4$.

Tu sais maintenant ce que tu peux faire aux deux membres. Tu sais aussi ce que tu ne dois jamais faire : multiplier ou diviser par zéro.

Résoudre une équation du premier degré

Devine : La règle de Sara

Sara a résolu l'équation $5x = 35$ et trouvé $x = 7$. Quelle règle a-t-elle employée ?

A. Elle a divisé les deux membres par 5.

Juste.

Juste. $5x$ divisé par 5 donne x, et 35 divisé par 5 donne 7.

B. Elle a retranché 5 aux deux membres.

Faux.

Retrancher 5 donnerait $5x - 5 = 30$: le 5 de $5x$ multiplie x, il ne s'ajoute pas.

C. Elle a multiplié les deux membres par 5.

Faux.

Multiplier par 5 donnerait $25x = 175$: l'inconnue ne serait toujours pas seule.

Indice 1

Dans $5x$, le nombre 5 multiplie x.

Correction

Sara a divisé les deux membres par 5, qui n'est pas nul : $x = \dfrac{35}{5} = 7$.

Vérification : $5 \times 7 = 35$.

La solution de l'équation est 7.

Dans $5x$, le nombre 5 multiplie l'inconnue : on l'appelle le **coefficient** de x.

Après quelques transformations, la plupart des équations de ce chapitre s'écrivent sous la forme $ax = b$, avec a non nul.

Définition : Équation du premier degré à une inconnue

Soit a et b deux nombres rationnels, avec $a \neq 0$. L'équation $ax = b$, d'inconnue x, est une **équation du premier degré à une inconnue**.

On donne aussi ce nom à toute équation que les règles de calcul permettent d'écrire sous cette forme, par exemple $3x - 5 = x + 1$.

Les nombres a et b peuvent être des entiers relatifs, des nombres décimaux ou des fractions.

Exemple : repérer le coefficient

- Dans $-2x = 9$, le coefficient est $a = -2$ et $b = 9$.
- Dans $0{,}5x = 3$, le coefficient est $a = 0{,}5$ et $b = 3$.

- L'équation $7x - 2 = 3x + 10$ est aussi du premier degré : elle s'écrit $4x = 12$, comme le montre l'exemple plus bas.

Pour résoudre $6x = 15$, on divise les deux membres par 6, qui n'est pas nul. La fraction obtenue se simplifie par 3 :

$$x = \frac{15}{6}$$
$$x = \frac{5}{2}$$

Vérification : $6 \times \frac{5}{2} = 15$.

La solution de l'équation est $\frac{5}{2}$. On procède de la même façon pour toute équation de la forme $ax = b$.

Propriété : Solution de l'équation ax = b

Soit a et b deux nombres rationnels, avec $a \neq 0$. L'équation $ax = b$ a une solution, et une seule : le nombre $\frac{b}{a}$.

On rédige : « La solution de l'équation est $\frac{b}{a}$. »

Remarque

Ce résultat est admis.

On rédige toujours la solution par une phrase, après l'avoir vérifiée.

Exemple : un coefficient décimal

Résoudre l'équation $2{,}5x = -10$.

Diviser par le coefficient. On divise les deux membres par $2{,}5$, qui n'est pas nul :

$$x = -\frac{10}{2{,}5}$$

Simplifier. On multiplie le numérateur et le dénominateur par 10 pour enlever la virgule : $x = -\frac{100}{25}$, c'est-à-dire $x = -4$.

Vérifier. $2{,}5 \times (-4) = -10$.

La solution de l'équation est -4.

Méthode : résoudre une équation du premier degré

1. **Réduire** chaque membre : développer si besoin, puis regrouper les termes semblables.
2. **Regrouper** les termes en x dans un membre et les nombres dans l'autre, en ajoutant ou en retranchant un même terme aux deux membres.
3. **Diviser** les deux membres par le coefficient de x, qui n'est pas nul.
4. **Vérifier** la solution trouvée dans l'équation de départ.
5. **Conclure** par une phrase : « La solution de l'équation est … ».

Exemple : une résolution complète

Résoudre l'équation $7x - 2 = 3x + 10$.

Regrouper. On retranche $3x$ aux deux membres, puis on ajoute 2 aux deux membres :

$$\begin{aligned} 4x - 2 &= 10 \\ 4x &= 12 \end{aligned}$$

Isoler l'inconnue. On divise les deux membres par 4, qui n'est pas nul :

$$x = 3$$

Vérifier. $7 \times 3 - 2 = 19$ et $3 \times 3 + 10 = 19$.

La solution de l'équation est 3.

Attention : diviser par le coefficient, avec son signe

Pour résoudre $-5x = 20$, on divise les deux membres par -5 : le coefficient garde son signe.

- ✗ $x = 4$;
- ✗ $x = 20 + 5$, car $-5x$ est un produit, pas une somme ;
- ✓ $x = \dfrac{20}{-5}$, soit $x = -4$.

Remarque : Coin devoir : rédiger une résolution

En devoir, chaque ligne dit la règle employée. Voici une rédaction modèle pour l'équation $2x + 14 = 5x - 1$:

- « On retranche $5x$ aux deux membres : $-3x + 14 = -1$. »
- « On retranche 14 aux deux membres : $-3x = -15$. »
- « On divise les deux membres par -3, qui n'est pas nul : $x = 5$. »
- « Vérification : $2 \times 5 + 14 = 24$ et $5 \times 5 - 1 = 24$. »

- « La solution de l'équation est 5. »

À toi : une résolution complète

Résous l'équation $4 - 3x = 2x - 16$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Outil : regroupe les termes en x dans le membre de gauche, en retranchant $2x$ aux deux membres.
Indice 2
Tu obtiens $4 - 5x = -16$, puis $-5x = -20$ en retranchant 4 aux deux membres.
Indice 3
Point délicat : divise par -5 avec son signe ; le quotient de deux nombres négatifs est positif.

Réponse
Regrouper. On retranche $2x$ aux deux membres, puis on retranche 4 aux deux membres :

$$\begin{aligned} 4 - 5x &= -16 \\ -5x &= -20 \end{aligned}$$

Isoler l'inconnue. On divise les deux membres par -5, qui n'est pas nul : $x = 4$.

Vérifier. $4 - 3 \times 4 = -8$ et $2 \times 4 - 16 = -8$.

Conclusion. La solution de l'équation est 4.

Une règle par ligne, puis la vérification : tu sais résoudre une équation de bout en bout.

Équations à coefficients fractionnaires

Rappel du chapitre sur les fractions : pour ajouter $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$, on les écrit avec un **dénominateur commun**. C'est un nombre multiple des deux dénominateurs, ici 6 :

$$\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

On sait aussi multiplier un entier par une fraction : $6 \times \frac{2}{3} = 4$.

Devine : Faire disparaître les fractions

On veut faire disparaître les fractions de l'équation $\frac{x}{4} + \frac{x}{6} = 15$. Par quel nombre, le plus petit possible, faut-il multiplier chaque terme ?

A. 10
Faux.
Tu as ajouté les dénominateurs. Or $10 \times \frac{x}{4}$ donne encore une fraction.

B. 24
Faux.

24 est bien un multiple de 4 et de 6, mais ce n'est pas le plus petit.

C. 12

Juste.

Juste. 12 est le plus petit nombre qui est à la fois un multiple de 4 et de 6.

Indice 1

Cherche un multiple de 4 qui est aussi un multiple de 6.

Correction

Le plus petit dénominateur commun est 12.

En effet, $12 \times \dfrac{x}{4} = 3x$ et $12 \times \dfrac{x}{6} = 2x$.

Première voie : multiplier chaque terme par 12, qui n'est pas nul. C'est la voie de la méthode donnée plus bas.

On obtient $3x + 2x = 180$, soit $5x = 180$.

On divise les deux membres par 5, qui n'est pas nul : $x = 36$.

Autre voie : calculer avec les fractions. On écrit le membre de gauche avec le dénominateur 12 :

$$\begin{aligned} \frac{x}{4} + \frac{x}{6} &= \frac{3x}{12} + \frac{2x}{12} \\ &= \frac{5}{12}x \end{aligned}$$

L'équation devient $\dfrac{5}{12}x = 15$.

Les nombres $\dfrac{5}{12}$ et $\dfrac{12}{5}$ sont **inverses** : leur produit vaut 1. On multiplie les deux membres par $\dfrac{12}{5}$, qui n'est pas nul. À gauche, il reste x. À droite, $15 \times \dfrac{12}{5} = 36$, donc $x = 36$.

Les deux voies donnent le même résultat. Vérification : $\dfrac{36}{4} + \dfrac{36}{6} = 9 + 6 = 15$.

La solution de l'équation est 36.

Méthode : résoudre une équation à coefficients fractionnaires

1. **Chercher** un dénominateur commun à toutes les fractions de l'équation, le plus petit possible.
2. **Multiplier** chaque terme des deux membres par ce nombre, puis simplifier : il ne reste aucune fraction.
3. **Résoudre** l'équation obtenue comme une équation à coefficients entiers, puis vérifier et conclure.

Exemple : un dénominateur commun

Résoudre l'équation $\frac{2x}{3} - \frac{1}{4} = \frac{x}{2}$.

Chasser les fractions. Les dénominateurs sont 3, 4 et 2. On multiplie chaque terme des deux membres par 12, qui n'est pas nul :

$$8x - 3 = 6x$$

Résoudre. On retranche $6x$ aux deux membres, puis on ajoute 3 aux deux membres :

$$\begin{aligned} 2x - 3 &= 0 \\ 2x &= 3 \end{aligned}$$

On divise les deux membres par 2, qui n'est pas nul : $x = \frac{3}{2}$.

Vérifier. Pour le membre de gauche :

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} - \frac{1}{4} &= 1 - \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Pour le membre de droite : $\frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

La solution de l'équation est $\frac{3}{2}$.

Attention : multiplier chaque terme

On multiplie **chaque terme** par le dénominateur commun, même celui qui n'a pas de fraction. Pour $\frac{x}{5} - 2 = 1$, en multipliant par 5 :

- ✗ $x - 2 = 5$;
- ✓ $x - 10 = 5$, puis $x = 15$.

Exemple : un numérateur à deux termes

Résoudre l'équation $\frac{x+1}{2} = \frac{x}{3}$.

Le numérateur $x + 1$ a deux termes : on le garde entre parenthèses quand on multiplie.

Chasser les fractions. On multiplie les deux membres par 6, qui n'est pas nul, puis on développe :

$$\begin{aligned} 3(x+1) &= 2x \\ 3x + 3 &= 2x \end{aligned}$$

Résoudre. On retranche $2x$ aux deux membres, puis on retranche 3 aux deux membres :

$$\begin{aligned} x + 3 &= 0 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

Vérifier. $\frac{-3+1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$ et $\frac{-3}{3} = -1$.

La solution de l'équation est -3.

Les nombres décimaux se traitent de la même façon. Dans $0{,}3x + 1{,}2 = 0{,}5x$, on multiplie chaque terme par 10. Il ne reste alors que des nombres entiers.

Exemple : des coefficients décimaux

Résoudre l'équation $0{,}3x + 1{,}2 = 0{,}5x$.

Passer aux entiers. On multiplie chaque terme des deux membres par 10, qui n'est pas nul :

$$3x + 12 = 5x$$

Résoudre. On retranche $3x$ aux deux membres. Il reste à diviser les deux membres par 2, qui n'est pas nul :

$$12 = 2x$$
$$6 = x$$

Donc $x = 6$.

Vérifier. $0{,}3 \times 6 + 1{,}2 = 1{,}8 + 1{,}2 = 3$ et $0{,}5 \times 6 = 3$.

La solution de l'équation est 6.

Vérifie : Le calcul de Léa

Léa multiplie chaque terme de l'équation $\frac{x}{4} - \frac{1}{2} = 3$ par 4. Quelle équation doit-elle obtenir ?

A. $x - 2 = 12$

Juste.

Juste. $4 \times \frac{1}{2} = 2$ et $4 \times 3 = 12$.

B. $x - \frac{1}{2} = 12$

Faux.

Le terme $\frac{1}{2}$ doit lui aussi être multiplié par 4.

C. $x - 2 = 3$

Faux.

Le membre de droite doit lui aussi être multiplié par 4.

Indice 1

Multiplie les trois termes, un par un.

Correction

Léa multiplie les trois termes par 4 :

- $4 \times \frac{x}{4} = x$;

- $4 \times \frac{1}{2} = 2$;
- $4 \times 3 = 12$.

Léa obtient $x - 2 = 12$.

On ajoute 2 aux deux membres : $x = 14$.

Vérification : $\frac{14}{4} - \frac{1}{2} = \frac{7}{2} - \frac{1}{2} = 3$.

La solution de l'équation est 14.

À toi : trois dénominateurs

Résous l'équation $\frac{x}{6} + \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Outil : cherche le plus petit dénominateur commun à 6, 3 et 4.

Indice 2

Avec 12, tu obtiens $2x + 4 = 9$.

Indice 3

Point délicat : multiplie aussi le membre de droite, car $12 \times \frac{3}{4} = 9$.

Réponse

Chasser les fractions. Le plus petit dénominateur commun à 6, 3 et 4 est 12. On multiplie chaque terme des deux membres par 12, qui n'est pas nul :

$$2x + 4 = 9$$

Résoudre. On retranche 4 aux deux membres, et l'on termine en divisant les deux membres par 2, qui n'est pas nul :

$$\begin{aligned} 2x &= 5 \\ x &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Vérifier. On remplace x par $\frac{5}{2}$ dans le membre de gauche :

$$\begin{aligned} \frac{5}{2} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} &= \frac{5}{12} + \frac{4}{12} \\ &= \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Conclusion. La solution de l'équation est $\frac{5}{2}$.

Un dénominateur commun, et plus aucune fraction : c'est ton outil pour la suite.

Équations qui se ramènent au premier degré

Rappel du chapitre sur le calcul littéral : $k(a + b) = ka + kb$.

Pour deux parenthèses, on emploie la **double distributivité** :

$$(a+b)(c+d) = ac + ad \\ + bc + bd$$

Par exemple :

$$(x+2)(x+3) = x^2 + 5x + 6$$

Devine : Enlever une parenthèse

Par quelle expression peut-on remplacer $7-(x-4)$?

A. $7-x-4$

Faux.

Le signe moins change le signe de chaque terme de la parenthèse : -4 devient $+4$.

B. $7-x+4$

Juste.

Juste. On enlève la parenthèse en changeant le signe de chacun de ses termes.

C. $7+x-4$

Faux.

Ici x et -4 gardent leur signe, alors que le moins devant la parenthèse doit les changer : on attend $-x$ et $+4$.

Indice 1

Un signe moins devant une parenthèse change le signe de chaque terme.

Correction

$7-(x-4) = 7-x+4 = 11-x$.

Exemple : des parenthèses

Résoudre l'équation $3(x-2) = 5-(x+3)$.

Développer et réduire. On développe chaque membre, puis on réduit le membre de droite :

$$3x-6 = 5-x-3$$
$$3x-6 = 2-x$$

Regrouper. On ajoute x aux deux membres, puis on ajoute 6 aux deux membres :

$$4x-6 = 2$$
$$4x = 8$$

Isoler l'inconnue. On divise les deux membres par 4, qui n'est pas nul : $x = 2$.

Vérifier. $3\times(2-2) = 0$ et $5-(2+3) = 0$.

La solution de l'équation est 2.

Attention : le signe moins devant une parenthèse

Un signe moins devant une parenthèse **change le signe de chaque terme** de la parenthèse :

- ✗ $10-(3x+2)=10-3x+2$;
- ✓ $10-(3x+2)=10-3x-2$.

Certaines équations contiennent un produit de deux parenthèses. On le développe par la double distributivité. Un terme en x^2 apparaît ; s'il figure dans les deux membres, il disparaît.

Méthode : résoudre une équation qui se ramène au premier degré

1. **Développer** chaque produit, par la distributivité ou la double distributivité ; attention au signe moins devant une parenthèse.
2. **Réduire** chaque membre. Si le même terme en x^2 figure dans les deux membres, on le retranche aux deux membres : il disparaît.
3. **Résoudre** l'équation du premier degré obtenue, puis vérifier et conclure.

Exemple : un terme qui disparaît

Résoudre l'équation $(x+3)(x-1)=x^2+7$.

Développer et réduire. On développe le membre de gauche par la double distributivité, puis on réduit :

$$\begin{aligned} x^2-x+3x-3&=x^2+7\\ x^2+2x-3&=x^2+7 \end{aligned}$$

Retirer le terme en x^2. On retranche x^2 aux deux membres : $2x-3=7$.

Isoler l'inconnue. On ajoute 3 aux deux membres. Le coefficient de x vaut alors 2 ; ce nombre n'est pas nul, on peut donc diviser les deux membres par 2 :

$$\begin{aligned} 2x&=10\\ x&=5 \end{aligned}$$

Vérifier. $(5+3)\times(5-1)=8\times4=32$ et $5^2+7=32$.

La solution de l'équation est 5.

Remarque : quand les termes en x disparaissent

Parfois, les termes en x disparaissent eux aussi.

- Pour $2(x+1) = 2x+5$, on développe : $2x+2 = 2x+5$. On retranche 2 aux deux membres : $2x = 2x+3$. On retranche $2x$ aux deux membres : $0x = 3$. Aucun nombre n'est solution, car $0x$ vaut toujours 0.
- Pour $3(x-1) = 3x-3$, on développe : $3x-3 = 3x-3$. On retranche $3x$ aux deux membres, puis on leur ajoute 3 : $0x = 0$. Tout nombre est solution.

Remarque : Coin devoir : une double distributivité

En devoir, on écrit le développement en entier avant de réduire. Voici une rédaction modèle pour $(x-2)(x+5) = x^2 - x + 2$:

- « On développe le membre de gauche : $x^2 + 5x - 2x - 10 = x^2 - x + 2$, soit $x^2 + 3x - 10 = x^2 - x + 2$. »
- « On retranche x^2 aux deux membres : $3x - 10 = -x + 2$. »
- « On ajoute x aux deux membres : $4x - 10 = 2$. »
- « On ajoute 10 aux deux membres : $4x = 12$. »
- « On divise les deux membres par 4, qui n'est pas nul : $x = 3$. »
- « Vérification : $(3-2) \times (3+5) = 1 \times 8 = 8$ et $3^2 - 3 + 2 = 8$. »
- « La solution de l'équation est 3. »

Vérifie : Après le développement

On développe le membre de gauche de $(x+4)(x+1) = x^2 + 2x$, puis on retranche x^2 aux deux membres. Quelle équation obtient-on ?

A. $5x + 4 = 2x$

Juste.
Juste. $(x+4)(x+1) = x^2 + x + 4x + 4 = x^2 + 5x + 4$.

B. $5x + 5 = 2x$

Faux.
Le dernier terme est $4 \times 1 = 4$: on multiplie, on n'ajoute pas.

C. $4 = 2x$

Faux.
Le développement est incomplet : il manque les termes x et $4x$.

Indice 1
Multiplie chaque terme de la première parenthèse par chaque terme de la seconde.

Correction

$(x+4)(x+1) = x^2 + 5x + 4$. Après le retrait de x^2, on obtient $5x + 4 = 2x$.

On retranche $2x$ aux deux membres : $3x + 4 = 0$. On retranche 4 aux deux membres : $3x = -4$. On divise les deux membres par 3, qui n'est pas nul : $x = -\frac{4}{3}$.

Vérification. Le membre de gauche vaut :

$$\begin{aligned}&\left(-\frac{4}{3}+4\right)\times\left(-\frac{4}{3}+1\right)\\&=\frac{8}{3}\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{8}{9}\end{aligned}$$

Le membre de droite vaut :

$$\begin{aligned}&\left(-\frac{4}{3}\right)^2+2\times\left(-\frac{4}{3}\right)\\&=\frac{16}{9}-\frac{24}{9}=-\frac{8}{9}\end{aligned}$$

La solution de l'équation est $-\frac{4}{3}$.

À toi : développer, puis résoudre

Résous l'équation $(x-3)(x+2) = x^2 - 4x + 6$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Outil : développe le membre de gauche par la double distributivité.

Indice 2

Tu obtiens $x^2 - x - 6 = x^2 - 4x + 6$; retranche x^2 aux deux membres.

Indice 3

Point délicat : -3×2 vaut -6, et $2x - 3x$ vaut $-x$.

Réponse

Développer et réduire. On développe le membre de gauche par la double distributivité :

$$\begin{aligned}&(x-3)(x+2)\\&\quad=x^2+2x-3x-6\\&\quad=x^2-x-6\end{aligned}$$

L'équation devient $x^2 - x - 6 = x^2 - 4x + 6$.

Retirer le terme en x^2. On retranche x^2 aux deux membres : $-x - 6 = -4x + 6$.

Isoler l'inconnue. On ajoute $4x$, puis 6, aux deux membres. Enfin, 3 n'est pas nul : on divise les deux membres par 3.

$$\begin{aligned}3x-6&=6\\3x&=12\\x&=4\end{aligned}$$

Vérifier. $(4-3)\times(4+2)=1\times 6=6$ et $4^2-4\times 4+6=6$.

Conclusion. La solution de l'équation est 4.

Développer d'abord, réduire ensuite : le reste, tu le sais déjà.

Mettre un problème en équation

Devine : L'âge du père

Le père de Youssef a 28 ans de plus que lui. On note x l'âge de Youssef, en années. Quelle expression donne l'âge du père ?

A. $28x$

Faux.
$28x$ voudrait dire « 28 fois l'âge de Youssef », et non « 28 ans de plus ».

B. $x+28$

Juste.
Juste. « De plus » se traduit par une addition.

C. $x-28$

Faux.
Le père est plus âgé que Youssef : « de plus » se traduit par une addition.

Indice 1
Relis l'énoncé : le père a 28 ans de plus que Youssef. Que faut-il faire à x pour obtenir son âge ?

Correction
Le père a $x+28$ ans.

Mettre un problème en équation, c'est traduire des phrases par un calcul.

On commence toujours par dire ce que représente la lettre. Puis on écrit une égalité entre deux façons de calculer une même quantité.

Méthode : mettre un problème en équation

1. **Choisir** l'inconnue : écrire en une phrase ce que représente la lettre, avec son unité.
2. **Traduire** l'énoncé par une équation.
3. **Résoudre** l'équation.
4. **Vérifier** que la solution convient au problème : signe, nombre entier ou non, unité.
5. **Répondre** à la question posée par une phrase.

Exemple : des âges

Le père de Youssef a 28 ans de plus que lui. Dans 4 ans, il aura le triple de l'âge de son fils. Quel âge a Youssef ?

Choisir l'inconnue. Soit x l'âge de Youssef, en années. Le père a $x + 28$ ans.

Traduire. Dans 4 ans, Youssef aura $x + 4$ ans et son père $x + 28 + 4 = x + 32$ ans. L'âge du père sera alors le triple de celui de Youssef :

$$x + 32 = 3(x + 4)$$

Résoudre. On développe, puis on retranche x et enfin 12 aux deux membres :

$$\begin{aligned} x + 32 &= 3x + 12 \\ 32 &= 2x + 12 \\ 20 &= 2x \end{aligned}$$

On divise les deux membres par 2, qui n'est pas nul : $x = 10$.

Vérifier. $10 + 32 = 42$ et $3 \times (10 + 4) = 42$. La solution de l'équation est 10.

Youssef a 10 ans.

Exemple : le périmètre d'un rectangle

Un rectangle a un périmètre de 50 cm. Sa longueur mesure 7 cm de plus que sa largeur. Quelles sont ses dimensions ?

Choisir l'inconnue. Soit x la largeur, en centimètres. La longueur mesure $x + 7$.

Traduire. Le périmètre est le double de la somme de la largeur et de la longueur :

$$2(x + x + 7) = 50$$

Résoudre. On réduit la parenthèse, on développe, puis on retranche 14 aux deux membres :

$$\begin{aligned} 2(2x + 7) &= 50 \\ 4x + 14 &= 50 \\ 4x &= 36 \end{aligned}$$

On divise les deux membres par 4, qui n'est pas nul : $x = 9$.

Vérifier. La longueur vaut $9 + 7 = 16$, et $2 \times (9 + 16) = 50$. La solution de l'équation est 9.

Le rectangle mesure 9 cm de large et 16 cm de long.

Attention : la solution doit convenir au problème

Ali achète des cahiers à 6 dirhams et une trousse à 15 dirhams. Il paie 60 dirhams. L'équation $6x + 15 = 60$ a pour solution $7{,}5$.

- ✗ « Ali a acheté $7{,}5$ cahiers. »
- ✓ « Un nombre de cahiers est entier : aucune réponse ne convient, l'énoncé est impossible. »

Vérifie : Le partage

Trois amis se partagent 120 dirhams. Karim reçoit le double de Nadia. Omar reçoit 20 dirhams de plus que Nadia. On note x la part de Nadia, en dirhams. Quelle équation traduit ce partage ?

A. $x + 2x + 20x = 120$

Faux.

Le nombre 20 s'ajoute à x pour la part d'Omar ; il ne multiplie pas x.

B. $x + 2x + 20 = 120$

Faux.

La part d'Omar est $x + 20$: il manque le x de sa part.

C. $x + 2x + x + 20 = 120$

Juste.

Juste : la part de Nadia, celle de Karim, puis celle d'Omar.

Indice 1

Écris d'abord la part de chacun avec la lettre x.

Correction

Nadia reçoit x, Karim $2x$ et Omar $x + 20$.

La somme des trois parts vaut 120 :

$$x + 2x + x + 20 = 120$$

Exemple : un partage entre amis

On résout l'équation du partage, $x + 2x + x + 20 = 120$.

On réduit le membre de gauche, puis on retranche 20 aux deux membres :

$$\begin{aligned} 4x + 20 &= 120 \\ 4x &= 100 \end{aligned}$$

On divise les deux membres par 4, qui n'est pas nul : $x = 25$.

Vérification : Karim reçoit $2 \times 25 = 50$ et Omar $25 + 20 = 45$. Au total, $25 + 50 + 45 = 120$. La solution de l'équation est 25.

Nadia reçoit 25 dirhams, Karim 50 dirhams et Omar 45 dirhams.

Exemple : un prix baissé

Un vendeur baisse le prix d'un ballon d'un quart. Le ballon coûte alors 90 dirhams. Quel était son prix de départ ?

Choisir l'inconnue. Soit x le prix de départ, en dirhams.

Traduire. On retire au prix son quart : $x - \frac{1}{4}x = 90$.

Résoudre. On écrit $x = \frac{4}{4}x$ pour réduire : $\frac{4}{4}x - \frac{1}{4}x = \frac{3}{4}x$, donc $\frac{3}{4}x = 90$.

On multiplie les deux membres par $\frac{4}{3}$, qui n'est pas nul. Comme $90 \times \frac{4}{3} = 120$, on obtient $x = 120$.

Vérifier. Le quart de 120 est 30, et $120 - 30 = 90$. La solution de l'équation est 120.

Le ballon coûtait 120 dirhams.

Vérifie toujours dans l'énoncé, et pas seulement dans l'équation.

Une équation mal traduite peut avoir une solution juste qui ne répond pas au problème. Relis donc chaque phrase de l'énoncé avec ta réponse.

Vérifie : Une solution étrange

Tu résous un problème où x est l'âge d'un enfant, en années. Tu trouves $x = -3$. Que conclus-tu ?

A. Il y a une erreur à rechercher.

Juste.
Juste. Un âge n'est pas négatif : la traduction ou le calcul est à revoir.

B. On garde 3 ans, sans le signe moins.

Faux.
On ne change pas une solution pour qu'elle convienne : il faut chercher l'erreur.

C. L'enfant a -3 ans, on répond ainsi.

Faux.
Un âge n'est pas négatif : cette réponse ne convient pas au problème.

Indice 1
Un âge peut-il être négatif ?

Correction
Un âge n'est jamais négatif. La solution ne convient pas au problème : il faut relire la traduction et refaire les calculs.

À toi : deux âges

> Salma a 3 fois l'âge de son frère. À eux deux, ils ont 32 ans. Quel est l'âge de chacun ? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.
>
> **Indice 1**
> Outil : choisis l'inconnue, par exemple x, l'âge du frère en années.
> **Indice 2**
> Début : exprime l'âge de Salma avec x, puis additionne les deux âges.
> **Indice 3**
> Point délicat : réponds pour les deux enfants, et pas seulement pour x.
>
> **Réponse**
> **Choisir l'inconnue.** Soit x l'âge du frère, en années. Salma a $3x$ ans.
>
> **Traduire et résoudre.** À eux deux, ils ont 32 ans. On réduit le membre de gauche : le coefficient de x devient 4. Ce nombre n'est pas nul : on divise les deux membres par 4.
>
> $$\begin{aligned} x + 3x &= 32 \\ 4x &= 32 \\ x &= 8 \end{aligned}$$
>
> **Vérifier.** $8 + 3 \times 8 = 8 + 24 = 32$. La solution de l'équation est 8.
>
> **Conclusion.** Le frère a 8 ans et Salma a 24 ans.

Tu sais maintenant transformer une petite histoire en équation, puis en réponse. Garde toujours le même ordre : inconnue, équation, résolution, vérification, phrase de réponse.

Ce qu'il faut savoir faire

Ce qu'il faut savoir faire :

- vérifier qu'un nombre est solution, en calculant chaque membre séparément ;
- résoudre une équation du premier degré, en nommant la règle à chaque ligne ;
- faire disparaître les fractions avec un dénominateur commun ;
- développer et réduire chaque membre avant de résoudre ;
- mettre un problème en équation, puis répondre par une phrase ;
- vérifier la solution et conclure : « La solution de l'équation est … ».

Pour t'entraîner, passe aux exercices du chapitre. Ils vont du geste simple au problème complet. Commence par ceux d'application.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Les équations » (2ac · general · mathematiques)