BURHAN

Résumé : Les droites remarquables d'un triangle

2ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/droites-remarquables-du-triangle/resume

Chapitre	Semestre
Les droites remarquables d'un triangle	Semestre 1

Rappels de 1re année

À retenir : Hauteur, médiatrice, bissectrice

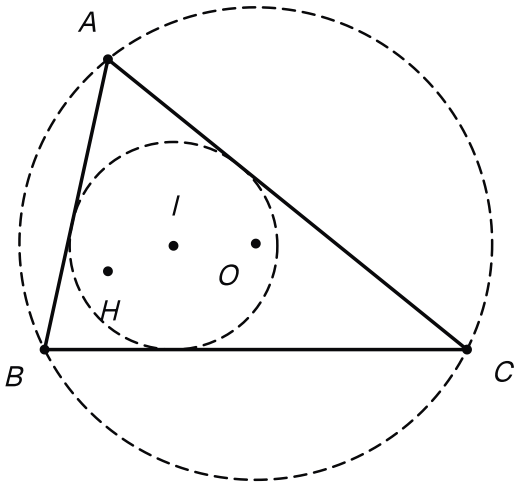
Rappel de 1re année : dans un triangle ABC,

- la **hauteur** issue de A passe par A et elle est perpendiculaire à (BC) ;
- la **médiatrice** de $[BC]$ est perpendiculaire à (BC) en son milieu ;
- la **bissectrice** de $\widehat{BAC}$ partage cet angle en deux angles de même mesure.

À retenir : Trois points de concours

Rappel de 1re année : les trois hauteurs passent par un même point, l'**orthocentre**.

Le point commun des trois médiatrices est le centre du cercle circonscrit, à égale distance des trois sommets. Celui des trois bissectrices est le centre du cercle inscrit, à égale distance des trois côtés.



Trois points de concours d'un même triangle : l'orthocentre H, le centre O du cercle circonscrit et le centre I du cercle inscrit.

Attention : Une hauteur peut sortir du triangle

Trace un triangle EDF dont l'angle $\widehat{EDF}$ mesure $130°$. Prolonger le côté $[DF]$, c'est tracer la droite (DF) au-delà de D et de F. La hauteur issue de E rencontre ce prolongement, pas le côté lui-même.

✗ « L'orthocentre est toujours dans le triangle. »

✓ Ici, il est à l'extérieur. Prolonge les côtés avant de tracer une hauteur.

Médianes et centre de gravité

Définition : Médiane d'un triangle

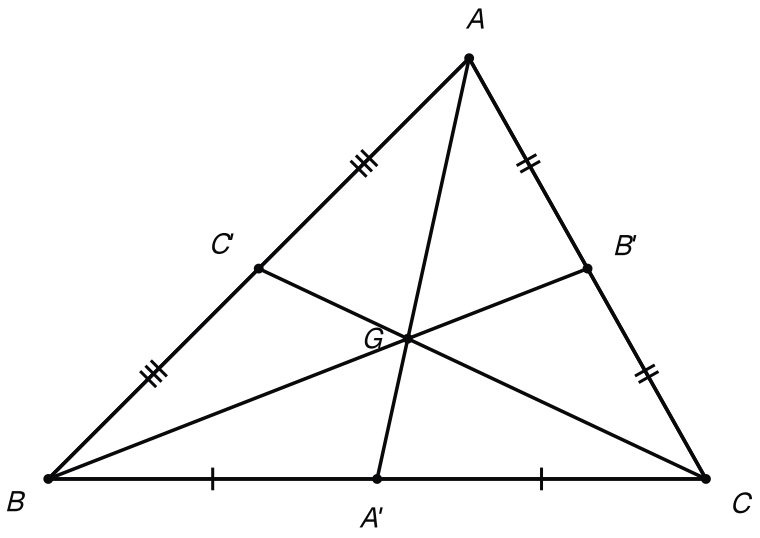
Soit ABC un triangle et A' le milieu du côté $[BC]$. La **médiane** issue du sommet A est la droite (AA') : elle passe par le sommet A et par le milieu du côté opposé à A. On appelle aussi médiane le segment $[AA']$.

Un triangle a trois médianes, une issue de chaque sommet.

Propriété : Concours des médianes et centre de gravité

Les trois médianes d'un triangle sont **concourantes** : elles passent par un même point. Ce point s'appelle le **centre de gravité** du triangle. On le note G.

Pour placer G, il suffit donc de tracer deux médianes : la troisième passe aussi par leur point d'intersection.



Trois segments qui relient chaque sommet de ABC au milieu du côté d'en face, et leur unique point commun G.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Tu l'as observé en traçant les trois médianes : elles se croisent en un seul point. Le cours ne le démontre pas, et aucun exercice ne te demande de le faire.

Méthode : construire le centre de gravité

1. **Trouve le milieu** d'un côté, avec la règle graduée ou le compas.
2. **Joins** ce milieu au sommet opposé : tu obtiens une première médiane.
3. **Fais de même** avec un deuxième côté. Les deux médianes se croisent en G.
4. **Vérifie** ton tracé : la médiane du troisième côté passe elle aussi par G.

Attention : Médiane ou médiatrice ?

La médiane issue de A joint le sommet A au milieu A' de $[BC]$. La médiatrice de $[BC]$ passe aussi par A', mais elle est perpendiculaire à (BC).

✗ « La médiane coupe le côté à angle droit. »

✓ Elle le coupe en son milieu. L'angle droit n'est assuré que si $AB = AC$.

Le centre de gravité, aux deux tiers

Propriété : Position du centre de gravité sur une médiane

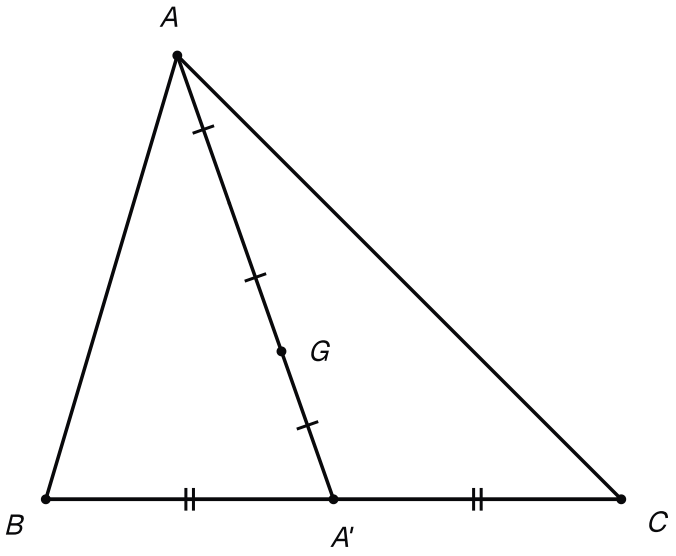
Soit ABC un triangle, A' le milieu de $[BC]$ et G le centre de gravité du triangle. Le point G est sur la médiane $[AA']$, aux **deux tiers** de sa longueur à partir du sommet A :

$$AG = \frac{2}{3}\,AA'$$

et

$$GA' = \frac{1}{3}\,AA'.$$

On a donc aussi $AG = 2\,GA'$. Il en est de même sur les deux autres médianes.



La médiane [AA'] découpée en trois parts égales : G en laisse deux du côté de A et une seule du côté de A'.

Remarque : Une propriété à utiliser

On cite cette propriété sous le nom de **règle des deux tiers**. Au cours, sa preuve a seulement été esquissée. On ne te demande pas de la démontrer.

Méthode : calculer une longueur sur une médiane

1. **Repère** la médiane qui passe par G et le sommet d'où elle part.
2. **Choisis** l'égalité utile : $AG = \frac{2}{3}\,AA'$, $GA' = \frac{1}{3}\,AA'$ ou $AG = 2\,GA'$.
3. **Calcule**, puis écris l'unité.
4. **Contrôle** : la somme $AG + GA'$ redonne AA'.

Exemple

Énoncé. Dans un triangle ABC de centre de gravité G, la médiane $[CC']$ mesure $12{,}9$ cm. Calcule CG et GC'.

Calcul. D'après la règle des deux tiers, le point G est aux deux tiers de $[CC']$ en partant du sommet C :

$$CG = \frac{2}{3} \times 12{,}9 = 8{,}6$$

et

$$GC' = \frac{1}{3} \times 12{,}9 = 4{,}3.$$

Contrôle. $8{,}6 + 4{,}3 = 12{,}9$: le compte est bon. Donc $CG = 8{,}6$ cm et $GC' = 4{,}3$ cm.

Attention : Les deux tiers partent du sommet

Avec $AA' = 23{,}7$ cm, on trouve $AG = 15{,}8$ cm et $GA' = 7{,}9$ cm.

✗ « $AG = 7{,}9$ cm. » Cette longueur est celle de GA', du côté du milieu.

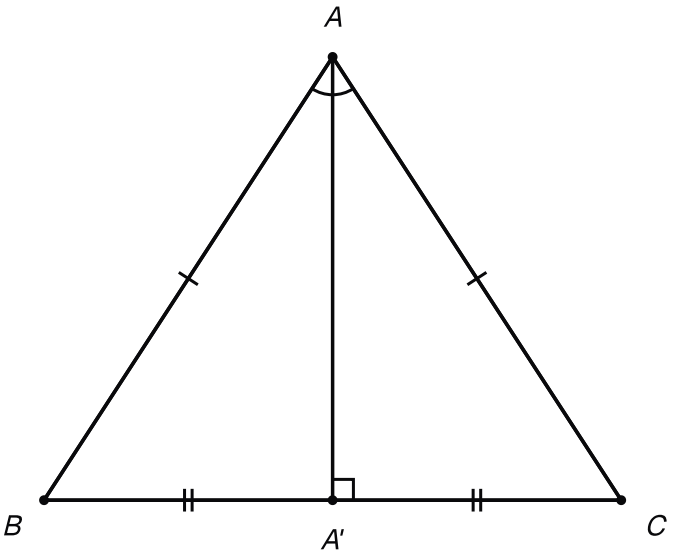
✓ Les deux tiers se comptent à partir du sommet. Le point G est donc plus proche de A' que de A.

Le triangle isocèle

Propriété : La médiane principale d'un triangle isocèle

Soit ABC un triangle **isocèle en** A, c'est-à-dire tel que $AB = AC$, et A' le milieu de la base $[BC]$. Alors la médiane (AA') est aussi :

- la **médiatrice** du segment $[BC]$;
- la **hauteur** issue de A ;
- la **bissectrice** de l'angle $\widehat{BAC}$.



Triangle isocèle en A : la droite (AA') coupe la base en son milieu, à angle droit, et partage l'angle du sommet en deux.

Exemple

Énoncé. Le triangle RST est isocèle en R, avec $RS = RT = 8{,}5$ cm et $ST = 8$ cm. Le point M est le milieu de $[ST]$.

Rôles de la médiane. Ici, $[ST]$ est la base et R le sommet principal. D'après la propriété du triangle isocèle, la médiane principale (RM) est aussi une hauteur, donc $(RM) \perp (ST)$. Elle partage aussi $\widehat{SRT}$ en deux angles de même mesure.

Longueurs. Comme M est le milieu de $[ST]$, on a $SM = MT = 4$ cm.

Propriété : Une médiane qui est aussi une hauteur

Soit ABC un triangle et A' le milieu de $[BC]$. Si la médiane (AA') est **perpendiculaire** à (BC), alors le triangle ABC est **isocèle en** A : $AB = AC$.

Exemple

Énoncé. Dans le triangle KLM, le point I est le milieu de $[LM]$ et $(KI) \perp (LM)$. On sait que $KL = 5{,}2$ cm.

Conclusion. La médiane (KI) est perpendiculaire à (LM) : elle est aussi une hauteur. D'après la propriété de la médiane-hauteur, le triangle KLM est isocèle en K.

Donc $KM = KL = 5{,}2$ cm.

Attention : Médiane ou hauteur ?

✗ « Le pied de la hauteur issue de A est le milieu de $[BC]$. » C'est faux en général.

✓ C'est vrai seulement si le triangle est isocèle en A. Sur une figure, un angle droit ou deux longueurs égales ne se lisent pas à l'œil : tu les justifies par les données.

Le triangle équilatéral

Propriété : Les droites remarquables d'un triangle équilatéral

Dans un triangle **équilatéral**, la médiane, la hauteur et la bissectrice issues d'un même sommet sont confondues avec la médiatrice du côté opposé.

Le centre de gravité, l'orthocentre, le centre du cercle circonscrit et le centre du cercle inscrit sont donc un seul et même point.

Exemple

Énoncé. Le triangle UVW est équilatéral, de centre de gravité G. Sa médiane $[UU']$ mesure $5{,}4$ cm.

Deux tiers. D'après la règle des deux tiers, $UG = \frac{2}{3} \times 5{,}4 = 3{,}6$ cm et $GU' = \frac{1}{3} \times 5{,}4 = 1{,}8$ cm.

Un seul point. D'après la propriété du triangle équilatéral, son centre de gravité G est aussi le centre du cercle circonscrit, de rayon $3{,}6$ cm. C'est aussi le centre du cercle inscrit.

Démontrer avec les droites remarquables

Méthode : reconnaître le centre de gravité

1. **Première voie** : établis que le point est sur deux médianes du triangle. Le concours des médianes permet de conclure.
2. **Seconde voie** : établis qu'il est sur le segment $[AA']$, à la distance $\frac{2}{3}\,AA'$ du sommet A. D'après la règle des deux tiers, le centre de gravité y est aussi, à la même distance de A. Sur ce segment, un seul point est à cette distance de A : les deux points sont confondus.
3. **Rédige** en nommant la propriété employée.

Exemple

Énoncé. Dans le triangle XYZ, le point I est le milieu de $[YZ]$. Sur $[XI]$, long de $11{,}4$ cm, on place E tel que $XE = 7{,}6$ cm.

Calcul. On a $\frac{2}{3} \times 11{,}4 = 7{,}6$, donc $XE = \frac{2}{3}\,XI$.

Conclusion. Le centre de gravité du triangle XYZ est sur le segment $[XI]$, lui aussi à $7{,}6$ cm de X, d'après la règle des deux tiers. Le point E et ce centre sont deux points de $[XI]$ à la même distance de X : ils sont confondus.

Donc E est le centre de gravité du triangle XYZ.

Méthode : se servir d'un point de concours

1. **Repère** deux hauteurs du triangle, ou bien deux médianes, deux médiatrices, deux bissectrices.
2. **Nomme** leur point d'intersection : l'orthocentre pour des hauteurs, le centre de gravité pour des médianes, le centre d'un cercle (circonscrit ou inscrit) pour des médiatrices ou des bissectrices.
3. **Conclus** : la troisième droite de la même famille passe aussi par ce point.

Exemple

Énoncé. Le triangle PQR n'a aucun angle droit. Ses hauteurs issues de P et de Q se coupent en H.

Rédaction. On sait que H est sur deux hauteurs du triangle PQR. Or, d'après le concours des hauteurs, les trois hauteurs sont concourantes : la troisième, issue de R, passe elle aussi par H. Donc $(RH) \perp (PQ)$.

> **À retenir : La droite des milieux**
>
> Rappel du chapitre précédent : prends les milieux de deux côtés d'un triangle. La droite qui les relie est parallèle au troisième côté, et la distance entre ces milieux vaut la moitié de ce côté.

Méthode : rédiger une démonstration courte

1. **On sait que** : écris les données utiles, et elles seules.
2. **Or** : cite la propriété, avec son nom.
3. **Donc** : écris la conclusion, qui répond à la question.
4. **Recommence** si besoin : cette conclusion devient une donnée du pas suivant.

Quelle propriété pour quelle question ?

Méthode : Quelle propriété pour quelle question ?

- **Placer** le centre de gravité : deux médianes suffisent.
- **Calculer** une longueur sur une médiane : la règle des deux tiers, comptés à partir du sommet.
- **Reconnaître** le centre de gravité : deux médianes, ou un point du segment $[AA']$ aux deux tiers à partir de A.
- **Établir** une perpendicularité : un point de concours, par exemple l'orthocentre.
- **Exploiter** un triangle isocèle : la propriété du triangle isocèle (médiane principale, aussi hauteur, médiatrice et bissectrice).
- **Reconnaître** un triangle isocèle : la propriété de la médiane-hauteur.
- **Exploiter** un triangle équilatéral : la propriété du triangle équilatéral (un seul point pour les quatre centres).
- **Relier** deux milieux : la droite des milieux, parallèle au troisième côté.

Du sommet A au centre de gravité

$$AG = \frac{2}{3}\,AA'$$

Du centre de gravité au milieu A'

$$GA' = \frac{1}{3}\,AA'$$

Les deux parties de la médiane

$$AG = 2\,GA'$$

Contrôle

$$AG + GA' = AA'$$

Droite des milieux, B' et C' milieux de [AC] et [AB]

$$B'C' = \frac{1}{2}\,BC$$

> **À retenir : Rédiger en devoir**
>
> Écris chaque pas en trois temps, en nommant toujours la propriété : on sait que, or d'après la propriété, donc.
>
> Code la figure avec les données de l'énoncé, jamais avec ce que tu crois voir. Termine par une phrase qui répond à la question.