BURHAN

Les droites remarquables d'un triangle : exercices, niveau examen

2ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/droites-remarquables-du-triangle/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Les droites remarquables d'un triangle	Niveau examen	5

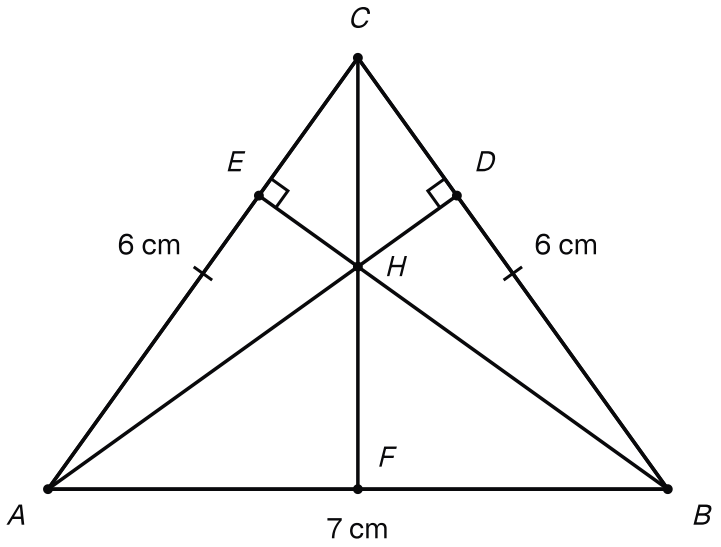
Exercice 1 5 pts

L'orthocentre d'un triangle isocèle

Soit ABC un triangle isocèle en C, avec $AB = 7$ cm et $CA = CB = 6$ cm. Ses trois angles sont aigus.

- Trace la hauteur issue de A : elle coupe $[BC]$ en D.
- Trace la hauteur issue de B : elle coupe $[AC]$ en E.
- Les droites (AD) et (BE) se coupent en H, et la droite (CH) coupe $[AB]$ en F.

Durée indicative : 15 *minutes. Barème indicatif :* 5 *points.*



Le triangle ABC isocèle en C, ses hauteurs [AD] et [BE] qui se coupent en H, et la droite (CH) jusqu'à F sur [AB].

1. 1,5 pts

Que représente le point H pour le triangle ABC ? Justifie que $(CH) \perp (AB)$.

INDICE

Outil : le concours des hauteurs. **Début :** le point H est sur deux hauteurs du triangle ABC.

CORRIGÉ

Le point H. Les droites (AD) et (BE) sont les hauteurs issues de A et de B. Le point H est sur ces deux hauteurs : d'après le concours des hauteurs, c'est l'orthocentre du triangle ABC.

La droite (CH). D'après le concours des hauteurs, la hauteur issue de C passe aussi par H. C'est donc la droite (CH), perpendiculaire au côté opposé $[AB]$.

Conclusion. H est l'orthocentre du triangle ABC, et $(CH) \perp (AB)$.

2. 1,5 pts

En déduire que F est le milieu de $[AB]$.

INDICE

Outil : la propriété du triangle isocèle. **Point délicat :** ici, le sommet principal est C et la base est $[AB]$.

CORRIGÉ

D'après la question 1, la droite (CF), qui est la droite (CH), est la hauteur issue de C.

Le triangle ABC est isocèle en C, de base $[AB]$. D'après la propriété du triangle isocèle, la hauteur issue de C est aussi la médiane issue de C. Elle coupe donc la base $[AB]$ en son milieu.

Conclusion. Cette médiane coupe $[AB]$ en F, donc F est le milieu de $[AB]$.

3. 1 pts

Calcule AF.

INDICE

Début : utilise la question 2.

CORRIGÉ

D'après la question 2, F est le milieu de $[AB]$. D'après la définition du milieu, AF est la moitié de AB :

$$AF = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

Conclusion. $AF = 3{,}5$ cm.

4. 1 pts

En déduire que le centre de gravité du triangle ABC est sur la droite (CH).

INDICE

Outil : le concours des médianes. **Début :** la droite (CF) est une médiane.

CORRIGÉ

D'après la question 2, F est le milieu de $[AB]$, donc (CF) est la médiane issue de C.

D'après le concours des médianes, le centre de gravité est sur chacune des trois médianes, en particulier sur (CF). Or (CF) et (CH) sont la même droite.

Conclusion. Le centre de gravité du triangle ABC est sur la droite (CH).

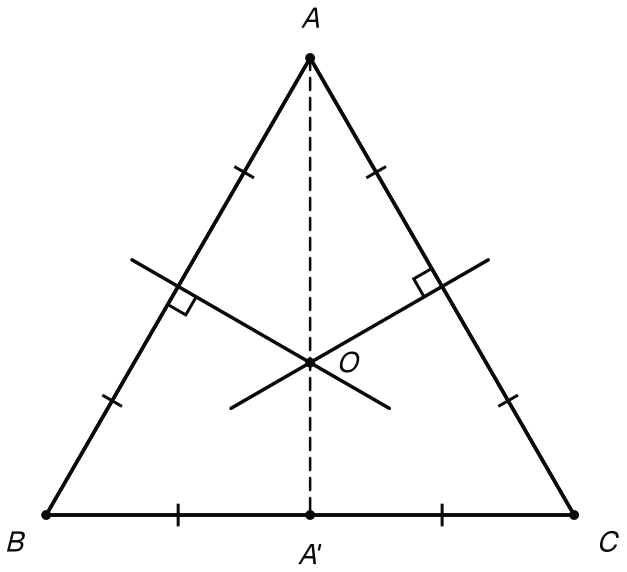
Exercice 2 5 pts

Le château d'eau des trois villages

Sur une carte, trois villages A, B et C forment un triangle équilatéral de côté 6 cm. Trace-le.

- On trace la médiatrice de $[AB]$ et celle de $[AC]$: elles se coupent en O, où l'on construit un château d'eau.
- On place le milieu A' de $[BC]$ et l'on trace la médiane $[AA']$.

Durée indicative : 15 *minutes. Barème indicatif :* 5 *points.*



Les trois villages A, B et C en triangle équilatéral, les médiatrices de [AB] et de [AC] qui se coupent en O, et la médiane [AA'].

1. 1,5 pts

Justifie que $OA = OB = OC$.

INDICE

Outil : la propriété de la médiatrice (rappel de 1re année). **Début :** O est sur la médiatrice de $[AB]$, donc…

CORRIGÉ

Médiatrice de $[AB]$. Le point O est sur la médiatrice de $[AB]$. D'après la propriété de la médiatrice, il est à égale distance de A et de B : $OA = OB$.

Médiatrice de $[AC]$. De même, O est sur la médiatrice de $[AC]$, donc $OA = OC$.

Conclusion. Les deux égalités ont OA en commun, donc $OA = OB = OC$.

2. 1,5 pts

Justifie que O est aussi le centre de gravité du triangle ABC.

INDICE

Outil : la propriété du triangle équilatéral. **Début :** d'après la question 1, O est le centre d'un cercle qui passe par les trois sommets.

CORRIGÉ

D'après la question 1, O est à la même distance des trois sommets : c'est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Le triangle ABC est équilatéral. D'après la propriété du triangle équilatéral, le centre de son cercle circonscrit est aussi son centre de gravité.

Conclusion. O est le centre de gravité du triangle ABC.

3. 2 pts

Sur le terrain, le château d'eau est à $3{,}4$ km du village A. Le point A' est le milieu de la route droite qui relie B à C. En déduire les distances OA' et AA' sur le terrain.

INDICE

Outil : la règle des deux tiers. **Point délicat :** ici, on connaît la grande partie OA.

CORRIGÉ

D'après la question 2, O est le centre de gravité, et $[AA']$ est la médiane issue de A. D'après la règle des deux tiers, la partie OA, du côté du sommet, est le double de OA' : $OA = 2\,OA'$.

Calcul de OA'. On prend la moitié de OA :

$$OA' = \frac{3{,}4}{2} = 1{,}7$$

Calcul de AA'. Le point O est sur $[AA']$, donc :

$$\begin{aligned} AA' &= OA + OA' \\ &= 3{,}4 + 1{,}7 \\ &= 5{,}1 \end{aligned}$$

Conclusion. Sur le terrain, $OA' = 1{,}7$ km et $AA' = 5{,}1$ km.

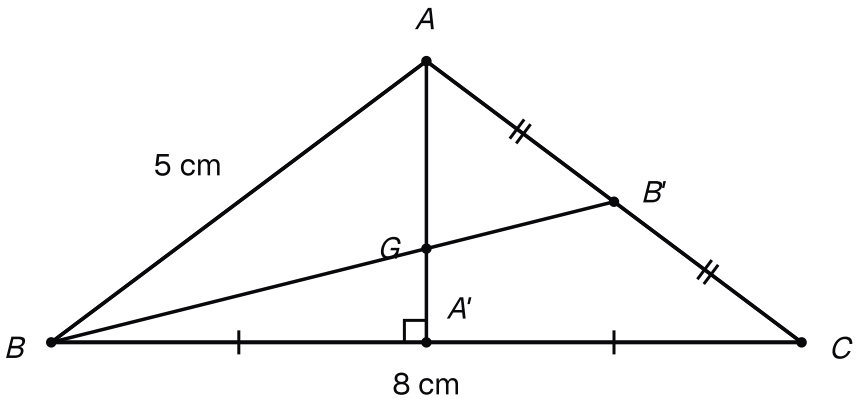
Exercice 3 5 pts

Une médiane perpendiculaire au côté

Soit ABC un triangle et A' le milieu de $[BC]$. On sait que $BC = 8$ cm, que $(AA') \perp (BC)$ et que $AB = 5$ cm.

- Trace $[BC]$, place son milieu A', puis trace la perpendiculaire à (BC) en A'.
- Place sur cette perpendiculaire un point A tel que $AB = 5$ cm.
- Place le milieu B' de $[AC]$. Les segments $[AA']$ et $[BB']$ se coupent en G.

Durée indicative : 15 *minutes. Barème indicatif :* 5 *points.*



La construction de l'énoncé : [BC] de 8 cm, la perpendiculaire en son milieu A', le point A avec AB = 5 cm, puis B' et G.

1. 1,5 pts

Justifie que le triangle ABC est isocèle en A. En déduire AC.

INDICE

Outil : la propriété de la médiane-hauteur. **Début :** (AA') est la médiane issue de A.

CORRIGÉ

Ce que l'on sait. Le point A' est le milieu de $[BC]$, donc (AA') est la médiane issue de A. L'énoncé donne aussi $(AA') \perp (BC)$.

Propriété utilisée. D'après la propriété de la médiane-hauteur, le triangle ABC est isocèle en A. Ses deux côtés issus de A ont donc la même longueur.

Conclusion. Le triangle ABC est isocèle en A, et $AC = AB = 5$ cm.

2. 1 pts

Calcule AB'.

INDICE

Outil : la définition du milieu d'un segment. **Début :** utilise la question 1.

CORRIGÉ

D'après la question 1, $AC = 5$ cm. Le point B' est le milieu de $[AC]$: d'après la définition du milieu, AB' est la moitié de AC.

$$AB' = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

Conclusion. $AB' = 2{,}5$ cm.

3. 1 pts

Justifie que G est le centre de gravité du triangle ABC.

INDICE

Outil : le concours des médianes. **Début :** $[BB']$ joint un sommet au milieu du côté opposé.

CORRIGÉ

Le segment $[AA']$ relie le sommet A au milieu de $[BC]$: c'est la médiane issue de A. Le segment $[BB']$ relie le sommet B au milieu de $[AC]$: c'est la médiane issue de B.

D'après le concours des médianes, deux médianes se coupent au centre de gravité.

Conclusion. Le point G, commun à $[AA']$ et $[BB']$, est le centre de gravité du triangle ABC.

4. 1,5 pts

On donne $AA' = 3$ cm : tu peux le vérifier sur ta figure. En déduire AG, puis GA'.

INDICE

Outil : la règle des deux tiers. **Point délicat :** AG est la grande partie de la médiane, du côté du sommet.

CORRIGÉ

D'après la question 3, G est le centre de gravité. D'après la règle des deux tiers, sur la médiane $[AA']$, en partant du sommet A :

$$AG = \frac{2}{3} \times 3 = 2$$

Le dernier tiers est du côté du milieu A' :

$$GA' = \frac{1}{3} \times 3 = 1$$

Conclusion. $AG = 2$ cm et $GA' = 1$ cm.

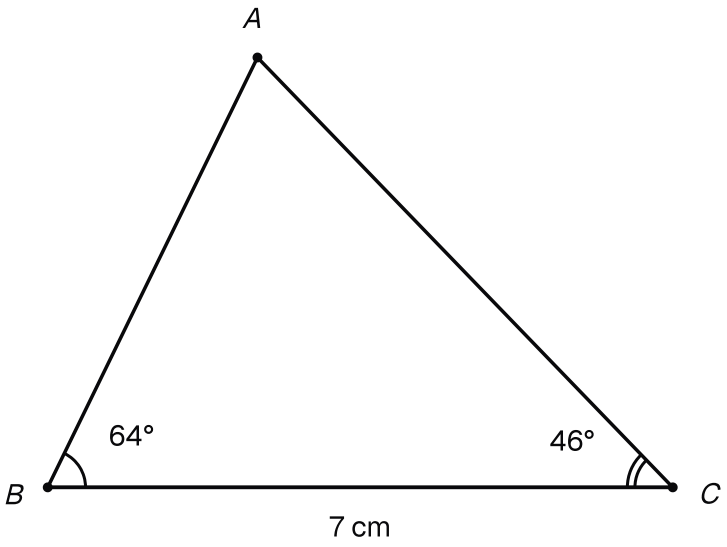
Exercice 4 5 pts

Une bissectrice qui n'est pas une hauteur

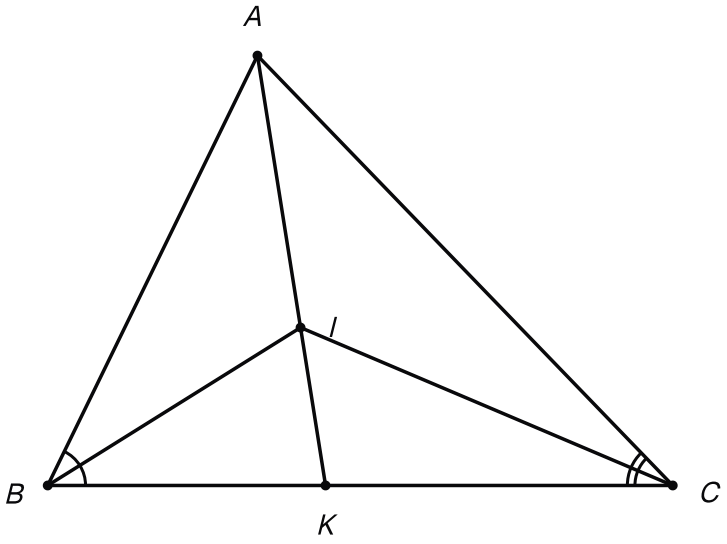
Soit ABC un triangle tel que $BC = 7$ cm, $\widehat{ABC} = 64°$ et $\widehat{ACB} = 46°$.

- Trace $[BC]$, puis les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ au rapporteur : leurs côtés se coupent en A.
- Trace la bissectrice de $\widehat{ABC}$ et celle de $\widehat{ACB}$: elles se coupent en I.
- La droite (AI) coupe $[BC]$ en K.

Durée indicative : 15 *minutes. Barème indicatif :* 5 *points.*



Premier temps de la construction : [BC] de 7 cm, puis les angles de 64 degrés en B et de 46 degrés en C dont les côtés se coupent en A.



Second temps : les bissectrices des angles en B et en C se coupent en I, et la droite (AI) rencontre [BC] en K.

1. 1 pts

Calcule la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

INDICE

Outil : la somme des angles d'un triangle (rappel de 1re année : les trois angles d'un triangle mesurent ensemble $180°$).

CORRIGÉ

D'après la propriété de la somme des angles d'un triangle, les trois angles de ABC mesurent ensemble $180°$. On retranche les deux angles connus :

$$\begin{aligned}&\widehat{BAC}\\&= 180° - 64° - 46°\\&= 70°\end{aligned}$$

Conclusion. L'angle $\widehat{BAC}$ mesure $70°$.

2. 1,5 pts

Que représente le point I pour le triangle ABC ? Justifie que (AI) est la bissectrice de $\widehat{BAC}$, puis calcule $\widehat{BAI}$.

INDICE

Outil : le concours des bissectrices. **Début :** le point I est sur deux bissectrices du triangle ABC.

CORRIGÉ

Le point I. Il est sur deux bissectrices du triangle ABC. Donc, d'après le concours des bissectrices, c'est le point de concours des trois bissectrices : le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC.

La droite (AI). La bissectrice de $\widehat{BAC}$ passe aussi par I. Elle passe par A et par I : c'est la droite (AI).

L'angle $\widehat{BAI}$. La bissectrice coupe l'angle $\widehat{BAC}$ en deux. Avec la question 1 :

$$\widehat{BAI} = \frac{70°}{2} = 35°$$

Conclusion. I est le centre du cercle inscrit, (AI) est la bissectrice de $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BAI}$ mesure $35°$.

3. 1,5 pts

Calcule $\widehat{IBC}$ et $\widehat{ICB}$. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BIC}$.

INDICE

Outil : la définition de la bissectrice, puis la somme des angles du triangle IBC. **Point délicat :** la droite (BI) partage $\widehat{ABC}$ en deux angles de même mesure.

CORRIGÉ

Les deux angles à la base. La droite (BI) est la bissectrice de $\widehat{ABC}$. D'après la définition de la bissectrice, elle coupe cet angle en deux angles égaux :

$$\widehat{IBC} = \frac{64^\circ}{2} = 32^\circ$$

De même, (CI) est la bissectrice de $\widehat{ACB}$:

$$\widehat{ICB} = \frac{46^\circ}{2} = 23^\circ$$

L'angle $\widehat{BIC}$. D'après la propriété de la somme des angles d'un triangle, appliquée au triangle IBC :

$$\begin{aligned}&\widehat{BIC}\\&= 180^\circ - 32^\circ - 23^\circ\\&= 125^\circ\end{aligned}$$

Conclusion. $\widehat{IBC}$ mesure 32°, $\widehat{ICB}$ mesure 23° et $\widehat{BIC}$ mesure 125°.

4. 1 pts

La droite (AI) est-elle la hauteur issue de A ? Calcule $\widehat{AKB}$ pour répondre.

INDICE

Début : dans le triangle ABK, tu connais deux angles. **Point délicat :** une hauteur est perpendiculaire au côté opposé.

CORRIGÉ

Les angles du triangle ABK. Le point K est sur $[BC]$ et sur la demi-droite $[AI)$. Donc $\widehat{ABK} = 64^\circ$ et, d'après la question 2, $\widehat{BAK} = 35^\circ$.

L'angle $\widehat{AKB}$. D'après la propriété de la somme des angles d'un triangle :

$$\begin{aligned}&\widehat{AKB}\\&= 180^\circ - 64^\circ - 35^\circ\\&= 81^\circ\end{aligned}$$

Comparaison. Cet angle n'est pas droit : (AK) n'est pas perpendiculaire à (BC). D'après la définition d'une hauteur, la droite (AI) n'est donc pas la hauteur issue de A.

Conclusion. Non : $\widehat{AKB}$ mesure 81°, et (AI) n'est pas la hauteur issue de A.

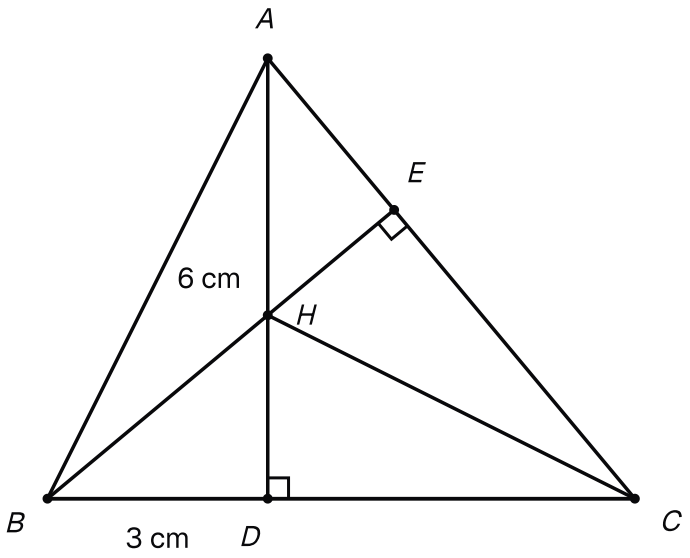
Exercice 5 5 pts

Un orthocentre qui change de triangle

Trace un segment $[BC]$ de longueur 8 cm et place le point D de $[BC]$ tel que $BD = 3$ cm.

- Trace la perpendiculaire à (BC) en D et place sur elle un point A tel que $AD = 6$ cm. Trace le triangle ABC : il a trois angles aigus.
- Construis la hauteur de ABC qui passe par B : elle coupe $[AC]$ en E.
- Les droites (AD) et (BE) se coupent en H. Trace le triangle HBC.

Durée indicative : 15 *minutes. Barème indicatif :* 5 *points.*



La construction de l'énoncé : [BC] de 8 cm, D avec BD = 3 cm, la perpendiculaire en D portant A, la hauteur [BE] et le triangle HBC.

1. 1 pts

Justifie que la droite (AD) est la hauteur issue de A du triangle ABC, et aussi la hauteur issue de H du triangle HBC.

INDICE

Outil : la définition d'une hauteur. **Début :** le point H est sur la droite (AD).

CORRIGÉ

Dans le triangle ABC. La droite (AD) passe par le sommet A et elle est perpendiculaire à (BC). Donc, d'après la définition d'une hauteur, c'est la hauteur issue de A du triangle ABC.

Dans le triangle HBC. Le point H est sur (AD), donc (AD) est aussi la droite (HD). Elle passe par le sommet H du triangle HBC et elle est perpendiculaire à (BC) : d'après la définition d'une hauteur, c'est la hauteur issue de H du triangle HBC.

Conclusion. La droite (AD) est à la fois la hauteur issue de A du triangle ABC et la hauteur issue de H du triangle HBC.

2. 1,5 pts

Dans le triangle HBC, la hauteur issue de C est perpendiculaire à la droite (HB). En déduire que cette hauteur est la droite (CA).

INDICE

Outil : la définition d'une hauteur. **Point délicat :** le point H est sur la droite (BE), donc (HB) et (BE) sont la même droite.

CORRIGÉ

La droite (HB). Le point H est sur (BE), donc (HB) est la droite (BE). Or (BE) est la hauteur issue de B du triangle ABC : d'après la définition d'une hauteur, $(BE) \perp (AC)$.

La droite (CA). Elle passe par le sommet C du triangle HBC et elle est perpendiculaire à (HB). D'après la définition d'une hauteur, (CA) est la hauteur issue de C du triangle HBC.

Remarque sur la figure. Cette hauteur coupe la droite (HB) en E, sur le prolongement de $[BH]$: le triangle HBC a un angle obtus en H.

Conclusion. La hauteur issue de C du triangle HBC est bien la droite (CA).

3. 1 pts

En déduire ce que représente le point A pour le triangle HBC.

INDICE

Début : utilise les questions 1 et 2. **Point délicat :** cherche le point commun des deux hauteurs trouvées.

CORRIGÉ

D'après les questions 1 et 2, les droites (HD) et (CA) sont deux hauteurs du triangle HBC. Elles se coupent au point A.

Conclusion. D'après le concours des hauteurs, le point A est l'orthocentre du triangle HBC.

4. 1,5 pts

On considère maintenant le triangle ABH. Quel point de la figure est son orthocentre ? Justifie.

INDICE

Début : raisonne comme aux questions 1 à 3. **Ensuite :** cherche deux droites de la figure qui passent par un sommet du triangle ABH et sont perpendiculaires à la droite qui porte le côté opposé.

CORRIGÉ

Hauteur issue de B. La droite (AH) est la droite (AD), perpendiculaire à (BC). Ainsi (BC) passe par le sommet B et elle est perpendiculaire à (AH) : d'après la définition d'une hauteur, c'est la hauteur issue de B du triangle ABH.

Hauteur issue de A. De même, (BH) est la droite (BE), perpendiculaire à (AC). Donc la droite (AC) est la hauteur issue de A du triangle ABH.

Point commun. Ces deux hauteurs se coupent en C.

Conclusion. D'après le concours des hauteurs, le point C est l'orthocentre du triangle ABH.