BURHAN

Les droites remarquables d'un triangle : exercices, entraînement

2ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/droites-remarquables-du-triangle/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Les droites remarquables d'un triangle	Entraînement	7

Exercice 1

Des longueurs sur deux médianes

Dans un triangle ABC, on note A' le milieu de $[BC]$, B' celui de $[AC]$ et G le centre de gravité. On sait que $AA' = 13{,}2$ cm et que $BG = 7{,}4$ cm.

1.

Calcule AG et GA'.

INDICE

Outil : la règle des deux tiers. **Début :** AG est une fraction de la médiane AA'. Laquelle ?

CORRIGÉ

Le segment $[AA']$ est la médiane issue de A. D'après la règle des deux tiers, G est aux deux tiers de $[AA']$ en partant du sommet A :

$$AG = \frac{2}{3} \times 13{,}2 = 8{,}8$$

Le dernier tiers sépare G du milieu A' :

$$GA' = \frac{1}{3} \times 13{,}2 = 4{,}4$$

Conclusion. $AG = 8{,}8$ cm et $GA' = 4{,}4$ cm.

2.

Calcule GB', puis la longueur de la médiane $[BB']$.

INDICE

Outil : l'égalité $BG = 2\,GB'$. **Point délicat :** ici, c'est la grande partie qui est connue.

CORRIGÉ

Calcul de GB'. D'après la règle des deux tiers, sur la médiane $[BB']$, on a $BG = 2\,GB'$. La longueur connue BG est la grande partie, donc GB' en est la moitié :

$$GB' = \frac{7{,}4}{2} = 3{,}7$$

Calcul de BB'. Le point G est sur $[BB']$, donc :

$$\begin{aligned} BB' &= BG + GB' \\ &= 7{,}4 + 3{,}7 \\ &= 11{,}1 \end{aligned}$$

Conclusion. $GB' = 3{,}7$ cm et la médiane $[BB']$ mesure $11{,}1$ cm.

3.

Le point G est-il plus proche du sommet A ou du sommet B ?

INDICE

Début : compare les longueurs AG et BG.

CORRIGÉ

On compare les distances de G aux deux sommets. D'après la question 1, $AG = 8{,}8$ cm. L'énoncé donne $BG = 7{,}4$ cm.

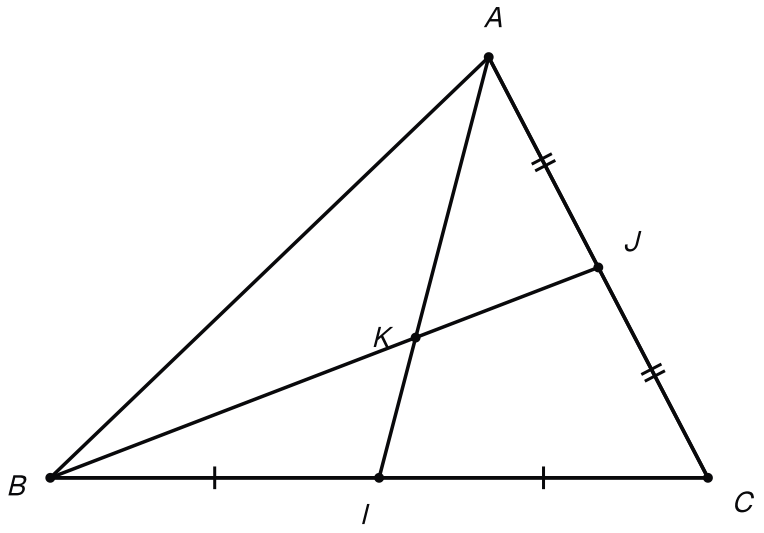
Comme $7{,}4 < 8{,}8$, la distance BG est plus petite que la distance AG.

Conclusion. Le point G est plus proche du sommet B que du sommet A.

Exercice 2

Le point commun de deux médianes

Soit ABC un triangle. Le point I est le milieu de $[BC]$ et J celui de $[AC]$. Les droites (AI) et (BJ) se coupent en K.



Le triangle ABC, les milieux I de [BC] et J de [AC], et le point K où se coupent (AI) et (BJ).

1.

Démontre que K est le centre de gravité du triangle ABC.

INDICE

Outil : le concours des médianes. **Début :** « On sait que (AI) et (BJ) sont deux médianes, car… »

CORRIGÉ

Nature des droites. On sait que (AI) relie le sommet A au milieu I de $[BC]$: c'est la médiane issue de A. De même, (BJ) relie B au milieu J de $[AC]$: c'est la médiane issue de B.

Point commun. D'après le concours des médianes, les médianes d'un triangle se coupent au centre de gravité. Le point K, commun à (AI) et (BJ), est donc ce point.

Conclusion. K est le centre de gravité du triangle ABC.

2.

La droite (CK) coupe $[AB]$ en L. Démontre que L est le milieu de $[AB]$.

INDICE

Outil : la troisième médiane passe par le centre de gravité. **Point délicat :** une seule droite passe par les deux points C et K.

CORRIGÉ

La médiane issue de C. D'après la question 1, K est le centre de gravité. D'après le concours des médianes, la médiane issue de C passe donc aussi par K.

Cette médiane est (CK). Elle passe par les deux points distincts C et K. Par deux points distincts ne passe qu'une droite : c'est la droite (CK).

Le point L. La médiane issue de C coupe le côté $[AB]$ en son milieu. Or (CK) coupe $[AB]$ en L.

Conclusion. L est le milieu de $[AB]$.

3.

On donne $AI = 6{,}9$ cm. Calcule AK et KI.

INDICE

Outil : la règle des deux tiers.

CORRIGÉ

D'après la question 1, K est le centre de gravité, et $[AI]$ est la médiane issue de A. D'après la règle des deux tiers, en partant de A :

$$AK = \frac{2}{3} \times 6{,}9 = 4{,}6$$

Le reste de la médiane, du côté du milieu I, en est le tiers :

$$KI = \frac{1}{3} \times 6{,}9 = 2{,}3$$

Conclusion. $AK = 4{,}6$ cm et $KI = 2{,}3$ cm.

Exercice 3

Un point placé sur une médiane

Dans un triangle LMN, le point P est le milieu de $[MN]$ et $LP = 8{,}7$ cm. Sur le segment $[LP]$, on place le point Q tel que $LQ = 5{,}8$ cm.

1.

Calcule $\frac{2}{3}\,LP$. En déduire que Q est le centre de gravité du triangle LMN.

INDICE

Outil : la seconde façon de reconnaître le centre de gravité. **Début :** compare LQ avec le nombre trouvé.

CORRIGÉ

Calcul. On prend les deux tiers de la longueur de la médiane $[LP]$:

$$\frac{2}{3} \times 8{,}7 = 5{,}8$$

Comme $LQ = 5{,}8$ cm, on a bien $LQ = \frac{2}{3}\,LP$.

Le centre de gravité. Notons G le centre de gravité du triangle LMN. Le segment $[LP]$ est sa médiane issue de L. D'après la règle des deux tiers, G est sur $[LP]$ et $LG = \frac{2}{3}\,LP = 5{,}8$ cm.

Comparaison. Les points Q et G sont deux points du segment $[LP]$ situés à $5{,}8$ cm de L. Or un seul point de $[LP]$ est à cette distance de L. Donc Q et G sont confondus.

Conclusion. Q est le centre de gravité du triangle LMN.

2.

Calcule QP.

INDICE

Début : Q est sur $[LP]$, donc $QP = LP - LQ$. **Ensuite :** contrôle avec le tiers de la médiane.

CORRIGÉ

Le point Q est sur $[LP]$, entre L et P. On retranche donc LQ de LP :

$$QP = 8{,}7 - 5{,}8 = 2{,}9$$

Contrôle : d'après la question 1 et la règle des deux tiers, $QP = \frac{1}{3} \times 8{,}7 = 2{,}9$ cm.

Conclusion. $QP = 2{,}9$ cm.

3.

La droite (MQ) coupe $[LN]$ en R. Où est le point R sur $[LN]$? Justifie.

INDICE

Outil : la médiane issue de M passe par le centre de gravité. **Point délicat :** utilise la question 1.

CORRIGÉ

D'après la question 1, Q est le centre de gravité du triangle LMN. D'après le concours des médianes, la médiane issue de M passe par Q : c'est la droite (MQ).

Une médiane coupe le côté opposé en son milieu. La droite (MQ) coupe donc $[LN]$ en son milieu, et ce point d'intersection est R.

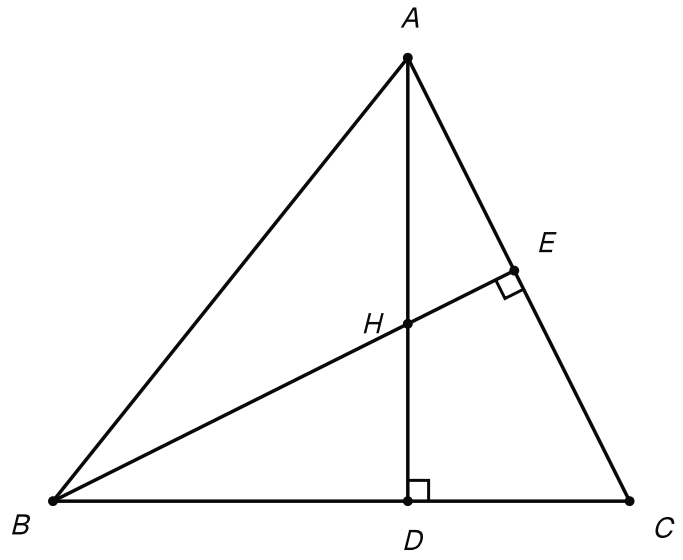
Conclusion. R est le milieu de $[LN]$.

Exercice 4

L'orthocentre et les perpendiculaires

Soit ABC un triangle dont les trois angles sont aigus. La hauteur issue de A coupe $[BC]$ en D. La hauteur issue de B coupe $[AC]$ en E.

Les droites (AD) et (BE) se coupent en H.



Deux hauteurs du triangle ABC, [AD] et [BE], qui se rencontrent en H.

1.

Démontre que $(CH) \perp (AB)$.

INDICE

Outil : le concours des hauteurs. **Début :** « On sait que H est sur deux hauteurs du triangle ABC… »

CORRIGÉ

Le point H. On sait que (AD) et (BE) sont les hauteurs issues de A et de B. Leur point commun H est sur deux hauteurs du triangle ABC : d'après le concours des hauteurs, c'est l'orthocentre.

La hauteur issue de C. Toujours d'après le concours des hauteurs, la troisième hauteur, issue de C, passe aussi par H. C'est donc la droite (CH), et elle est perpendiculaire au côté opposé $[AB]$.

Conclusion. $(CH) \perp (AB)$.

2.

La droite (CH) coupe $[AB]$ en F. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{CFA}$? Que représente la droite (CF) pour le triangle ABC ?

INDICE

Outil : la question 1, puis la définition d'une hauteur. **Début :** le point F est à la fois sur (CH) et sur (AB).

CORRIGÉ

L'angle. Le point F est sur (CH) et sur (AB) : la droite (CH) est aussi la droite (CF). D'après la question 1, $(CF) \perp (AB)$. L'angle $\widehat{CFA}$ est donc droit : $\widehat{CFA} = 90°$.

La droite (CF). Elle passe par le sommet C et elle est perpendiculaire au côté opposé $[AB]$. D'après la définition d'une hauteur, (CF) est la hauteur issue de C.

Conclusion. L'angle $\widehat{CFA}$ mesure $90°$ et la droite (CF) est la hauteur issue de C du triangle ABC.

3.

Le point H peut-il être à l'extérieur du triangle ABC ? Justifie en une phrase.

INDICE

Outil : la position de l'orthocentre (rappel du cours). **Point délicat :** relis ce que l'énoncé dit des angles du triangle ABC.

CORRIGÉ

D'après le rappel du cours, l'orthocentre d'un triangle dont les trois angles sont aigus est à l'intérieur de ce triangle. Or l'énoncé précise que les trois angles du triangle ABC sont aigus.

Conclusion. Non : l'orthocentre H ne peut donc pas être à l'extérieur du triangle ABC.

Exercice 5

Le panneau triangulaire

Un panneau a la forme d'un triangle DEF. Le point M est le milieu de $[EF]$, et la droite (DM) est perpendiculaire à (EF). On mesure $DE = 7$ dm et $EF = 6$ dm.

1.

Démontre que le triangle DEF est isocèle en D.

INDICE

Outil : la propriété de la médiane-hauteur. **Début :** « On sait que (DM) est la médiane issue de D, et que… »

CORRIGÉ

Ce que l'on sait. Le point M est le milieu de $[EF]$, donc (DM) est la médiane issue de D. De plus, l'énoncé donne $(DM) \perp (EF)$.

Propriété utilisée. D'après la propriété de la médiane-hauteur, si la médiane issue d'un sommet est perpendiculaire au côté opposé, le triangle est isocèle en ce sommet.

Conclusion. Le triangle DEF est isocèle en D.

2.

En déduire DF, puis le périmètre du panneau.

INDICE

Début : dans un triangle isocèle en D, les deux côtés issus de D ont la même longueur.

CORRIGÉ

D'après la question 1, le triangle DEF est isocèle en D : ses deux côtés issus de D ont la même longueur. Donc $DF = DE = 7$ dm.

Le périmètre est la somme des longueurs des trois côtés : $7 + 7 + 6 = 20$ dm.

Conclusion. $DF = 7$ dm et le périmètre du panneau mesure 20 dm.

3.

Démontre que (DM) partage $\widehat{EDF}$ en deux angles de même mesure.

INDICE

Outil : la propriété du triangle isocèle. **Point délicat :** M est le milieu de la base $[EF]$.

CORRIGÉ

D'après la question 1, le triangle DEF est isocèle en D, et M est le milieu de sa base $[EF]$. D'après la propriété du triangle isocèle, la médiane (DM) est aussi la bissectrice de $\widehat{EDF}$.

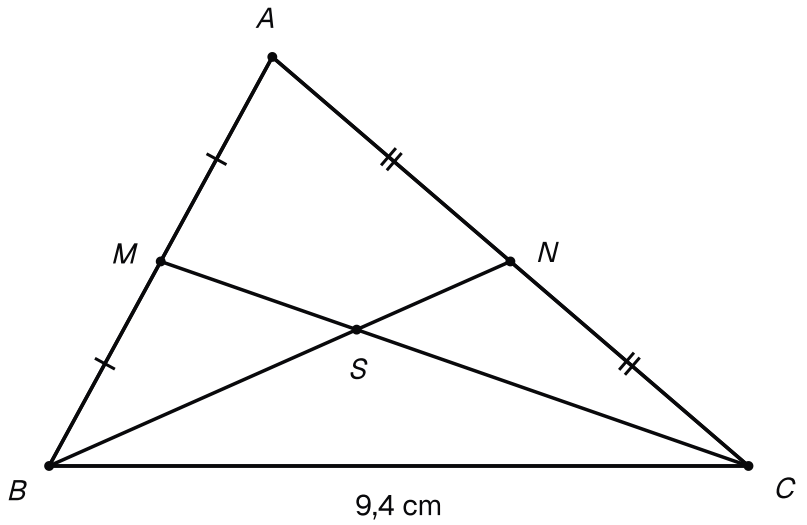
Par définition, une bissectrice partage un angle en deux angles de même mesure.

Conclusion. La droite (DM) partage l'angle $\widehat{EDF}$ en deux angles de même mesure.

Exercice 6

Milieux, parallèle et centre de gravité

Soit ABC un triangle tel que $BC = 9{,}4$ cm. On place le milieu M de $[AB]$ et le milieu N de $[AC]$. Les segments $[BN]$ et $[CM]$ se croisent en S.



Le triangle ABC, les milieux M de [AB] et N de [AC], et les segments [BN] et [CM] qui se croisent en S.

1.

Démontre que $(MN) \parallel (BC)$, puis calcule MN.

INDICE

Outil : la propriété de la droite des milieux. **Début :** « On sait que M et N sont les milieux de deux côtés… »

CORRIGÉ

Le parallélisme. On sait que M et N sont les milieux des côtés $[AB]$ et $[AC]$. Or, d'après la propriété de la droite des milieux, la droite qui joint ces deux milieux est parallèle au troisième côté : $(MN) \parallel (BC)$.

La longueur. La propriété de la droite des milieux donne aussi $MN = \dfrac{1}{2}\,BC$. Donc :

$$MN = \frac{9{,}4}{2} = 4{,}7$$

Conclusion. $(MN) \parallel (BC)$ et $MN = 4{,}7$ cm.

2.

Démontre que S est le centre de gravité du triangle ABC.

INDICE

Outil : le concours des médianes. **Début :** reconnais d'abord les segments $[BN]$ et $[CM]$.

CORRIGÉ

Le segment $[BN]$ relie le sommet B au milieu N de $[AC]$: c'est la médiane issue de B. De même, $[CM]$ est la médiane issue de C.

D'après le concours des médianes, les médianes se coupent au centre de gravité. Leur point commun S est donc ce point.

Conclusion. S est le centre de gravité du triangle ABC.

3.

On donne $BN = 6{,}6$ cm et $CS = 6{,}4$ cm. Calcule BS et SN, puis la longueur CM.

INDICE

Outil : la règle des deux tiers. **Point délicat :** sur $[CM]$, c'est la grande partie CS qui est connue.

CORRIGÉ

Sur la médiane $[BN]$. D'après la question 2 et la règle des deux tiers :

$$BS = \frac{2}{3} \times 6{,}6 = 4{,}4$$

$$SN = \frac{1}{3} \times 6{,}6 = 2{,}2$$

Sur la médiane $[CM]$. C'est la grande partie CS qui est connue. La règle des deux tiers donne $CS = 2\,SM$, donc :

$$SM = \frac{6{,}4}{2} = 3{,}2$$

On ajoute les deux parties de la médiane :

$$CM = 6{,}4 + 3{,}2 = 9{,}6$$

Conclusion. $BS = 4{,}4$ cm, $SN = 2{,}2$ cm, $SM = 3{,}2$ cm et $CM = 9{,}6$ cm.

Exercice 7

La plaque de cuivre en équilibre

Un artisan découpe une plaque de cuivre en forme de triangle équilatéral ABC. Il veut la faire tenir en équilibre sur la pointe d'une tige, placée au centre de gravité G. La médiane $[AA']$ de la plaque mesure $18{,}9$ cm.

1.

À quelle distance du sommet A doit-il placer la pointe de la tige ?

INDICE

Outil : la règle des deux tiers.

CORRIGÉ

La pointe doit être au centre de gravité G, qui est sur la médiane $[AA']$. D'après la règle des deux tiers, en partant du sommet A :

$$AG = \frac{2}{3} \times 18{,}9 = 12{,}6$$

Conclusion. L'artisan doit placer la pointe à $12{,}6$ cm du sommet A.

2.

Calcule GB et GC. Justifie.

INDICE

Outil : la propriété du triangle équilatéral. **Point délicat :** le centre du cercle circonscrit est à la même distance des trois sommets.

CORRIGÉ

D'après la propriété du triangle équilatéral, le centre de gravité G est aussi le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Ce cercle passe par les trois sommets, donc G est à la même distance de A, de B et de C.

D'après la question 1, cette distance commune vaut $GA = 12{,}6$ cm.

Conclusion. $GB = GC = GA = 12{,}6$ cm.

3.

Calcule GA'. L'artisan veut aussi graver un cercle de centre G qui touche les trois bords de la plaque : comment s'appelle ce cercle ?

INDICE

Outil : la règle des deux tiers, puis la propriété du triangle équilatéral. **Point délicat :** le cercle qui touche les trois côtés d'un triangle a un nom vu en 1re année.

CORRIGÉ

Calcul de GA'. D'après la règle des deux tiers, GA' est le tiers de la médiane :

$$GA' = \frac{1}{3} \times 18{,}9 = 6{,}3$$

Le cercle gravé. Le cercle qui touche les trois côtés d'un triangle est son cercle inscrit. D'après la propriété du triangle équilatéral, le point G est aussi le centre du cercle inscrit.

Conclusion. $GA' = 6{,}3$ cm, et le cercle de centre G qui touche les trois bords est le cercle inscrit dans la plaque.