BURHAN

Les droites remarquables d'un triangle : exercices, application

2ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/droites-remarquables-du-triangle/exercices/application

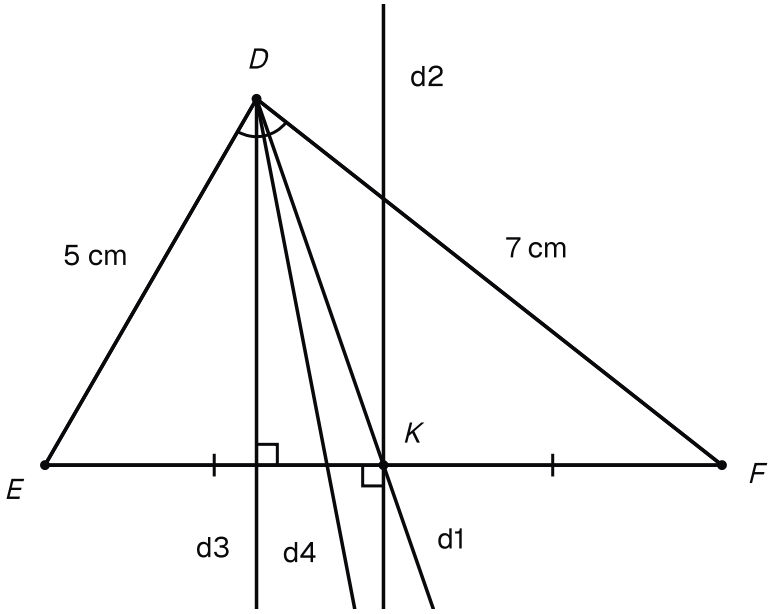
Chapitre	Palier	Exercices
Les droites remarquables d'un triangle	Application	8

Exercice 1

Quatre droites à reconnaître

Trace un triangle DEF avec $DE = 5$ cm, $DF = 7$ cm et $EF = 8$ cm. Place le milieu K de $[EF]$. On considère quatre droites :

- la droite d_1 passe par D et par K ;
- la droite d_2 passe par K et elle est perpendiculaire à (EF) ;
- la droite d_3 passe par D et elle est perpendiculaire à (EF) ;
- la droite d_4 passe par D et partage $\widehat{EDF}$ en deux angles de même mesure.



Le triangle DEF, le milieu K de [EF] et les quatre droites d1, d2, d3 et d4 de l'énoncé.

1.

Donne le nom de chacune des quatre droites, avec le sommet ou le côté concerné.

INDICE

Outil : les définitions de la médiane, de la médiatrice, de la hauteur et de la bissectrice. **Début :** pour chaque droite, regarde par quel point elle passe et si elle forme un angle droit avec (EF).

CORRIGÉ

Pour chaque droite, on regarde par quels points elle passe et si elle coupe (EF) à angle droit.

- d_1 passe par le sommet D et par le milieu K du côté opposé $[EF]$. D'après la définition d'une médiane, c'est la médiane issue de D.
- d_2 passe par le milieu K de $[EF]$ et elle est perpendiculaire à (EF). D'après la définition de la médiatrice, c'est la médiatrice de $[EF]$.
- d_3 passe par le sommet D et coupe (EF) à angle droit. D'après la définition d'une hauteur, c'est la hauteur issue de D.
- d_4 passe par D et coupe l'angle $\widehat{EDF}$ en deux angles égaux. D'après la définition de la bissectrice, c'est la bissectrice de $\widehat{EDF}$.

Conclusion. d_1 est la médiane issue de D, d_2 la médiatrice de $[EF]$, d_3 la hauteur issue de D et d_4 la bissectrice de $\widehat{EDF}$.

2.

Les droites d_1 et d_3 sont-elles confondues ? Justifie ta réponse.

INDICE

Outil : la propriété de la médiatrice (rappel de 1re année). **Début :** compare les longueurs DE et DF. **Point délicat :** les droites d_2 et d_3 sont perpendiculaires à la même droite (EF).

CORRIGÉ

Le point D et la droite d_2. On sait que $DE = 5$ cm et $DF = 7$ cm. Le point D n'est donc pas à égale distance de E et de F. D'après la propriété de la médiatrice, D n'est pas sur la médiatrice d_2 de $[EF]$.

Les droites d_2 et d_3. Toutes deux sont perpendiculaires à la droite (EF), donc elles sont parallèles. La droite d_3 passe par D, qui n'est pas sur d_2 : ces deux parallèles sont distinctes.

Le point K. Deux parallèles distinctes n'ont aucun point commun. Le point K est sur d_2, donc d_3 ne passe pas par le point K.

Conclusion. Les droites d_1 et d_3 passent toutes deux par D, mais seule d_1 passe par K. Donc d_1 et d_3 ne sont pas confondues.

Exercice 2

Construire le centre de gravité

Trace un triangle MNP tel que $MN = 6$ cm, $NP = 8$ cm et $MP = 7$ cm.

1.

Place le milieu I de $[NP]$ et le milieu J de $[MP]$. Donne les longueurs NI et MJ.

INDICE

Outil : le milieu partage un segment en deux longueurs égales. **Début :** calcule la moitié de NP, puis celle de MP.

CORRIGÉ

D'après la définition du milieu, I coupe $[NP]$ en deux segments de même longueur. Donc $NI = \dfrac{8}{2} = 4$ cm.

De la même façon, J coupe $[MP]$ en deux moitiés : $MJ = \dfrac{7}{2} = 3{,}5$ cm.

Conclusion. $NI = 4$ cm et $MJ = 3{,}5$ cm. On place I sur $[NP]$ à 4 cm de N, puis J sur $[MP]$ à $3{,}5$ cm de M.

2.

Trace les segments $[MI]$ et $[NJ]$. Ils se croisent en un point que l'on nomme G. Que représente G pour le triangle MNP ?

INDICE

Outil : le concours des médianes. **Début :** quelle sorte de droites viens-tu de tracer ?

CORRIGÉ

Le segment $[MI]$ relie le sommet M au milieu I du côté opposé $[NP]$: c'est la médiane issue de M. De la même façon, $[NJ]$ est la médiane issue de N.

D'après le concours des médianes, les médianes d'un triangle se coupent au centre de gravité. Le point G, où se croisent $[MI]$ et $[NJ]$, est donc ce point.

Conclusion. Le point G est le centre de gravité du triangle MNP.

3.

Place le milieu L de $[MN]$. Quelle droite dois-tu voir passer par G pour contrôler ta figure ?

INDICE

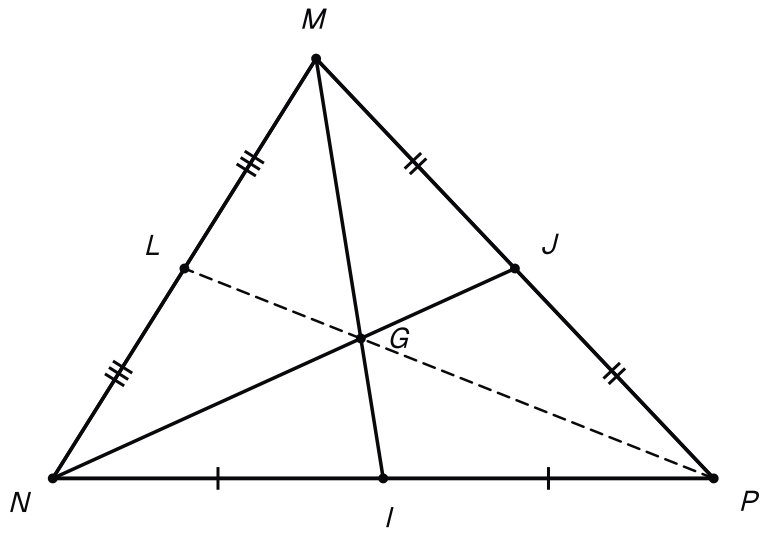
Outil : la troisième médiane. **Début :** calcule d'abord ML.

CORRIGÉ

D'après la définition du milieu, $ML = \dfrac{6}{2} = 3$ cm : on place L sur $[MN]$ à 3 cm de M.

La droite (PL) relie le sommet P au milieu du côté opposé : c'est la troisième médiane. D'après le concours des médianes, (PL) passe aussi par G.

Conclusion. Pour contrôler la figure, on regarde si la médiane (PL) passe par G. Si elle n'y passe pas, reprends tes mesures et tes tracés.



Les trois médianes du triangle MNP, issues des milieux I, J et L, passent par le même point G.

Exercice 3

Deux médianes, deux calculs

Le point G est le centre de gravité d'un triangle ABC. Les points A' et B' sont les milieux respectifs de $[BC]$ et de $[AC]$.

1.

On donne $AA' = 12$ cm. Calcule AG et GA'.

INDICE

Outil : la règle des deux tiers. **Début :** écris $AG = \dfrac{2}{3}\,AA'$.

CORRIGÉ

Le segment $[AA']$ est la médiane issue de A, et G se trouve sur ce segment. D'après la règle des deux tiers, AG vaut les deux tiers de AA' :

$$AG = \frac{2}{3} \times 12 = 8$$

Entre G et le milieu A', il reste le dernier tiers de la médiane :

$$GA' = \frac{1}{3} \times 12 = 4$$

Contrôle : $8 + 4 = 12$, on retrouve la longueur AA'.

Conclusion. $AG = 8$ cm et $GA' = 4$ cm.

2.

On donne $BB' = 10{,}2$ cm. Calcule BG et GB'.

INDICE

Outil : la règle des deux tiers, sur la médiane issue de B. **Point délicat :** pars du sommet B pour compter les deux tiers.

CORRIGÉ

Le segment $[BB']$ est la médiane issue de B. On compte les deux tiers à partir du sommet B. D'après la règle des deux tiers :

$$BG = \frac{2}{3} \times 10{,}2 = 6{,}8$$

La partie restante, du côté du milieu B', est le tiers de la médiane :

$$GB' = \frac{1}{3} \times 10{,}2 = 3{,}4$$

Contrôle : $6{,}8 + 3{,}4 = 10{,}2$.

Conclusion. $BG = 6{,}8$ cm et $GB' = 3{,}4$ cm.

Exercice 4

Retrouver la longueur d'une médiane

Le point G est le centre de gravité d'un triangle DEF. On note D' le milieu de $[EF]$ et E' le milieu de $[DF]$.

1.

On mesure $DG = 4$ cm. Calcule GD', puis DD'.

INDICE

Outil : l'égalité $DG = 2\,GD'$. **Début :** GD' est la moitié de DG.

CORRIGÉ

D'après la règle des deux tiers, sur la médiane $[DD']$, la partie du côté du sommet est le double de la partie du côté du milieu :

$$DG = 2\,GD'$$

Calcul de GD'. La longueur GD' est donc la moitié de DG :

$$GD' = \frac{4}{2} = 2$$

Calcul de DD'. Le point G est sur $[DD']$, donc on ajoute les deux parties :

$$\begin{aligned} DD' &= DG + GD' \\ &= 4 + 2 = 6 \end{aligned}$$

Conclusion. $GD' = 2$ cm et $DD' = 6$ cm.

2.

On mesure $GE' = 1{,}9$ cm. Calcule EG, puis EE'.

INDICE

Outil : la même égalité, sur la médiane $[EE']$. **Point délicat :** GE' est la petite partie, du côté du milieu.

CORRIGÉ

Calcul de EG. D'après la règle des deux tiers, sur la médiane $[EE']$, on a $EG = 2\,GE'$. On double donc la petite partie :

$$\begin{aligned} EG &= 2\,GE' \\ &= 2 \times 1{,}9 = 3{,}8 \end{aligned}$$

Calcul de EE'. Le point G est sur $[EE']$: la médiane est la somme de ses deux parties.

$$\begin{aligned} EE' &= EG + GE' \\ &= 3{,}8 + 1{,}9 \\ &= 5{,}7 \end{aligned}$$

Conclusion. $EG = 3{,}8$ cm et $EE' = 5{,}7$ cm.

Exercice 5

Un olivier au centre du jardin

Un jardin a la forme d'un triangle ABC. Une allée droite relie le coin A au milieu A' du côté $[BC]$. Elle mesure 21 m.

Le jardinier veut planter un olivier au centre de gravité G du jardin.

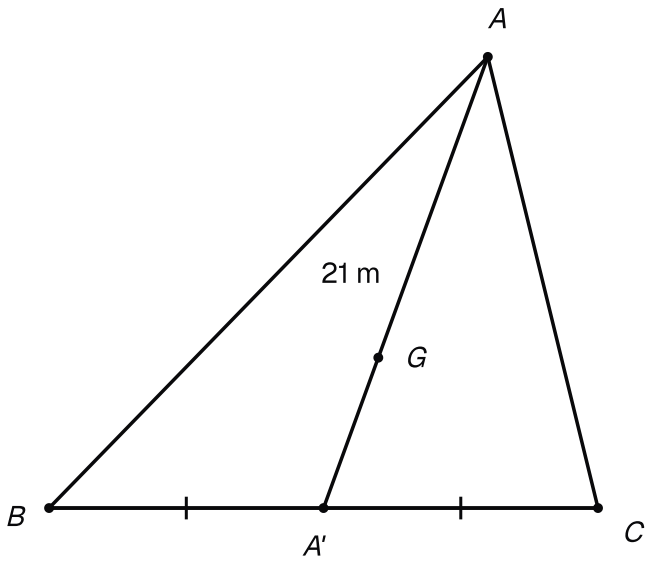


Schéma du jardin ABC : l'allée [AA'] de 21 m mène du coin A au milieu A' du côté [BC], et G marque l'olivier.

1.

À quelle distance du coin A doit-il planter l'olivier ?

INDICE

Outil : la règle des deux tiers. **Début :** l'allée $[AA']$ est une médiane du triangle.

CORRIGÉ

L'allée $[AA']$ relie le coin A au milieu A' du côté $[BC]$. D'après la définition d'une médiane, c'est la médiane du jardin issue de A.

L'olivier se place donc sur cette allée. D'après la règle des deux tiers, sa distance au coin A est les deux tiers de AA' :

$$AG = \frac{2}{3} \times 21 = 14$$

Conclusion. Le jardinier doit planter l'olivier sur l'allée, à 14 m du coin A.

2.

En déduire la distance entre l'olivier et le point A'.

INDICE

Début : retranche AG de la longueur de l'allée. **Ensuite :** contrôle avec $GA' = \frac{1}{3}\,AA'$.

CORRIGÉ

Le point G est sur l'allée $[AA']$, entre A et A'. On retranche donc AG de la longueur de l'allée :

$$GA' = 21 - 14 = 7$$

Contrôle : d'après la règle des deux tiers, $GA' = \frac{1}{3} \times 21 = 7$ m.

Conclusion. L'olivier est à 7 m du point A'.

Exercice 6

Le pignon de la maison

Le pignon d'une maison a la forme d'un triangle JKL isocèle en J. La poutre du bas $[KL]$ mesure 8 m et l'angle $\widehat{KJL}$ mesure $116°$.

Le point I est le milieu de $[KL]$. Une poutre verticale relie J à I.

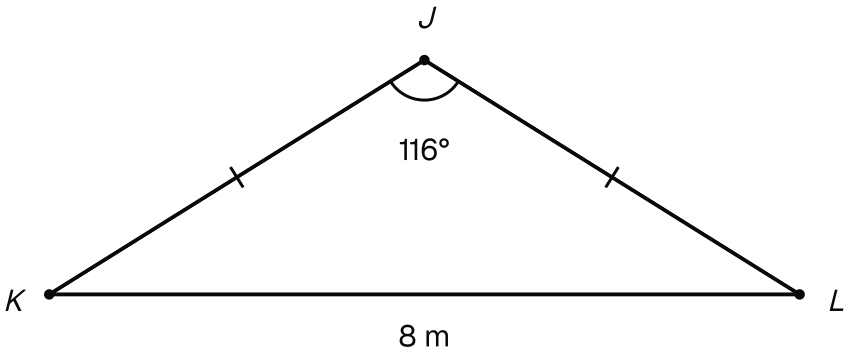
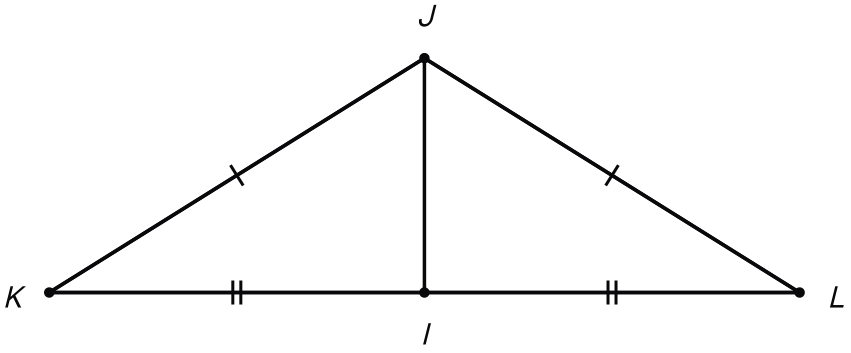


Schéma du pignon JKL, isocèle en J, avec la poutre du bas [KL] de 8 m et l'angle de 116 degrés au sommet J.



Le même pignon avec le milieu I de la poutre [KL] et la poutre verticale [JI] qui le relie au sommet J.

1.

Calcule KI.

INDICE

Outil : la définition du milieu d'un segment.

CORRIGÉ

Le point I est le milieu de la poutre $[KL]$. D'après la définition du milieu, il la coupe en deux longueurs égales :

$$KI = \frac{8}{2} = 4$$

Conclusion. $KI = 4$ m.

2.

Justifie que la poutre (JI) est perpendiculaire à (KL).

INDICE

Outil : la propriété du triangle isocèle. **Début :** (JI) joint le sommet principal au milieu de la base.

CORRIGÉ

Ce que l'on sait. Le triangle JKL est isocèle en J, et I est le milieu de sa base $[KL]$. La droite (JI) est donc la médiane issue de J.

Propriété utilisée. D'après la propriété du triangle isocèle, cette médiane est aussi la hauteur issue de J. Elle coupe donc la base à angle droit.

Conclusion. La poutre (JI) est perpendiculaire à la poutre du bas : $(JI) \perp (KL)$.

3.

Calcule la mesure de l'angle $\widehat{KJI}$.

INDICE

Outil : la propriété du triangle isocèle, encore : pense au rôle de bissectrice. **Point délicat :** une bissectrice partage l'angle en deux angles égaux.

CORRIGÉ

D'après la propriété du triangle isocèle, la médiane (JI) est aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{KJL}$. Elle coupe cet angle en deux angles de même mesure :

$$\widehat{KJI} = \frac{116^\circ}{2} = 58^\circ$$

Conclusion. L'angle $\widehat{KJI}$ mesure 58°.

Exercice 7

Les quatre noms d'un même point

Trace un triangle équilatéral RST de côté $6{,}2$ cm. Place le milieu M de $[ST]$, puis trace la médiane $[RM]$.

1.

Calcule SM.

INDICE

Outil : la définition du milieu d'un segment.

CORRIGÉ

Le triangle est équilatéral, donc $ST = 6{,}2$ cm. D'après la définition du milieu, M coupe $[ST]$ en deux longueurs égales :

$$SM = \frac{6{,}2}{2} = 3{,}1$$

Conclusion. $SM = 3{,}1$ cm.

2.

Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{SRM}$? Justifie.

INDICE

Outil : la propriété du triangle équilatéral. **Début :** chaque angle d'un triangle équilatéral mesure $60°$ (rappel de 1re année).

CORRIGÉ

Rôle de (RM). La droite (RM) est la médiane issue de R du triangle équilatéral RST. D'après la propriété du triangle équilatéral, elle est aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{SRT}$.

Mesure de l'angle. Chaque angle d'un triangle équilatéral mesure $60°$. La bissectrice coupe donc l'angle $\widehat{SRT}$ en deux angles de moitié :

$$\widehat{SRM} = \frac{60°}{2} = 30°$$

Conclusion. L'angle $\widehat{SRM}$ mesure $30°$.

3.

On note O le centre de gravité du triangle RST. Quels autres noms peut-on donner au point O ?

INDICE

Outil : la propriété du triangle équilatéral. **Ensuite :** pense aux points de concours des hauteurs, des médiatrices et des bissectrices.

CORRIGÉ

D'après la propriété du triangle équilatéral, le centre de gravité O de RST est confondu avec les trois autres points de concours :

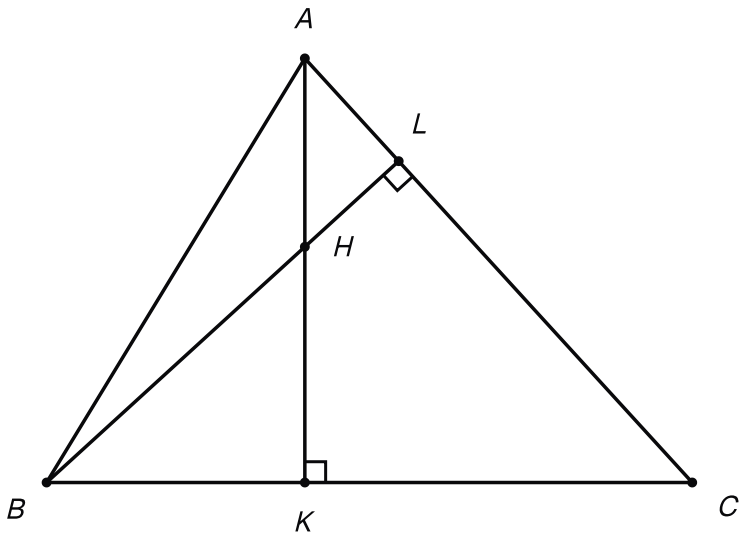
- celui des hauteurs, qui est l'orthocentre ;
- celui des médiatrices, qui est le centre du cercle circonscrit ;
- celui des bissectrices, qui est le centre du cercle inscrit.

Conclusion. Le point O est aussi l'orthocentre du triangle RST, le centre de son cercle circonscrit et le centre de son cercle inscrit.

Exercice 8

Nommer un point de concours

Trace un triangle ABC dont les trois angles sont aigus. Trace la hauteur issue de A, qui coupe $[BC]$ en K, et la hauteur issue de B, qui coupe $[AC]$ en L. Les droites (AK) et (BL) se coupent en H.



Le triangle ABC aux angles aigus, ses hauteurs [AK] et [BL] et leur point de rencontre H.

1.

Comment s'appelle le point H pour le triangle ABC ?

INDICE

Outil : le point de concours des hauteurs (rappel de 1re année).

CORRIGÉ

Les droites (AK) et (BL) sont deux hauteurs du triangle ABC, et elles se coupent en H. D'après le concours des hauteurs, les trois hauteurs d'un triangle passent par un même point, appelé orthocentre.

Conclusion. Le point H est l'orthocentre du triangle ABC.

2.

Que peux-tu dire des droites (CH) et (AB) ? Justifie.

INDICE

Outil : la troisième hauteur passe aussi par H. **Début :** « On sait que H est l'orthocentre… »

CORRIGÉ

On sait, d'après la question 1, que H est l'orthocentre du triangle ABC. Or, d'après le concours des hauteurs, la hauteur issue de C passe aussi par H.

Cette hauteur passe par C et par H : c'est la droite (CH). Comme toute hauteur, elle est perpendiculaire au côté opposé.

Conclusion. Les droites (CH) et (AB) sont perpendiculaires : $(CH) \perp (AB)$.

3.

Trace les bissectrices des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ABC}$: elles se coupent en I. Que représente I pour le triangle ABC ?

INDICE

Outil : le point de concours des bissectrices (rappel de 1re année).

CORRIGÉ

Le point I est sur deux bissectrices du triangle ABC. D'après le concours des bissectrices, la bissectrice de $\widehat{ACB}$ passe aussi par I : les trois bissectrices se coupent en I.

Le point où se coupent les trois bissectrices d'un triangle est le centre de son cercle inscrit.

Conclusion. Le point I est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC.