BURHAN

Les droites remarquables d'un triangle

2ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/droites-remarquables-du-triangle/cours

Chapitre	Semestre
Les droites remarquables d'un triangle	Semestre 1

Faire tenir un triangle en équilibre

Découpe un triangle dans un carton épais. Essaie de le faire tenir à plat sur la pointe d'un crayon. Si la pointe est mal placée, le carton bascule.

Il existe un seul bon endroit. Comment le trouver sans tâtonner ?

Devine : Une prédiction

Trace les trois droites qui joignent chaque sommet du triangle au milieu du côté opposé. Que vont faire ces trois droites ?

A. Elles sont parallèles deux à deux.

Faux.

Elles partent de trois sommets différents et traversent toutes le triangle : elles se croisent.

B. Elles passent par un même point.

Juste.

Juste : c'est le bon endroit pour poser la pointe du crayon.

C. Elles forment un petit triangle au centre.

Faux.

C'est ce que donne un tracé imprécis. Un tracé soigné montre un seul point.

D. Elles coupent les côtés à angle droit.

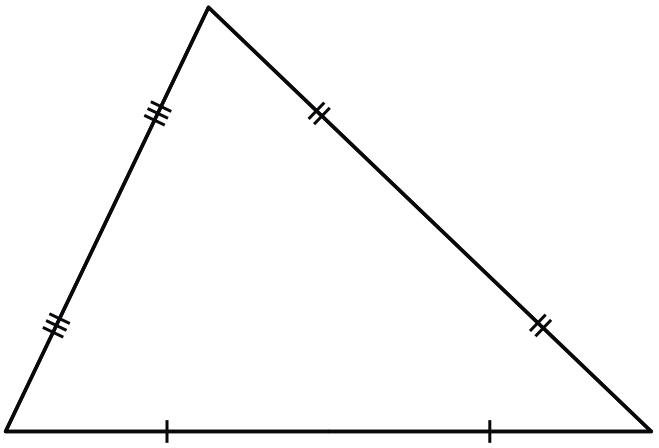
Faux.

Une telle droite n'est perpendiculaire au côté que dans un cas particulier : celui du triangle isocèle en ce sommet.

Correction

Les trois droites passent par un même point. C'est là qu'il faut poser la pointe du crayon : le carton tient en équilibre.

Ce point s'appelle le **centre de gravité** du triangle.



Un triangle dont les trois côtés sont partagés en leur milieu : ce sont les points à relier aux sommets opposés.

Ces trois droites s'appellent les **médianes** du triangle. Dans ce chapitre, tu revois d'abord les hauteurs, les médiatrices et les bissectrices.

Puis tu construis les médianes et le centre de gravité. Tu apprends où ce point se place sur chaque médiane. Tu découvres enfin les droites du triangle isocèle et du triangle équilatéral, et tu t'en sers pour démontrer.

Rappels : hauteurs, médiatrices, bissectrices

Trois droites déjà connues

Vérifie : Reconnaître une droite

Trace un triangle ABC aux trois angles aigus. Place le point K de $[BC]$ tel que $(AK) \perp (BC)$. Comment s'appelle la droite (AK) ?

A. La médiatrice de $[BC]$.

Faux.

La médiatrice passe par le milieu de $[BC]$. Le point K n'est pas ce milieu, en général.

B. Une parallèle à (BC).

Faux.

Elle coupe (BC) en K : elle ne lui est donc pas parallèle.

C. La hauteur issue de A.

Juste.

Juste : elle part du sommet A et coupe (BC) à angle droit.

D. La bissectrice de $\widehat{BAC}$.

Faux.

Rien ne dit qu'elle partage l'angle en A en deux angles égaux.

Correction
La droite (AK) passe par le sommet A et elle est perpendiculaire au côté opposé $[BC]$.

C'est donc la **hauteur** issue de A. Le point K s'appelle le pied de cette hauteur.

Rappel de 1re année : la **hauteur** issue de A est la droite qui passe par A et qui est perpendiculaire à (BC).

Les trois hauteurs sont **concourantes** : elles se coupent en un même point, l'**orthocentre**.

Rappel de 1re année : la **médiatrice** d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment en son milieu.

Un point est sur la médiatrice de $[BC]$ exactement quand il est à la même distance de B et de C.

Les trois médiatrices d'un triangle se coupent au centre du **cercle circonscrit**, qui passe par les trois sommets.

Rappel de 1re année : la **bissectrice** d'un angle partage cet angle en deux angles de même mesure.

Les trois bissectrices d'un triangle se coupent au centre du **cercle inscrit**. Ce cercle touche les trois côtés du triangle.

Trois points de concours

À retenir : Trois familles, trois points

- Les trois **hauteurs** se coupent en l'**orthocentre**.
- Les trois **médiatrices** se coupent au centre du cercle circonscrit.
- Les trois **bissectrices** se coupent au centre du cercle inscrit.

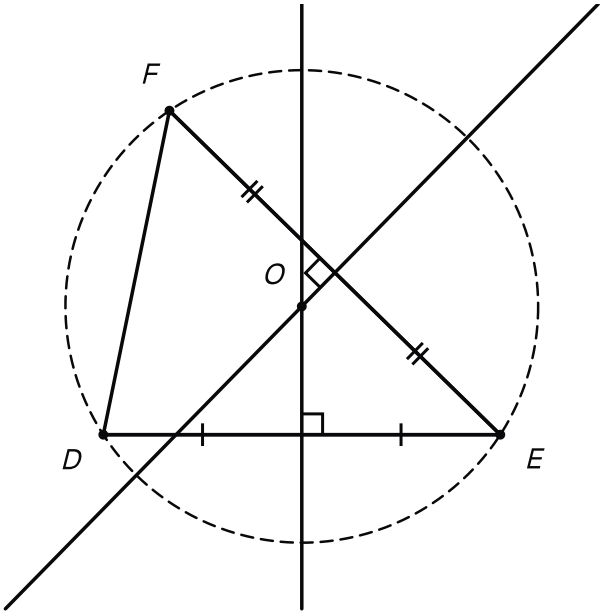
Pour placer l'un de ces points, deux droites suffisent. La troisième passe aussi par leur point commun.

Exemple : le centre du cercle circonscrit

Trace un triangle DEF avec $DE = 6$ cm, $EF = 7$ cm et $DF = 5$ cm. Le milieu de $[DE]$ est à 3 cm de D. La perpendiculaire à $[DE]$ en ce milieu est la médiatrice de $[DE]$.

Trace de même la médiatrice de $[EF]$, en son milieu, à $3{,}5$ cm de E. Leur point commun O est le centre du cercle circonscrit.

Contrôle au compas : le cercle de centre O qui passe par D passe aussi par E et par F.



Les médiatrices de [DE] et de [EF] se coupent en O, et le cercle de centre O passe par les trois sommets du triangle DEF.

Quand une hauteur sort du triangle

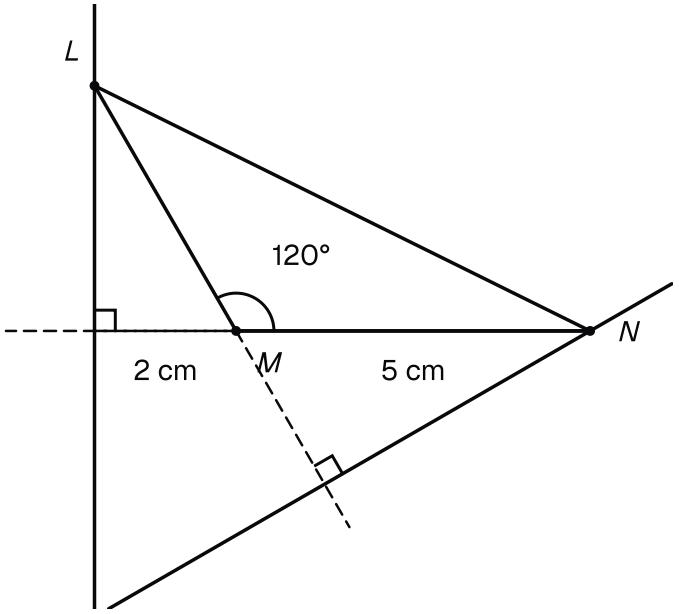
Exemple : tracer une hauteur qui sort du triangle

Trace un triangle LMN avec $LM = 4$ cm, $MN = 5$ cm et $\widehat{LMN} = 120°$. L'angle en M est obtus.

Le **prolongement** d'un côté est la partie de la droite qui continue ce côté au-delà d'un sommet. Prolonge le côté $[MN]$ au-delà de M, à la règle. Pose un côté de l'équerre le long de (MN), puis fais-la glisser jusqu'à ce que l'autre côté de l'angle droit passe par L.

Trace cette droite : c'est la hauteur issue de L. Son pied est sur le prolongement, à 2 cm de M.

De même, la hauteur issue de N coupe le prolongement de $[LM]$: l'orthocentre est à l'extérieur du triangle, du côté de M.



Dans le triangle LMN obtus en M, la hauteur issue de L tombe sur le prolongement de [MN], à 2 cm de M.

Attention : une hauteur peut sortir du triangle

✗ « La hauteur issue de L coupe toujours le côté $[MN]$. »

✓ Dans un triangle qui a un angle obtus, deux hauteurs coupent les **prolongements** des côtés, et non les côtés. Pour les tracer, prolonge le côté à la règle. L'orthocentre est alors à l'extérieur du triangle.

Si les trois angles sont aigus, l'orthocentre est à l'intérieur du triangle. Le centre de gravité, que tu vas découvrir, est toujours à l'intérieur.

À toi

À toi : Un angle obtus

Trace un triangle PQR avec $PQ = 4$ cm, $PR = 3$ cm et $\widehat{QPR} = 110°$. Quelles hauteurs coupent les prolongements des côtés ? Où est l'orthocentre ?

Aide : prolonge le côté à la règle, puis fais glisser l'équerre.

Trace ta figure et écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Repère l'angle obtus : il est en P.
Indice 2
La hauteur issue de Q est perpendiculaire à (PR) : prolonge $[PR]$ au-delà de P pour la tracer.
Indice 3
Point délicat : regarde si la hauteur issue de P sort, elle aussi, du triangle.

Réponse
L'angle en P mesure $110°$: il est obtus.

La hauteur issue de Q coupe la droite (PR) au-delà de P. La hauteur issue de R coupe la droite (PQ) au-delà de P. La hauteur issue de P, elle, coupe le côté $[QR]$.

Conclusion. Les hauteurs issues de Q et de R coupent les prolongements des côtés. Les trois hauteurs se coupent donc à l'extérieur du triangle, du côté de P.

Ces trois familles de droites te sont familières. Il en manque une : celle qui équilibre le carton. C'est l'objet de la section suivante.

Les médianes d'un triangle

Un sommet et un milieu

Devine : Un point sur un côté

Trace un segment $[BC]$ de 8 cm, puis un point A hors de la droite (BC). Place le point A' de $[BC]$ tel que $BA' = 4$ cm. Que représente A' pour le segment $[BC]$?

A. Le pied de la hauteur issue de A.
Faux.
Rien ne dit que (AA') est perpendiculaire à (BC) : cela dépend de la place de A.

B. Le milieu de $[BC]$.
Juste.
Juste : $BA' = 4$ cm, la moitié de 8 cm.

C. Le centre du cercle circonscrit.
Faux.
Ce centre est à la même distance des trois sommets. Ici, rien ne parle de A.

D. Un point du segment, sans nom particulier.
Faux.
Il est à la même distance de B et de C : c'est un point particulier.

Correction
On a $BA' = 4$ cm et $BC = 8$ cm, donc $A'C = 8 - 4 = 4$ cm.

Le point A' est sur $[BC]$, à la même distance de B et de C : c'est le **milieu** de $[BC]$.

En clair. Joins maintenant le sommet A au milieu A' du côté opposé.

La droite qui joint un sommet au milieu du côté opposé s'appelle une **médiane**. En général, ce n'est ni une hauteur, ni une médiatrice.

Définition : Médiane d'un triangle

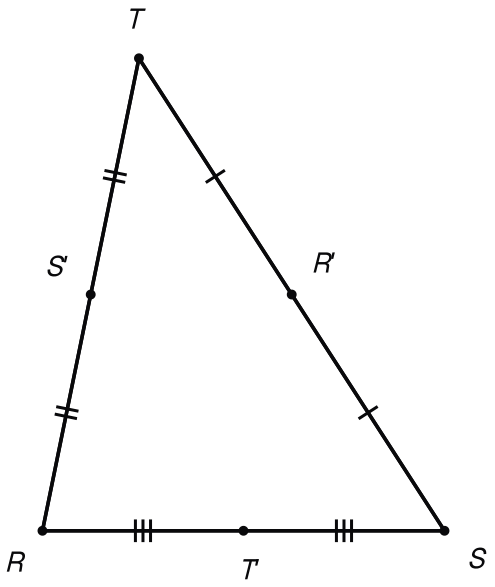
Soit ABC un triangle et A' le milieu du côté $[BC]$. La **médiane** issue du sommet A est la droite (AA') : elle passe par le sommet A et par le milieu du côté opposé à A. On appelle aussi médiane le segment $[AA']$.

Un triangle a trois médianes, une issue de chaque sommet.

Exemple : les trois médianes d'un triangle

Trace un triangle RST avec $RS = 5$ cm, $ST = 7$ cm et $RT = 6$ cm. Place R', milieu de $[ST]$, à $3{,}5$ cm de S. Place S', milieu de $[RT]$, à 3 cm de R.

Place enfin T', milieu de $[RS]$, à $2{,}5$ cm de R. Les trois médianes sont (RR'), (SS') et (TT').



Le triangle RST et les milieux R', S' et T' de ses trois côtés, chacun face au sommet de même lettre.

Trois médianes, un seul point

Vérifie : La troisième médiane

Sur ton triangle RST, trace les médianes (RR') et (SS'). Elles se coupent en un point. Trace maintenant (TT') : passe-t-elle par ce point ?

Note l'écart en millimètres.

A. Oui, à un petit écart de tracé près.

Juste.

Juste : avec un tracé soigné, l'écart ne dépasse pas un millimètre.

B. Non, elle passe à plus de 3 mm de ce point.

Faux.

Un écart aussi grand vient d'une erreur : vérifie tes milieux.

C. Non, elle est parallèle à (RR').

Faux.

Elle traverse le triangle et rencontre (RR') : elles ne sont pas parallèles.

D. Non, elle passe par le milieu de $[RR']$.

Faux.

Le point commun n'est pas au milieu de $[RR']$: tu le verras à la section suivante.

Correction

Avec un tracé soigné, (TT') passe par le point commun des deux premières médianes.

Ce n'est pas un hasard de ta figure : cela se produit dans tout triangle. La propriété qui suit le dit.

Propriété : Concours des médianes et centre de gravité

Les trois médianes d'un triangle sont **concourantes** : elles passent par un même point. Ce point s'appelle le **centre de gravité** du triangle. On le note G.

Pour placer G, il suffit donc de tracer deux médianes : la troisième passe aussi par leur point d'intersection.

Remarque : Un résultat admis

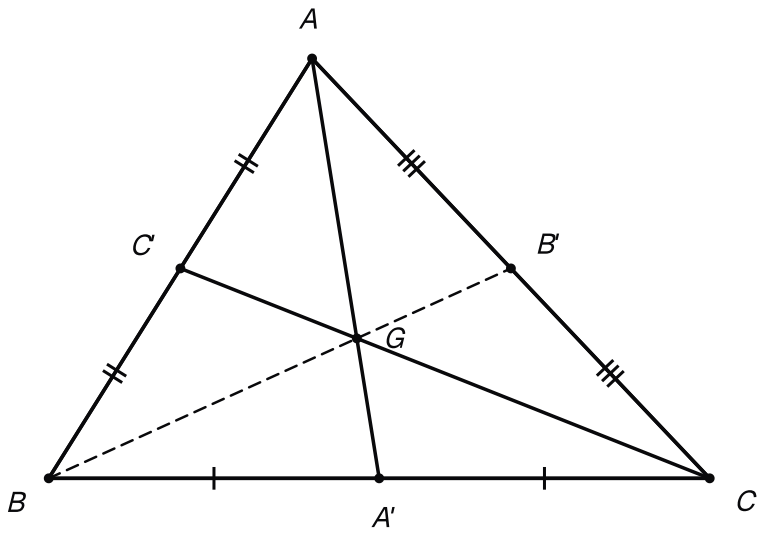
Ce résultat est admis. Tu l'as observé sur ta figure et avec le carton en équilibre. Sa preuve est trop longue pour cette année : tu ne la feras pas.

Exemple : placer le centre de gravité

Trace un triangle ABC avec $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm et $AC = 7$ cm. Place A', milieu de $[BC]$, à 4 cm de B. Place C', milieu de $[AB]$, à 3 cm de A.

Les médianes (AA') et (CC') se coupent en G. Soit B' le milieu de $[AC]$. D'après le concours des médianes, la médiane (BB') passe aussi par G.

Contrôle : place B' sur $[AC]$, à $3{,}5$ cm de A, et vérifie que la droite (BB') passe par G.



Les médianes [AA'] et [CC'] se coupent en G ; la troisième médiane [BB'], tracée pour contrôler, passe aussi par G.

La méthode de construction

Méthode : construire une médiane et le centre de gravité

1. **Place le milieu** du côté : mesure le côté à la règle graduée et prends la moitié, ou trace sa médiatrice au compas.
2. **Trace la médiane** : la droite qui joint ce milieu au sommet opposé.
3. **Recommence** avec un autre sommet. Les deux médianes se coupent au centre de gravité G.
4. **Contrôle** : la troisième médiane doit passer par G.

Vérifie : Un tracé qui ne tombe pas juste

Tu as tracé deux médianes et placé G. Ta troisième médiane passe à 2 mm de G. Que fais-tu ?

A. Je conclus que ce triangle n'a pas de centre de gravité.

Faux.
Les trois médianes de tout triangle passent par un même point.

B. Je place G au milieu de l'écart.

Faux.
Cela cache l'erreur au lieu de la corriger.

C. Je trace une quatrième médiane pour trancher.

Faux.
Un triangle n'a que trois médianes, une par sommet.

D. Je vérifie mes milieux et mes tracés.

Juste.
Juste : un petit écart vient d'un tracé imprécis.

Correction
D'après le concours des médianes, la troisième médiane passe par G. Un écart de 2 mm vient donc d'un tracé imprécis.

Mesure de nouveau les côtés, replace les milieux, puis retrace.

Médiane ou médiatrice ?

Vérifie : Quelle est cette droite ?

Dans un triangle ABC, une droite d passe par le milieu A' de $[BC]$. Elle est perpendiculaire à (BC). Quelle est la droite d ?

A. La médiatrice de $[BC]$.
Juste.
Juste : elle est perpendiculaire à $[BC]$ en son milieu.

B. La médiane issue de A.
Faux.
La médiane passe par A. Rien ne dit que d passe par A.

C. La hauteur issue de A.
Faux.
La hauteur passe par A. Rien ne dit que d passe par A.

D. La bissectrice de $\widehat{BAC}$.
Faux.
La bissectrice passe par A. Rien ne dit que d passe par A.

Correction
La droite d est perpendiculaire à $[BC]$ en son milieu A'. D'après la définition de la médiatrice, d est la **médiatrice** de $[BC]$.

En général, elle ne passe pas par A. Elle n'est donc ni la médiane, ni la hauteur issue de A.

Attention : médiane ou médiatrice ?

✗ « La médiane issue de A est perpendiculaire à (BC). »

✓ La **médiane** issue de A passe par A et par le milieu A' de $[BC]$. La **médiatrice** de $[BC]$ passe par A' et elle est perpendiculaire à (BC).

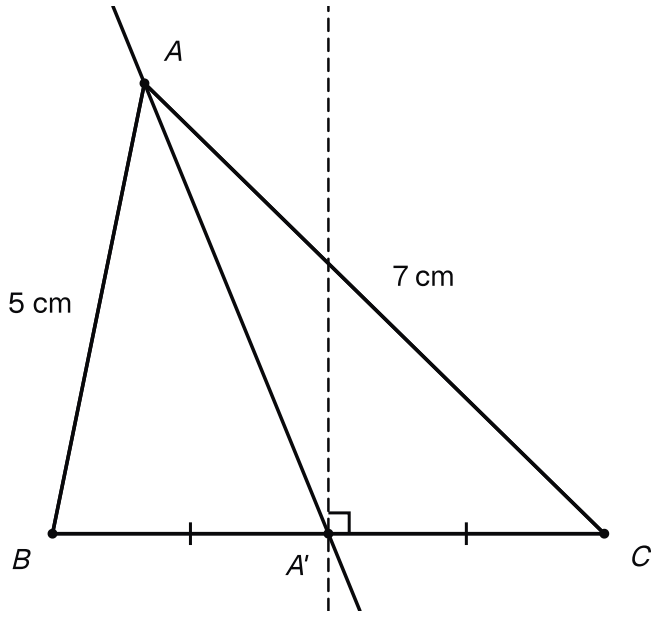
En général, la médiatrice ne passe pas par A : les deux droites sont confondues seulement si le triangle est isocèle en A.

Exemple : deux droites distinctes

Trace un triangle ABC avec $AB = 5$ cm, $AC = 7$ cm et $BC = 6$ cm. Un point de la médiatrice de $[BC]$ est à la même distance de B et de C.

Or $AB = 5$ cm et $AC = 7$ cm : ces longueurs sont différentes. Donc, d'après la propriété de la médiatrice, A n'est pas sur la médiatrice de $[BC]$.

La médiane (AA') passe par A : elle et cette médiatrice sont deux droites distinctes.



Dans ce triangle ABC où AB et AC diffèrent, la médiane (AA') et la médiatrice de [BC] sont deux droites distinctes.

À toi

En clair. Pour placer G, deux médianes suffisent. La troisième sert de contrôle de ta figure.

À toi : Construire un centre de gravité

Trace un triangle UVW avec $UV = 6$ cm, $VW = 9$ cm et $UW = 5$ cm. Construis son centre de gravité G, puis contrôle ta figure.

Trace ta figure et écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Deux médianes suffisent : choisis deux sommets.
Indice 2

Le milieu U' de $[VW]$ est à $4{,}5$ cm de V ; le milieu W' de $[UV]$ est à 3 cm de U.

Indice 3

Point délicat : le milieu se place sur le côté opposé au sommet, pas sur un côté qui touche ce sommet.

Réponse

Deux médianes. On place U', milieu de $[VW]$, à $4{,}5$ cm de V, et W', milieu de $[UV]$, à 3 cm de U. On trace les médianes (UU') et (WW') : elles se coupent en G.

Contrôle. D'après le concours des médianes, la troisième médiane (VV') passe aussi par G. On place V', milieu de $[UW]$, à $2{,}5$ cm de U, et on vérifie que la droite (VV') passe par G.

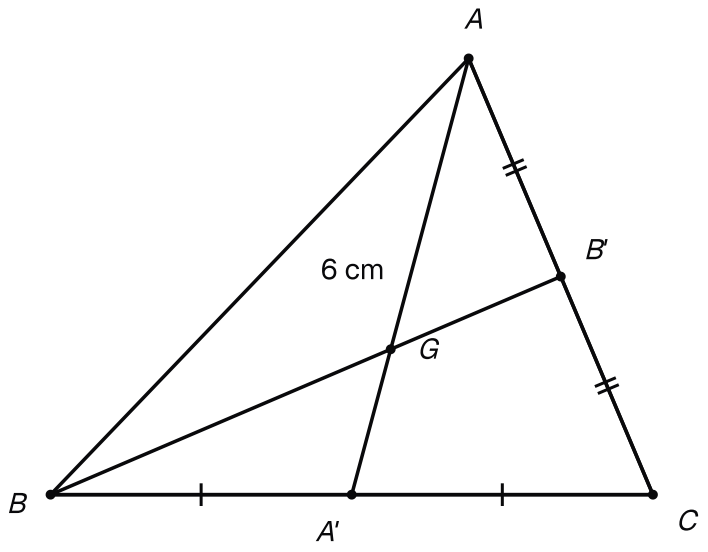
Conclusion. Le point G ainsi construit est le centre de gravité de UVW.

Le centre de gravité sur une médiane

Mesurer sur une médiane

Trace un segment $[BC]$ de 8 cm et son milieu A'. Place un point A hors de la droite (BC), tel que $AA' = 6$ cm. Trace la médiane $[AA']$, puis une deuxième médiane : tu obtiens G.

Mesure ensuite AG et GA' à la règle graduée.



La figure à tracer : [BC] de 8 cm, son milieu A', la médiane [AA'] de 6 cm et une deuxième médiane qui donne G.

Devine : Deux longueurs à prévoir

Avant de mesurer, prévois : quelles longueurs vas-tu trouver, à peu près ?

A. $AG = 3$ cm et $GA' = 3$ cm.

Faux.

Le point G n'est pas au milieu de la médiane.

B. $AG = 2$ cm et $GA' = 4$ cm.
Faux.
C'est l'inverse : G est plus près de A' que de A.

C. $AG = 4{,}5$ cm et $GA' = 1{,}5$ cm.
Faux.
Ce serait les trois quarts de la médiane : c'est trop près de A'.

D. $AG = 4$ cm et $GA' = 2$ cm.
Juste.
Juste : AG fait les deux tiers de AA'.

Correction
Tu trouves environ $AG = 4$ cm et $GA' = 2$ cm. Or $4 = \dfrac{2}{3} \times 6$ et $2 = \dfrac{1}{3} \times 6$.

Le point G est donc aux deux tiers de la médiane, en partant du sommet A.

En clair. Partage la médiane $[AA']$ en trois parts égales, de 2 cm chacune. Le point G laisse deux parts du côté du sommet A, et une part du côté du milieu A'.

La règle des deux tiers

Propriété : Position du centre de gravité sur une médiane

Soit ABC un triangle, A' le milieu de $[BC]$ et G le centre de gravité du triangle. Le point G est sur la médiane $[AA']$, aux **deux tiers** de sa longueur à partir du sommet A :

$$AG = \frac{2}{3}\,AA' \quad \text{et} \quad GA' = \frac{1}{3}\,AA'.$$

On a donc aussi $AG = 2\,GA'$. Il en est de même sur les deux autres médianes.

Démonstration
Idée de la preuve. On raisonne sur la médiane issue de B. Soit B', C', I et J les milieux respectifs de $[AC]$, $[AB]$, $[GB]$ et $[GC]$.

Étape 1. Dans le triangle ABC, d'après la propriété de la droite des milieux, $(C'B') \parallel (BC)$ et $C'B' = \dfrac{1}{2}\,BC$.

Étape 2. Dans le triangle GBC, d'après la même propriété, $(IJ) \parallel (BC)$ et $IJ = \dfrac{1}{2}\,BC$.

Étape 3. Les droites $(C'B')$ et (IJ), parallèles à (BC), sont parallèles, et $C'B' = IJ$: $C'B'JI$ est un parallélogramme (1re année). Ses diagonales $[B'I]$ et $[C'J]$, portées par les médianes (BB') et (CC'), se coupent en G, milieu de chacune.

Étape 4. Donc $GB' = GI = IB$, d'où $BG = \dfrac{2}{3}\,BB'$.

Ce qui est omis : on admet, d'après la figure, que ce quadrilatère n'est pas croisé.

En clair. On appelle cette propriété la **règle des deux tiers**. Sur chaque médiane, le centre de gravité est aux deux tiers de la longueur, en partant du sommet.

Remarque : Une preuve esquissée

La preuve donnée sous l'énoncé est seulement esquissée : elle donne l'idée et les étapes, sans tout justifier. Elle se sert de la droite des milieux, puis d'un parallélogramme. Tu n'as pas à la refaire.

Rappel du chapitre « Triangle : milieux et parallèles ». Dans un triangle, la droite qui joint les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté. Le segment qui joint ces milieux mesure la moitié du troisième côté.

Exemple : partager une médiane

Dans un triangle ABC de centre de gravité G, la médiane $[BB']$ mesure 12 cm.

D'après la règle des deux tiers, on a $BG = \frac{2}{3} \times 12 = 8$ cm et $GB' = \frac{1}{3} \times 12 = 4$ cm.

Vérifie : $8 + 4 = 12$ et $8 = 2 \times 4$.

Calculer une longueur

Méthode : calculer une longueur sur une médiane

1. **Repère** la médiane qui contient G et son sommet : par exemple $[AA']$, de sommet A.
2. **Écris** la propriété : $AG = \frac{2}{3}\,AA'$, $GA' = \frac{1}{3}\,AA'$ et $AG = 2\,GA'$.
3. **Remplace** la longueur connue par sa valeur, puis calcule.
4. **Vérifie** que $AG + GA' = AA'$.

Exemple : retrouver la longueur d'une médiane

Dans un triangle ABC de centre de gravité G, on sait que $CG = 5$ cm sur la médiane $[CC']$.

D'après la règle des deux tiers, on a $CG = 2\,GC'$. Donc $GC' = 2{,}5$ cm, et $CC' = 5 + 2{,}5 = 7{,}5$ cm.

Contrôle : $\frac{2}{3} \times 7{,}5 = 5$.

Vérifie : Une médiane à retrouver

Sur la médiane $[AA']$ d'un triangle ABC, on sait que $GA' = 3{,}5$ cm. Combien mesure AA' ?

A. $AA' = 7$ cm

Faux.

7 cm, c'est $AG = 2\,GA'$, pas toute la médiane.

B. $AA' = 10{,}5$ cm

Juste.

Juste : GA' est le tiers de la médiane.

C. $AA' = 5{,}25$ cm

Faux.

Tu as pris GA' pour les deux tiers de la médiane. Ce sont les deux tiers de AA' qui donnent AG.

D. $AA' = 14$ cm

Faux.

Le tiers de 14 cm n'est pas $3{,}5$ cm, car $3 \times 3{,}5 = 10{,}5$.

Correction

D'après la règle des deux tiers, on a $GA' = \dfrac{1}{3}\,AA'$. La médiane mesure donc trois fois GA' :

$$AA' = 3 \times 3{,}5 = 10{,}5$$

Conclusion. La médiane $[AA']$ mesure $10{,}5$ cm.

Contrôle : $AG = 2 \times 3{,}5 = 7$ cm, et $7 + 3{,}5 = 10{,}5$.

Les deux tiers, à partir du sommet

Vérifie : Plus près de quel point ?

Sur la médiane $[BB']$ d'un triangle ABC, le centre de gravité G est-il plus près de B ou de B' ?

A. Plus près du sommet B.

Faux.

Les deux tiers se comptent à partir de B : BG est la plus grande des deux longueurs.

B. À égale distance de B et de B'.

Faux.

Ce serait le milieu de $[BB']$: G n'y est pas.

C. Plus près du milieu B'.

Juste.

Juste : GB' ne fait qu'un tiers de la médiane.

D. Cela dépend de la forme du triangle.

Faux.

La règle des deux tiers vaut pour tout triangle.

Correction

D'après la règle des deux tiers, on a $BG = \frac{2}{3}\,BB'$ et $GB' = \frac{1}{3}\,BB'$.

Donc GB' est plus petit que BG : G est plus près du milieu B' que du sommet B.

Attention : les deux tiers, à partir du sommet

✗ « $AA' = 15$ cm, donc $GA' = 10$ cm et $AG = 5$ cm. »

✓ On compte les deux tiers **à partir du sommet** A. On a $AG = \frac{2}{3} \times 15 = 10$ cm et $GA' = \frac{1}{3} \times 15 = 5$ cm.

Le point G est donc plus près du milieu A' que du sommet A.

Coin devoir et à toi

Remarque : Coin devoir : calculer une longueur sur une médiane

En devoir, on nomme la médiane, puis on cite la propriété avant de calculer. Par exemple, avec $CC' = 13{,}5$ cm :

« Le point G est le centre de gravité du triangle ABC, et $[CC']$ est la médiane issue de C. D'après la règle des deux tiers, on a $CG = \frac{2}{3}\,CC' = \frac{2}{3} \times 13{,}5 = 9$ cm. Donc $GC' = 13{,}5 - 9 = 4{,}5$ cm. »

À toi : Deux longueurs sur une médiane

Dans un triangle RST, R' est le milieu de $[ST]$ et G le centre de gravité. On sait que $RR' = 7{,}2$ cm. Calcule RG et GR'.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Repère la médiane qui contient G : c'est $[RR']$, de sommet R.

Indice 2

Écris $RG = \frac{2}{3}\,RR'$, puis remplace RR' par sa valeur.

Indice 3

Point délicat : les deux tiers se comptent à partir du sommet R, pas à partir du milieu R'.

Réponse

Le segment $[RR']$ est la médiane issue de R, et G est sur ce segment. D'après la règle des deux tiers :

$$RG = \frac{2}{3} \times 7{,}2 = 4{,}8$$

et

$$GR' = \frac{1}{3} \times 7{,}2 = 2{,}4.$$

Contrôle : $4{,}8 + 2{,}4 = 7{,}2$ et $4{,}8 = 2 \times 2{,}4$.

Conclusion. On a $RG = 4{,}8$ cm et $GR' = 2{,}4$ cm.

Les droites du triangle isocèle

Plier un triangle isocèle

Rappel de 1re année : un triangle **isocèle** en A a deux côtés de même longueur issus de A : $AB = AC$.

Le côté $[BC]$ s'appelle la **base**. Le sommet A, opposé à la base, s'appelle le **sommet principal**. La médiane issue de A s'appelle la **médiane principale**.

Devine : Le pli

Découpe un triangle ABC isocèle en A, avec $AB = AC = 7$ cm et $BC = 6$ cm. Plie-le pour que B vienne sur C. Par où passe le pli ?

A. Par A, mais pas par le milieu de $[BC]$.

Faux.

Le pli amène B sur C : il coupe $[BC]$ en son milieu.

B. Par le milieu de $[BC]$, parallèlement à (AB).

Faux.

Le pli passe aussi par A, car A est à la même distance de B et de C.

C. Par A et par le milieu de $[BC]$.

Juste.

Juste : le pli est la médiane issue de A.

D. Par les milieux de $[AB]$ et de $[AC]$.

Faux.

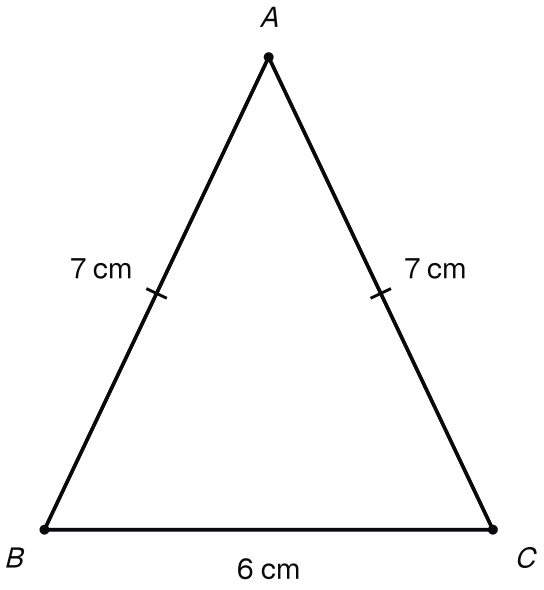
Cette droite est parallèle à (BC) : elle ne peut pas amener B sur C.

Correction

Le pli amène B sur C : il est perpendiculaire à $[BC]$ en son milieu A'. C'est la médiatrice de $[BC]$.

Comme $AB = AC$, le point A est sur cette médiatrice : le pli passe aussi par A.

Le pli est donc la médiane (AA'). Il partage aussi l'angle en A en deux angles égaux.



Le triangle ABC à découper, isocèle en A, avec ses deux côtés de 7 cm et sa base de 6 cm.

Rappel du chapitre « La symétrie axiale » : une symétrie axiale conserve les longueurs et les mesures des angles. La symétrie dont l'axe est la médiatrice de $[BC]$ envoie B sur C.

En clair. Dans un triangle isocèle en A, la médiane issue de A joue quatre rôles : elle est aussi médiatrice, hauteur et bissectrice.

Pourquoi est-ce vrai ? Comme $AB = AC$, le point A est à la même distance de B et de C. Il est donc sur la médiatrice de $[BC]$, et la symétrie par rapport à cette droite fait le reste.

La médiane principale

Propriété : La médiane principale d'un triangle isocèle

Soit ABC un triangle **isocèle en** A, c'est-à-dire tel que $AB = AC$, et A' le milieu de la base $[BC]$. Alors la médiane (AA') est aussi :

- la **médiatrice** du segment $[BC]$;
- la **hauteur** issue de A ;
- la **bissectrice** de l'angle $\widehat{BAC}$.

Démonstration

Étape 1. Comme $AB = AC$, le point A est à la même distance de B et de C. D'après la propriété de la médiatrice, A est sur la médiatrice de $[BC]$.

Étape 2. Le milieu A' de $[BC]$ est aussi sur cette médiatrice, et $A \neq A'$ car A n'est pas sur (BC). Par deux points distincts passe une seule droite : la médiatrice de $[BC]$ est la droite (AA').

Étape 3. Cette médiatrice est perpendiculaire à (BC) : la droite (AA') est donc la hauteur issue de A.

Étape 4. La symétrie d'axe (AA') échange B et C et laisse fixes A et A', points de l'axe : elle transforme l'angle $\widehat{BAA'}$ en l'angle $\widehat{CAA'}$. Elle conserve les mesures des angles, donc ces deux angles sont égaux : (AA') est la bissectrice de $\widehat{BAC}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

L'idée : A est à la même distance de B et de C, donc il est sur la médiatrice de $[BC]$. Le milieu A' y est aussi, et ces deux points sont distincts : la médiatrice est la droite (AA').

Cette droite est perpendiculaire à (BC) : c'est la hauteur issue de A.

Enfin, la symétrie d'axe (AA') échange B et C et laisse fixes A et A', points de l'axe. Elle conserve les mesures des angles, donc $\widehat{BAA'} = \widehat{CAA'}$: la droite (AA') est la bissectrice de $\widehat{BAC}$.

On cite ce résultat sous le nom de **propriété du triangle isocèle**. Ainsi, la hauteur issue du sommet principal d'un triangle isocèle est aussi sa médiane.

Vérifie : Le point délicat de la preuve

Pour comprendre la preuve (pas exigé en devoir) : pourquoi les points A et A' sont-ils distincts ?

A. Car $AB = AC$.
Faux.
Cette égalité place A sur la médiatrice, mais elle ne le sépare pas de A'.

B. Car A' est le milieu de $[BC]$.
Faux.
Cela place A' sur la médiatrice, mais ne le sépare pas de A.

C. Car la médiatrice est perpendiculaire à (BC).
Faux.
C'est l'étape 3 de la preuve, qui vient après.

D. Car A n'est pas sur (BC).
Juste.
Juste : A' est sur (BC), et A n'y est pas.

Correction
Le milieu A' est sur le segment $[BC]$, donc sur la droite (BC). Le sommet A, lui, n'est pas sur cette droite, car ABC est un triangle.

On retient : $A \neq A'$ car A n'est pas sur (BC).

Par deux points distincts passe une seule droite : la médiatrice de $[BC]$ est la droite (AA').

Exemple : un panneau triangulaire

Un panneau a la forme d'un triangle ABC isocèle en A, avec $\widehat{BAC} = 40°$ et $BC = 60$ cm. Le point A' est le milieu de $[BC]$.

D'après la propriété du triangle isocèle, $(AA') \perp (BC)$ et (AA') est la bissectrice de $\widehat{BAC}$. Donc $\widehat{BAA'} = 20°$ et $BA' = 30$ cm, moitiés de $40°$ et de 60 cm.

L'égalité $AB = AC$ est indispensable : sans elle, la médiane issue de A n'a, en général, aucune de ces propriétés.

Partir de la médiane

En clair. Cette fois, tu pars de la médiane. Trace un segment $[BC]$, son milieu A', puis la perpendiculaire à (BC) en A'. Place A sur cette perpendiculaire et mesure AB et AC : que remarques-tu ?

Pourquoi est-ce vrai ? Cette perpendiculaire est la médiatrice de $[BC]$.

Propriété : Une médiane qui est aussi une hauteur

Soit ABC un triangle et A' le milieu de $[BC]$. Si la médiane (AA') est **perpendiculaire** à (BC), alors le triangle ABC est **isocèle en** A : $AB = AC$.

Démonstration

Étape 1. La droite (AA') passe par le milieu A' de $[BC]$ et elle est perpendiculaire à (BC). D'après la définition de la médiatrice, (AA') est la médiatrice de $[BC]$.

Étape 2. Le point A est sur cette médiatrice. D'après la propriété de la médiatrice, il est à la même distance de B et de C : $AB = AC$.

Étape 3. Le triangle ABC a deux côtés de même longueur issus de A : il est isocèle en A.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

L'idée : une droite qui passe par le milieu de $[BC]$ et qui est perpendiculaire à (BC) est la médiatrice de $[BC]$, par définition.

Le sommet A est sur cette médiatrice. La propriété de la médiatrice donne alors $AB = AC$.

On cite ce résultat sous le nom de **propriété de la médiane-hauteur**.

Vérifie : Deux propriétés, deux rôles

Pour comprendre la preuve (pas exigé en devoir) : qu'est-ce qui permet de dire que (AA') est la médiatrice de $[BC]$?

A. La propriété de la médiatrice.

Faux.
Elle sert à l'étape suivante, pour obtenir $AB = AC$.

B. La définition de la médiatrice.

Juste.
Juste : (AA') est perpendiculaire à $[BC]$ en son milieu.

C. Le concours des médianes.

Faux.
La preuve n'emploie qu'une seule médiane.

D. La symétrie d'axe (BC).

Faux.
Aucune symétrie n'intervient dans cette preuve.

Correction
La droite (AA') passe par le milieu A' de $[BC]$ et elle est perpendiculaire à (BC). D'après la définition de la médiatrice, (AA') est la médiatrice de $[BC]$.

Ensuite, d'après la propriété de la médiatrice, A est à la même distance de B et de C.

Exemple : reconnaître un triangle isocèle

Dans un triangle DEF, le point D' est le milieu de $[EF]$ et $(DD') \perp (EF)$. On sait que $DE = 6{,}5$ cm et $EF = 5$ cm.

La médiane (DD') est perpendiculaire à (EF). D'après la propriété de la médiane-hauteur, le triangle DEF est isocèle en D. Donc $DF = DE = 6{,}5$ cm.

Le milieu est indispensable : si la perpendiculaire à (EF) issue de D ne passe pas par le milieu de $[EF]$, la propriété ne s'applique pas.

Médiane ou hauteur ?

Vérifie : Le pied de la hauteur

Dans un triangle ABC, la hauteur issue de A coupe $[BC]$ en K. Quand le point K est-il le milieu de $[BC]$?

A. Toujours.

Faux.
Trace un triangle avec $AB = 4$ cm et $AC = 6$ cm : le pied n'est pas au milieu.

B. Seulement si l'angle en A est droit.

Faux.

Un angle droit en A ne place pas K au milieu de $[BC]$, en général.

C. Seulement si $AB = AC$.

Juste.

Juste : c'est le cas du triangle isocèle en A.

D. Jamais.

Faux.

Dans un triangle isocèle en A, le pied de la hauteur est le milieu de $[BC]$.

Correction

Si $AB = AC$, la hauteur issue de A est la médiane, d'après la propriété du triangle isocèle. Donc K est le milieu de $[BC]$.

Réciproquement, si K est le milieu de $[BC]$, la médiane (AK) est perpendiculaire à (BC). On a alors $AB = AC$, d'après la propriété de la médiane-hauteur.

Conclusion. Le pied K est le milieu de $[BC]$ exactement quand $AB = AC$.

Attention : médiane ou hauteur ?

✗ « Dans le triangle ABC, $AB = 4$ cm, $AC = 6$ cm et $BC = 7$ cm. La hauteur issue de A coupe $[BC]$ en son milieu. »

✓ Ici, $AB = 4$ cm et $AC = 6$ cm sont différents : d'après la propriété de la médiatrice, A n'est pas sur la médiatrice de $[BC]$. La hauteur issue de A passe par A : elle n'est donc pas cette médiatrice.

Ces deux droites sont perpendiculaires à (BC), donc parallèles. Distinctes, elles n'ont aucun point commun : la hauteur ne passe pas par le milieu de $[BC]$, qui est sur la médiatrice.

Une égalité ou un angle droit ne se devinent pas sur la figure : il faut les justifier.

À toi

En clair. Dans un triangle isocèle en A, une seule droite joue quatre rôles : médiane, médiatrice, hauteur et bissectrice. Dans l'autre sens, une médiane perpendiculaire au côté prouve que le triangle est isocèle.

À toi : Un triangle isocèle

Le triangle NPQ est isocèle en N, avec $\widehat{PNQ} = 50°$ et $PQ = 8$ cm. Le point N' est le milieu de $[PQ]$. Donne PN', la mesure de $\widehat{PNN'}$ et la position de (NN') par rapport à (PQ).

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Le triangle est isocèle en N : pense à la propriété du triangle isocèle.

Indice 2

Rappelle-toi les quatre rôles de la médiane principale. Lequel te donne la position par rapport à (PQ) ? Lequel te donne l'angle $\widehat{PNN'}$?

Indice 3

Point délicat : la bissectrice partage l'angle au sommet N, de $50°$, et non un angle de la base.

Réponse

Le point N' est le milieu de $[PQ]$, donc $PN' = 4$ cm, moitié de 8 cm.

D'après la propriété du triangle isocèle, $(NN') \perp (PQ)$ et (NN') est la bissectrice de $\widehat{PNQ}$. Donc $\widehat{PNN'} = 25°$, moitié de $50°$.

Conclusion. On a $PN' = 4$ cm et $\widehat{PNN'} = 25°$, et la droite (NN') est perpendiculaire à (PQ).

Les droites du triangle équilatéral

Trois côtés égaux

Rappel de 1re année : un triangle **équilatéral** a ses trois côtés de même longueur. Ses trois angles mesurent $60°$.

Devine : Deux droites issues d'un sommet

Trace un triangle équilatéral ABC de côté 6 cm. Trace la médiane issue de A, puis la hauteur issue de A. Que constates-tu ?

A. Elles sont perpendiculaires.

Faux.

Elles partent toutes deux de A et coupent $[BC]$ au même point.

B. Elles sont confondues.

Juste.

Juste : c'est une seule et même droite.

C. Elles font entre elles un angle de $30°$.

Faux.

$30°$ est la moitié de l'angle en A : c'est l'angle entre la médiane et le côté $[AB]$.

D. Elles sont parallèles.

Faux.

Elles passent toutes deux par A : parallèles, elles seraient confondues.

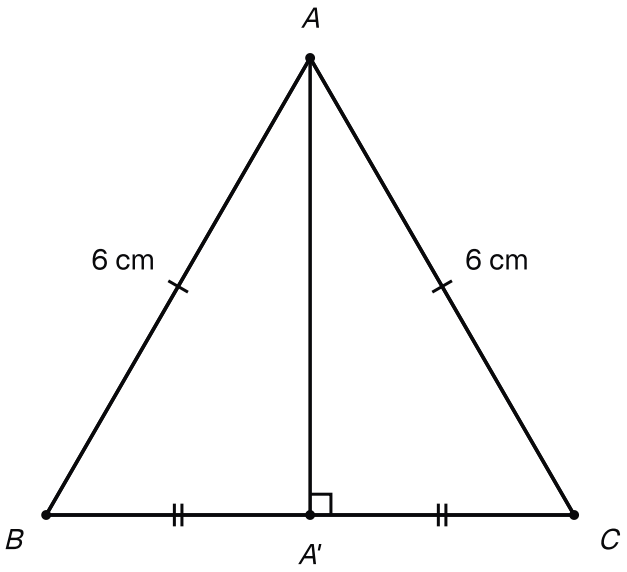
Correction

Le triangle est isocèle en A, car $AB = AC$.

> D'après la propriété du triangle isocèle, la médiane issue de A est aussi la hauteur issue de A. Les deux droites sont confondues.

En clair. Un triangle équilatéral est isocèle en chacun de ses trois sommets.

Pourquoi est-ce vrai ? On applique la propriété du triangle isocèle trois fois, une fois en chaque sommet.



Dans le triangle équilatéral ABC de côté 6 cm, la médiane issue de A coupe [BC] à angle droit : elle est aussi la hauteur.

Un seul point pour quatre familles

Propriété : Les droites remarquables d'un triangle équilatéral

Dans un triangle **équilatéral**, la médiane, la hauteur et la bissectrice issues d'un même sommet sont confondues avec la médiatrice du côté opposé.

Le centre de gravité, l'orthocentre, le centre du cercle circonscrit et le centre du cercle inscrit sont donc un seul et même point.

Démonstration

Étape 1. Un triangle équilatéral ABC a ses trois côtés de même longueur : il est isocèle en A, en B et en C.

Étape 2. D'après la propriété du triangle isocèle, appliquée en A, puis en B, puis en C, chaque médiane est aussi une hauteur, une bissectrice et la médiatrice du côté opposé.

Étape 3. Les trois médianes sont donc à la fois les trois hauteurs, les trois bissectrices et les trois médiatrices. D'après le concours des médianes, elles passent par le centre de gravité. Ce point est donc aussi le point de concours des hauteurs (l'orthocentre), celui des médiatrices (le centre du cercle circonscrit) et celui des bissectrices (le centre du cercle inscrit).

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

L'idée : appliquer la propriété du triangle isocèle **en chaque sommet**. Chaque médiane devient aussi hauteur, bissectrice et médiatrice.

Le concours des médianes donne alors un seul point commun aux quatre familles de droites.

On cite ce résultat sous le nom de **propriété du triangle équilatéral**.

Vérifie : Un seul point

Dans la preuve, quelle propriété assure que les trois médianes passent par un même point ?

A. La propriété de la médiatrice.
Faux.
Elle sert à la propriété du triangle isocèle, pas au point commun.

B. La règle des deux tiers.
Faux.
Elle place G sur une médiane, mais elle suppose déjà que G existe.

C. Le concours des médianes.
Juste.
Juste : c'est l'étape 3 de la preuve.

D. La symétrie d'axe (BC).
Faux.
Aucune symétrie d'axe (BC) n'intervient dans la preuve.

Correction
Les trois médianes sont aussi les trois hauteurs, les trois bissectrices et les trois médiatrices.

D'après le concours des médianes, elles passent par le centre de gravité. Ce point est donc aussi l'orthocentre et le centre des deux cercles, circonscrit et inscrit.

Exemple : un arbre au centre d'un jardin

Un jardin a la forme d'un triangle équilatéral ABC. Chacune de ses médianes mesure 15 m. On veut planter un arbre à la même distance des trois coins : au centre du cercle circonscrit.

D'après la propriété du triangle équilatéral, ce point est le centre de gravité G. D'après la règle des deux tiers, on a $AG = \frac{2}{3} \times 15 = 10$ m.

L'arbre est donc à 10 m de chaque coin.

Une précaution, puis à toi

Vérifie : Un triangle seulement isocèle

Le triangle ABC est isocèle en A, mais il n'est pas équilatéral. Que peux-tu dire de son orthocentre H et de son centre de gravité G ?

A. Ils sont confondus, comme dans un triangle équilatéral.
Faux.
Rien ne le garantit : la propriété du triangle équilatéral demande trois côtés égaux.

B. Ils sont tous deux sur la médiane (AA').
Juste.
Juste : cette médiane est aussi la hauteur issue de A.

C. L'orthocentre est toujours hors du triangle.
Faux.
C'est le cas seulement si le triangle a un angle obtus.

D. Ils sont tous deux sur la médiatrice de $[AB]$.
Faux.
Rien ne place ces points sur cette médiatrice.

Correction
D'après la propriété du triangle isocèle, la médiane (AA') est aussi la hauteur issue de A. Donc G, qui est sur chaque médiane, et H, qui est sur chaque hauteur, sont tous deux sur (AA').

La propriété du triangle équilatéral ne s'applique pas ici : elle demande trois côtés égaux.

En clair. Dans un triangle équilatéral, une seule droite par sommet joue tous les rôles, et un seul point les réunit. Retiens la précaution : il faut trois côtés égaux, deux ne suffisent pas.

À toi : Le centre du cercle circonscrit

Le triangle RST est équilatéral et R' est le milieu de $[ST]$. On sait que $RR' = 10{,}5$ cm.

Le point O est le centre du cercle circonscrit. Calcule RO et OR'.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Dans un triangle équilatéral, le centre du cercle circonscrit est aussi le centre de gravité.

Indice 2
Le segment $[RR']$ est une médiane : applique la règle des deux tiers à partir de R.
Indice 3
Point délicat : les deux tiers se comptent à partir du sommet R, donc RO est la plus grande des deux longueurs.

Réponse
D'après la propriété du triangle équilatéral, O est aussi le centre de gravité. Or $[RR']$ est la médiane issue de R.

D'après la règle des deux tiers :

$$RO = \frac{2}{3} \times 10{,}5 = 7$$

et

$$OR' = \frac{1}{3} \times 10{,}5 = 3{,}5.$$

Conclusion. On a $RO = 7$ cm et $OR' = 3{,}5$ cm.

Démontrer avec les droites remarquables

Utiliser un point de concours

Devine : La troisième hauteur

Le triangle ABC a trois angles aigus. Ses hauteurs issues de A et de B se coupent en H. Que peux-tu dire de la droite (CH) ?

A. Elle est perpendiculaire à (AB).
Juste.
Juste : c'est la troisième hauteur.

B. Elle passe par le milieu de $[AB]$.
Faux.
Ce serait une médiane. Or H est le point commun des hauteurs.

C. Elle est parallèle à (AB).
Faux.
La hauteur issue de C coupe la droite (AB) à angle droit.

D. On ne peut rien dire sans mesurer.
Faux.
La propriété du concours des hauteurs suffit, sans mesure.

Correction
Les hauteurs issues de A et de B se coupent en l'orthocentre H.

D'après la propriété du concours des hauteurs, (CH) est la troisième hauteur, celle issue de C. Donc $(CH) \perp (AB)$.

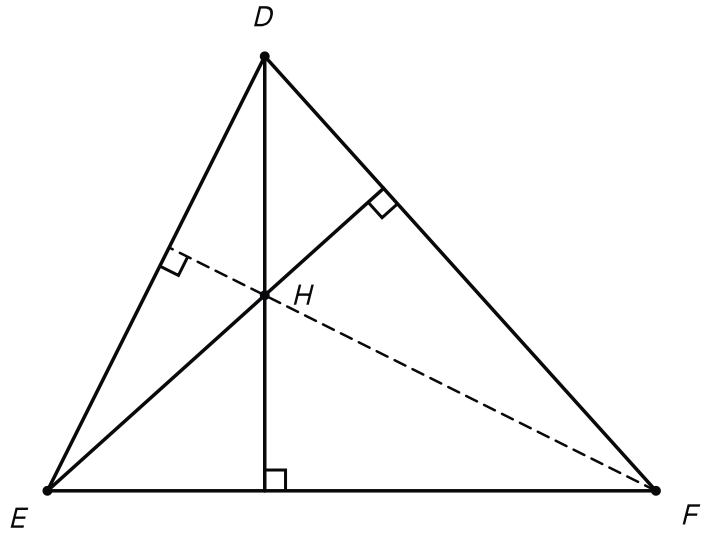
Méthode : utiliser un point de concours

1. **Reconnais** deux droites remarquables de même nature : deux hauteurs, deux médianes, deux médiatrices ou deux bissectrices du même triangle.
2. **Nomme** leur point commun : orthocentre, centre de gravité, centre du cercle circonscrit ou centre du cercle inscrit.
3. **Conclus** avec la propriété de concours : la troisième droite de même nature passe aussi par ce point.

Exemple : démontrer une perpendicularité

Le triangle DEF a trois angles aigus. La perpendiculaire à (EF) issue de D et la perpendiculaire à (DF) issue de E se coupent en H. On sait que ce sont deux hauteurs du triangle.

Or, d'après la propriété du concours des hauteurs, la troisième hauteur passe aussi par H. Donc (FH) est la hauteur issue de F, et $(FH) \perp (DE)$.



Les hauteurs issues de D et de E se coupent en H ; la troisième, issue de F, passe par H et coupe (DE) à angle droit.

Démontrer qu'un point est le centre de gravité

Méthode : démontrer qu'un point est le centre de gravité

1. **Montre** que le point est sur une médiane : il est sur la droite qui joint un sommet au milieu du côté opposé.
2. **Montre** qu'il est aussi sur une deuxième médiane. D'après le concours des médianes, c'est le centre de gravité.
3. **Ou bien**, si ce point s'appelle M, montre que M appartient au **segment** $[AA']$ et que $AM = \frac{2}{3}\,AA'$. Le centre de gravité G est lui aussi sur $[AA']$, avec $AG = \frac{2}{3}\,AA'$. Un seul point du segment $[AA']$ est à une distance donnée de A : M et G sont donc confondus.

Vérifie : Un point aux deux tiers

Sur la médiane $[AA']$ d'un triangle ABC, avec $AA' = 4{,}5$ cm, on place le point M tel que $AM = 3$ cm. Le point M est-il le centre de gravité ?

A. Non : il faudrait $AM = \frac{1}{3}\,AA'$.

Faux.
Le centre de gravité est aux deux tiers à partir du sommet : $AG = \frac{2}{3}\,AA'$.

B. Non : il faut toujours deux médianes.

Faux.
Une médiane et la règle des deux tiers suffisent aussi.

C. Oui, car $AM = \frac{2}{3}\,AA'$.

Juste.
Juste : $\frac{2}{3} \times 4{,}5 = 3$.

D. On ne peut pas savoir sans tracer.

Faux.
Le calcul suffit : compare AM aux deux tiers de AA'.

Correction
On calcule $\frac{2}{3} \times 4{,}5 = 3$, donc $AM = \frac{2}{3}\,AA'$. Le centre de gravité G est sur $[AA']$ et, d'après la règle des deux tiers, $AG = 3$ cm.

Les points G et M sont sur le segment $[AA']$, tous deux à 3 cm de A. Un seul point du segment $[AA']$ est à une distance donnée de A : G et M sont confondus.

Conclusion. Oui, M est le centre de gravité du triangle ABC.

Exemple : deux médianes suffisent

Dans un triangle ABC, A' et B' sont les milieux de $[BC]$ et de $[AC]$. Les droites (AA') et (BB') se coupent en P. On sait que (AA') et (BB') sont deux médianes.

Or, d'après le concours des médianes, leur point commun est le centre de gravité. Donc P est le centre de gravité.

Si C' est le milieu de $[AB]$, la troisième médiane (CC') passe donc aussi par P.

Médianes et droite des milieux

Exemple : une longueur grâce aux milieux

Dans un triangle ABC, A' et C' sont les milieux de $[BC]$ et de $[AB]$, et $AC = 9$ cm. Le segment $[C'A']$ relie deux milieux.

D'après la propriété de la droite des milieux, $(C'A') \parallel (AC)$ et $C'A' = \dfrac{9}{2} = 4{,}5$ cm.

Vérifie : Le segment des milieux

Dans un triangle ABC, A' et C' sont les milieux de $[BC]$ et de $[AB]$, et $AC = 11$ cm. Combien mesure $C'A'$?

A. $C'A' = 22$ cm

Faux.
Le segment des milieux mesure la moitié du troisième côté, pas le double.

B. $C'A' = 11$ cm

Faux.
Le segment des milieux est plus court que $[AC]$: il en mesure la moitié.

C. $C'A' = \dfrac{11}{3}$ cm

Faux.
Le tiers sert pour le centre de gravité sur une médiane, pas pour la droite des milieux.

D. $C'A' = 5{,}5$ cm

Juste.
Juste : c'est la moitié de 11 cm.

Correction

D'après la propriété de la droite des milieux, $C'A' = \dfrac{1}{2}\,AC = \dfrac{11}{2} = 5{,}5$ cm.

Ne confonds pas avec la règle des deux tiers, qui porte sur une médiane.

Rédiger une démonstration

Méthode : rédiger une démonstration courte

1. **Écris les données** : « On sait que… », avec la figure codée.

2. **Cite la propriété** avec son nom : « Or, d'après la propriété… ».
3. **Conclus** : « Donc… », en répondant exactement à la question.
4. **Enchaîne** : une conclusion peut servir de donnée au pas suivant.

Vérifie : Quelle conclusion ?

On sait que ABC est isocèle en A et que A' est le milieu de $[BC]$. Or, d'après la propriété du triangle isocèle, la médiane (AA') est aussi la hauteur issue de A. Quelle conclusion écris-tu ?

A. Donc $AB = AC$.

Faux.
C'est une donnée : la répéter n'est pas conclure.

B. Donc A' est le milieu de $[BC]$.

Faux.
C'est aussi une donnée de l'énoncé.

C. Donc $(AA') \perp (BC)$.

Juste.
Juste : c'est ce que dit la hauteur issue de A.

D. Donc $(AA') \parallel (BC)$.

Faux.
Une hauteur coupe (BC) à angle droit : elle ne lui est pas parallèle.

Correction
La conclusion dit ce que la propriété apporte : « Donc $(AA') \perp (BC)$. »

Les choix « $AB = AC$ » et « A' est le milieu » répètent des données.

Exemple : deux pas enchaînés

Le triangle ABC est isocèle en A, A' est le milieu de $[BC]$ et $AA' = 16{,}5$ cm.

Premier pas. On sait que ABC est isocèle en A. Or, d'après la propriété du triangle isocèle, $(AA') \perp (BC)$. Donc la médiane (AA') est aussi la hauteur issue de A.

Second pas. Le centre de gravité G est sur la médiane $[AA']$. D'après la règle des deux tiers, on a $AG = \frac{2}{3} \times 16{,}5 = 11$ cm. Donc G est sur la hauteur issue de A, à 11 cm de A.

Coin devoir et à toi

En clair. Une démonstration courte tient en trois lignes : ce que tu sais, la propriété, ce que tu en déduis. Le nom de la propriété est la pièce maîtresse.

Remarque : Coin devoir : démontrer une perpendicularité avec l'orthocentre

En devoir, on rédige en trois temps : les données, la propriété, la conclusion. Par exemple :

« Dans le triangle MNP, qui a trois angles aigus, les hauteurs issues de M et de N se coupent en H. D'après la propriété du concours des hauteurs, la hauteur issue de P passe aussi par H. Donc (PH) est la hauteur issue de P, et $(PH) \perp (MN)$. »

À toi : Une médiane perpendiculaire

Dans un triangle ABC, A' est le milieu de $[BC]$ et $(AA') \perp (BC)$. On sait que $AB = 5$ cm et $AA' = 4{,}2$ cm.

Démontre que $AC = 5$ cm. Calcule ensuite AG, où G est le centre de gravité.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
La médiane (AA') est aussi une hauteur : cherche la propriété qui en parle.
Indice 2
Commence ainsi : « On sait que A' est le milieu de $[BC]$ et que $(AA') \perp (BC)$. Or, d'après la propriété… »
Indice 3
Point délicat : pour AG, les deux tiers se comptent à partir du sommet A.

Réponse
Le triangle est isocèle. On sait que A' est le milieu de $[BC]$ et que $(AA') \perp (BC)$. Or, d'après la propriété de la médiane-hauteur, ABC est un triangle isocèle en A. On en déduit $AC = AB = 5$ cm.

Calcul de AG. Le segment $[AA']$ est la médiane issue de A. D'après la règle des deux tiers :

$$AG = \frac{2}{3} \times 4{,}2 = 2{,}8$$

Conclusion. On a bien $AC = 5$ cm, et le centre de gravité vérifie $AG = 2{,}8$ cm.

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir : les droites remarquables

- **Hauteurs** : elles se coupent en l'orthocentre, qui peut être hors du triangle.
- **Médiatrices** : elles se coupent au centre du cercle circonscrit.
- **Bissectrices** : elles se coupent au centre du cercle inscrit.
- **Médianes** : elles se coupent au centre de gravité G ; deux suffisent pour le placer.

- **Règle des deux tiers** : $AG = \frac{2}{3}\,AA'$ et $GA' = \frac{1}{3}\,AA'$, en partant du sommet.
- **Propriété du triangle isocèle** : dans un triangle isocèle en A, la médiane issue de A est aussi médiatrice, hauteur et bissectrice.
- **Propriété de la médiane-hauteur** : une médiane perpendiculaire au côté opposé prouve que le triangle est isocèle en ce sommet.
- **Propriété du triangle équilatéral** : une seule droite par sommet, un seul point pour les quatre familles.

Avant chaque exercice, trace la figure décrite sur ton cahier et code-la. À chaque conclusion, écris le nom de la propriété employée : « D'après la propriété… ».

Le mot du prof. Tu sais maintenant équilibrer un carton sur un crayon, et dire pourquoi. Les exercices t'attendent : commence par les constructions, puis les calculs sur une médiane, puis les démonstrations courtes.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Les droites remarquables d'un triangle » (2ac · general · mathematiques)