BURHAN

Résumé : Le calcul littéral

2ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/calcul-litteral/resume

Chapitre	Semestre
Le calcul littéral	Semestre 2

Expressions littérales et valeur numérique

> **À retenir : L'essentiel**
>
> Une lettre tient la place d'un nombre qui peut changer. Une même expression donne alors un résultat pour chaque valeur de la lettre.

Définition : Expression littérale et valeur numérique

Une **expression littérale** est une expression dans laquelle des nombres sont désignés par des lettres, comme $3x + 5$ ou $2 \times (a + b)$. Une lettre qui peut prendre plusieurs valeurs s'appelle une **variable**.

Quand on remplace chaque lettre par un nombre donné, puis qu'on effectue les calculs, on obtient la **valeur numérique** de l'expression pour ces valeurs. Par exemple, pour $x = 2$, la valeur numérique de $3x + 5$ est $3 \times 2 + 5 = 11$.

Conventions d'écriture. On peut supprimer le signe $\times$ devant une lettre ou devant une parenthèse : $3 \times x = 3x$, $a \times b = ab$ et $2 \times (a + b) = 2(a + b)$.

On écrit $1 \times x = x$, $x \times x = x^2$ et $x \times x \times x = x^3$.

On ne supprime jamais le signe $\times$ entre deux nombres : 3×5 ne s'écrit pas 35.

Devant une lettre $4 \times a = 4a$	Entre deux lettres $y \times z = yz$
Devant une parenthèse $5 \times (y + 2) = 5(y + 2)$	Facteur 1 $1 \times y = y$
Carré $y \times y = y^2$	Cube $y \times y \times y = y^3$

Méthode : Calculer la valeur numérique d'une expression

1. **Rétablir** les signes $\times$ sous-entendus : $3x^2 - 2x$ devient $3 \times x^2 - 2 \times x$.
2. **Remplacer** chaque lettre par sa valeur, entre parenthèses si cette valeur est négative ou écrite en fraction.

3. **Calculer** en respectant les priorités : parenthèses, puissances, multiplications et divisions, puis additions et soustractions.

Exemple : une valeur négative

Calculons $A = 2x^2 - 5x + 1$ pour $x = -2$. On rétablit les signes $\times$ et on écrit -2 entre parenthèses :

$$\begin{aligned} A &= 2 \times (-2)^2 - 5 \times (-2) + 1 \\ &= 2 \times 4 + 10 + 1 \\ &= 19. \end{aligned}$$

Deuxième ligne : le carré passe en premier, $(-2)^2 = 4$; puis la règle des signes donne $-5 \times (-2) = 10$. Troisième ligne : on additionne.

Exemple : une valeur en fraction

Calculons $B = 4y^2 + 3$ pour $y = \dfrac{1}{2}$. La fraction se place entre parenthèses :

$$\begin{aligned} B &= 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \\ &= 4 \times \frac{1}{4} + 3 \\ &= 1 + 3 = 4. \end{aligned}$$

Rappel : $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$.

Attention : Remplacer une lettre par un nombre négatif

Pour $x = -3$, on calcule $x^2 = (-3)^2 = 9$. Écrire -3^2 donne -9, car le carré ne porte alors que sur 3.

Une valeur négative se place **toujours** entre parenthèses : pour $x = -3$, on a $2x^2 = 2 \times (-3)^2 = 18$.

Réduire une somme ou un produit

Définition : Termes semblables et réduction

Dans un terme comme $5x$ ou $-3x^2$, la **partie littérale** est la partie écrite avec les lettres : x, x^2. Le nombre qui la multiplie s'appelle le **coefficient** du terme : 5 pour $5x$, -3 pour $-3x^2$, et 1 pour x^2, car $x^2 = 1 \times x^2$.

Dans une somme, deux termes sont **semblables** lorsqu'ils ont la même partie littérale : $5x$ et $-2x$ sont semblables ; $3x^2$ et x^2 aussi. En revanche, $4x$ et $4x^2$ ne sont pas semblables, ni 7 et $7x$.

Réduire une somme, c'est l'écrire avec le moins de termes possible : on regroupe les termes semblables en ajoutant leurs coefficients. Par exemple, $5x - 2x = 3x$ et $3x^2 + x^2 = 4x^2$.

Réduire un produit, c'est multiplier les nombres entre eux et les lettres entre elles :

$$3x \times 4x = 3 \times 4 \times x \times x$$
$$= 12x^2$$

Méthode : Réduire une somme

1. **Repérer** les termes semblables : même partie littérale (x^2, x, ou aucune lettre).
2. **Regrouper** chaque famille de termes semblables en ajoutant leurs coefficients, avec leurs signes.
3. **Écrire** le résultat, en commençant en général par le terme en x^2, puis le terme en x, puis le nombre.

Exemple : réduire une somme

Réduisons $C = 4x^2 - 3x + 7 - x^2 + 5x - 2$.

Une famille réunit des termes semblables. On range les termes par familles : en x^2, en x, puis les nombres.

$$C = (4x^2 - x^2) + (-3x + 5x)$$
$$+ (7 - 2)$$

Dans chaque famille, on ajoute les coefficients. Le coefficient de $-x^2$ est -1.

$$C = 3x^2 + 2x + 5$$

Attention : Des termes qui ne se regroupent pas

Seuls des termes **semblables** se regroupent. L'expression $3x + 2$ ne se réduit pas : elle n'est pas égale à $5x$.

Pour $x = 2$, on trouve $3x + 2 = 8$ alors que $5x = 10$. De même, $4x + 3x^2$ ne se réduit pas.

Exemple : réduire un produit

Dans un produit, on multiplie les nombres ensemble, puis les lettres ensemble.

$$-2a \times 5a = (-2) \times 5 \times a \times a$$
$$= -10a^2$$

$$2y^2 \times 3y = 2 \times 3 \times y^2 \times y$$
$$= 6y^3$$

Rappel : $y^2 \times y = y \times y \times y = y^3$.

Attention : Ne pas confondre $2x$ et x^{2}

$2x$ veut dire $2 \times x$, c'est-à-dire $x + x$, alors que x^2 veut dire $x \times x$. Pour $x = 5$, on a $2x = 10$ mais $x^2 = 25$.

Ainsi, $x + x = 2x$, mais $x \times x = x^2$; et $3x \times 2x = 6x^2$, ni $6x$ ni $5x^2$.

> **À retenir : Somme ou produit ?**
>
> Dans une somme, seuls les termes semblables se regroupent. Dans un produit, tous les facteurs se multiplient : $3x \times 2 = 6x$ et $4x \times x = 4x^2$.

Supprimer des parenthèses

Propriété : Supprimer des parenthèses

Soit a, b et c des nombres.

- Des parenthèses précédées du signe $+$ se suppriment **sans changer** les signes des termes qu'elles contiennent :

$$a + (b - c) = a + b - c.$$

- Des parenthèses précédées du signe $-$ se suppriment en **changeant le signe de chaque terme** qu'elles contiennent :

$$a - (b + c) = a - b - c$$
$$a - (b - c) = a - b + c.$$

Méthode : Supprimer des parenthèses

1. **Regarder** le signe placé juste devant la parenthèse.
2. **Signe** $+$: recopier les termes avec leurs signes. **Signe** $-$: changer le signe de **chaque** terme de la parenthèse.
3. **Réduire** l'expression obtenue.

Exemple : un signe plus devant

$$\begin{aligned} 6 + (2y - 5) &= 6 + 2y - 5 \\ &= 2y + 1 \end{aligned}$$

On recopie $2y$ et -5 tels quels. Puis on réduit les nombres : $6 - 5 = 1$.

Exemple : un signe moins devant

$$\begin{aligned} 3a - (4 - a) &= 3a - 4 + a \\ &= 4a - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9 - (-2x + 3) &= 9 + 2x - 3 \\ &= 2x + 6 \end{aligned}$$

Chaque terme de la parenthèse change de signe : $-a$ devient $+a$, et $-2x$ devient $+2x$.

Attention : Le signe moins devant une parenthèse

Un signe $-$ devant une parenthèse change le signe de **tous** ses termes, pas seulement du premier :

$$\begin{aligned} 5-(x-3) &= 5-x+3 \\ &= 8-x \end{aligned}$$

Écrire $5-x-3$ est faux : pour $x=0$, on trouve $5-(0-3)=8$, et non 2.

Remarque : Contrôle rapide

Remplace la lettre par 1 des deux côtés.

Pour $a=1$: $3\times 1-(4-1)=0$ et $4\times 1-4=0$. Les deux résultats concordent.

Développer un produit

Définition : Développer et factoriser

Développer un produit, c'est l'écrire sous la forme d'une somme ou d'une différence. **Factoriser** une somme ou une différence, c'est l'écrire sous la forme d'un produit.

Pour des nombres k, a et b, la **distributivité** donne deux lectures d'une même égalité :

$$\begin{aligned} k(a+b) &= ka+kb \\ k(a-b) &= ka-kb. \end{aligned}$$

Lue de gauche à droite, l'égalité **développe** ; lue de droite à gauche, elle **factorise**. Le nombre k est alors un **facteur commun** aux deux termes ka et kb.

Exemple : distributivité simple

$$\begin{aligned} 4(2x-3) &= 4\times 2x-4\times 3 \\ &= 8x-12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3(y+5) &= (-3)\times y+(-3)\times 5 \\ &= -3y-15 \end{aligned}$$

Le facteur placé devant multiplie **chaque** terme de la parenthèse, avec son signe.

Propriété : Double distributivité

Pour tous nombres a, b, c et d :

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd.$$

Chaque terme de la première parenthèse multiplie chaque terme de la seconde : on obtient quatre produits.

Méthode : Développer et réduire un produit

1. **Relier** chaque terme du premier facteur à chaque terme du second : deux produits pour $k(a+b)$, quatre produits pour $(a+b)(c+d)$.
2. **Écrire** tous les produits, chacun avec son signe.
3. **Calculer** chaque produit, en appliquant la règle des signes.
4. **Réduire** la somme obtenue.

Exemple : double distributivité

Développons et réduisons $D = (2x+1)(x-4)$. On écrit les quatre produits :

$$\begin{aligned} D &= 2x \times x + 2x \times (-4) \\ &\quad + 1 \times x + 1 \times (-4) \end{aligned}$$

On calcule chaque produit avec la règle des signes :

$$D = 2x^2 - 8x + x - 4$$

On réduit les termes en x, car $-8x + x = -7x$:

$$D = 2x^2 - 7x - 4$$

Attention : Ne pas oublier de produit

Le produit $(x+3)(x+2)$ donne **quatre** produits :

$$\begin{aligned} (x+3)(x+2) &= x^2 + 2x + 3x + 6 \\ &= x^2 + 5x + 6 \end{aligned}$$

Écrire $x^2 + 6$ est faux. De même, un carré se développe en quatre produits :

$$\begin{aligned} (x+3)^2 &= (x+3)(x+3) \\ &= x^2 + 6x + 9 \end{aligned}$$

Le résultat n'est pas $x^2 + 9$: pour $x = 1$, on trouve $4^2 = 16$, et non 10.

Exemple : un signe moins devant un produit

$$\begin{aligned} 5 - 2(x-3) &= 5 - 2x + 6 \\ &= 11 - 2x \end{aligned}$$

Le signe moins fait partie du facteur : on développe $-2(x-3) = -2x + 6$, puis on réduit $5 + 6 = 11$.

Remarque : Contrôle par une valeur

Pour $x = 1$, la forme de départ donne :

$$\begin{aligned}&(2 \times 1 + 1)(1 - 4)\\&= 3 \times (-3) = -9\end{aligned}$$

La forme développée donne $2 \times 1^2 - 7 \times 1 - 4 = -9$.

Les deux valeurs sont égales : le calcul est sans doute juste.

Factoriser une expression

À retenir : L'idée

Factoriser, c'est faire le chemin inverse du développement. On part d'une somme et on arrive à un produit. Le facteur commun sort devant une parenthèse.

Méthode : Factoriser par un facteur commun

1. **Chercher** un facteur commun à tous les termes : un nombre, une lettre, ou une expression entre parenthèses.
2. **Écrire** chaque terme sous la forme d'un produit par ce facteur commun.
3. **Mettre** le facteur commun devant une parenthèse qui contient les autres facteurs, avec leurs signes.
4. **Contrôler** en développant le résultat.

Exemple : un nombre en facteur commun

$$\begin{aligned}12a + 18 &= 6 \times 2a + 6 \times 3\\&= 6(2a + 3)\end{aligned}$$

Contrôle en développant : $6(2a + 3) = 12a + 18$.

Exemple : une lettre en facteur commun

$$\begin{aligned}5y^2 - 7y &= y \times 5y - y \times 7\\&= y(5y - 7)\end{aligned}$$

La lettre y figure dans les deux termes : c'est elle qui sort devant.

Attention : Ne pas oublier le facteur 1

Quand un terme est égal au facteur commun, il laisse 1 dans la parenthèse :

$$y^2 + y = y \times y + y \times 1$$
$$= y(y+1)$$

Écrire seulement $y \times y$ est faux : en développant, on ne retrouve que y^2.

Exemple : une expression en facteur commun

Dans $E = (3x-2)(x+5) + 4(3x-2)$, le facteur commun est $(3x-2)$.

$$E = (3x-2)[(x+5)+4]$$
$$= (3x-2)(x+9)$$

Les crochets jouent le rôle de grandes parenthèses. On y écrit ce qui reste de chaque terme, avec le signe qui les relie. Puis on réduit : $5 + 4 = 9$.

Exemple : calculer de tête

$$23 \times 17 + 23 \times 83$$
$$= 23 \times (17 + 83)$$
$$= 23 \times 100 = 2300$$

Le facteur commun 23 transforme deux produits difficiles en un seul produit simple.

Contrôler, réfuter, prouver

Définition : Égalité de deux expressions littérales

Deux expressions littérales sont **égales** lorsqu'elles prennent la même valeur numérique pour **toutes** les valeurs des lettres. Pour le montrer, on transforme l'une par le calcul littéral (développer, réduire, factoriser) jusqu'à obtenir l'autre.

Pour montrer que deux expressions ne sont **pas** égales, **une seule** valeur suffit, si elle donne deux résultats différents : cette valeur s'appelle un **contre-exemple**.

Par exemple, pour $x = 1$, les expressions $2x + 3$ et $5x$ valent toutes les deux 5. Pourtant, pour $x = 2$, la première vaut 7 et la seconde vaut 10.

La valeur $x = 2$ est donc un contre-exemple : ces deux expressions ne sont pas égales.

Méthode : Contrôler ou prouver une égalité

1. **Contrôler** un calcul : remplacer la lettre par une valeur simple, la même dans l'expression de départ et dans le résultat. Deux valeurs différentes signalent une erreur.
2. **Réfuter** une égalité : une seule valeur qui donne deux résultats différents suffit (contre-exemple).

3. **Prouver** une égalité : transformer une expression par développement, réduction ou factorisation jusqu'à obtenir l'autre. Une valeur qui donne le même résultat ne prouve rien.

Exemple : contrôler un calcul

Un élève réduit $3(x-2)-(x+1)$ et trouve $2x-5$. On teste avec $x=0$.

- Le départ donne $3\times(0-2)-(0+1)=-7$.
- Le résultat donne $2\times 0-5=-5$.

Comme $-7\neq -5$, il y a une erreur. Le bon calcul :

$$\begin{aligned}&3(x-2)-(x+1)\\&=3x-6-x-1\\&=2x-7\end{aligned}$$

Exemple : un contre-exemple

Les expressions $3(y+2)$ et $3y+2$ sont-elles égales ?

Pour $y=0$, la première vaut $3\times(0+2)=6$. La seconde vaut $3\times 0+2=2$.

Comme $6\neq 2$, la valeur $y=0$ est un contre-exemple : $3(y+2)\neq 3y+2$.

Exemple : prouver une égalité

Montrons que $(x+2)(x+4)-x(x+6)=8$ pour toutes les valeurs de x. On développe chaque produit :

$$\begin{aligned}&(x+2)(x+4)-x(x+6)\\&=x^2+4x+2x+8\\&\quad -x^2-6x\end{aligned}$$

On regroupe les termes semblables : $x^2-x^2=0$ et $4x+2x-6x=0$. Il reste 8.

L'égalité est donc vraie pour toutes les valeurs de x.

À retenir

Pour réfuter, une seule valeur qui donne deux résultats différents suffit. Pour prouver, aucune valeur ne suffit : il faut transformer une expression jusqu'à l'autre.

Quelle technique pour quelle question ?

La consigne dit…	Ce que tu fais	Premier geste
« Calcule pour $x = 3$ »	une valeur numérique	rétablir les signes $\times$, remplacer la lettre
« Réduis »	regrouper les termes semblables	repérer les familles x^2, x, nombres
« Supprime les parenthèses »	appliquer la règle des parenthèses	regarder le signe placé devant
« Développe »	distributivité simple ou double	relier chaque terme à chaque terme
« Factorise »	sortir le facteur commun	chercher ce qui se répète dans chaque terme
« Ces expressions sont-elles égales ? »	chercher un contre-exemple : il suffit à réfuter ; sinon, transformer une expression	tester une valeur simple : une valeur égale ne prouve rien
« Montre que »	transformer une expression	développer, puis réduire
« Vérifie ton résultat »	contrôler par une valeur	la même valeur dans le départ et le résultat

Distributivité, somme
$$k(a+b) = ka + kb$$

Distributivité, différence
$$k(a-b) = ka - kb$$

Double distributivité
$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Parenthèses après plus
$$a + (b - c) = a + b - c$$

Parenthèses après moins
$$a - (b + c) = a - b - c$$

Parenthèses après moins, avec un moins dedans
$$a - (b - c) = a - b + c$$

Termes semblables
$$7y + 2y = 9y$$

Carré
$$x \times x = x^2$$

Produit de puissances
$$x^2 \times x = x^3$$

Facteur 1
$$x^2 + x = x(x+1)$$

> **À retenir : Avant de rendre ta copie**
>
> 1. **Valeurs négatives** : elles sont entre parenthèses.
> 2. **Signe moins** devant une parenthèse : il change **tous** les signes.
> 3. **Deux sommes multipliées** : quatre produits, pas deux.

4. **Contrôle** : teste ton résultat avec un petit nombre, comme 1 ou 0.