BURHAN

Le calcul littéral : exercices, niveau examen

2ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/calcul-litteral/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Le calcul littéral	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Développer, réduire, puis calculer

On considère l'expression $E = (3x - 2)(x + 1) - 2(x^2 - 4)$.

1. 1,5 pts

Développe $(3x - 2)(x + 1)$, puis développe $-2(x^2 - 4)$.

INDICE

Pour le second produit, le facteur est -2, avec son signe. Il multiplie les deux termes de la parenthèse.

CORRIGÉ

Premier produit. Par la double distributivité, puis en regroupant $3x - 2x = x$:

$$\begin{aligned}&(3x - 2)(x + 1)\\&= 3x^2 + 3x - 2x - 2\\&= 3x^2 + x - 2\end{aligned}$$

Second produit. Par la distributivité simple, le facteur -2 multiplie les deux termes. La règle des signes donne $(-2) \times (-4) = 8$:

$$-2(x^2 - 4) = -2x^2 + 8$$

Conclusion. On obtient $(3x - 2)(x + 1) = 3x^2 + x - 2$ et $-2(x^2 - 4) = -2x^2 + 8$.

2. 1 pts

Déduis-en que $E = x^2 + x + 6$.

INDICE

Ajoute les deux résultats de la question 1, puis regroupe les termes semblables.

CORRIGÉ

Somme des développements. L'expression E est la somme des deux résultats de la question 1 :

$$\begin{aligned}E = {} & 3x^2 + x - 2\\ & - 2x^2 + 8\end{aligned}$$

Termes semblables. On a $3x^2 - 2x^2 = x^2$ et $-2 + 8 = 6$; le terme x n'a pas de terme semblable.

$$E = x^2 + x + 6$$

Conclusion. Pour tout nombre x, on a bien $E = x^2 + x + 6$.

3. 1 pts

Calcule E pour $x = -3$, avec la forme réduite.

INDICE

Écris -3 entre parenthèses : son carré est positif.

CORRIGÉ

Dans la forme réduite, on remplace x par (-3). Son carré est 9 :

$$\begin{aligned} E &= (-3)^2 + (-3) + 6 \\ &= 9 - 3 + 6 = 12 \end{aligned}$$

Conclusion. Pour $x = -3$, on trouve $E = 12$.

4. 1,5 pts

Contrôle ce résultat avec la forme de départ de E.

INDICE

Calcule séparément $3 \times (-3) - 2$, puis $(-3) + 1$, puis $(-3)^2 - 4$.

CORRIGÉ

Parenthèses. Dans la forme de départ, on remplace x par (-3) et on calcule chaque parenthèse :

- $3 \times (-3) - 2 = -11$;
- $(-3) + 1 = -2$;
- $(-3)^2 - 4 = 5$.

Calcul. Il reste les produits, puis la différence :

$$\begin{aligned} E &= (-11) \times (-2) - 2 \times 5 \\ &= 22 - 10 = 12 \end{aligned}$$

Conclusion. La forme de départ donne aussi 12 pour $x = -3$: le contrôle conforte le développement, sans le prouver.

Exercice 2 4 pts

Factoriser, puis contrôler

On considère l'expression $F = (2x + 5)(x - 3) + (2x + 5)(4x + 1)$.

1. 0,5 pts

Quel est le facteur commun aux deux termes de F ?

INDICE

Cherche l'expression entre parenthèses écrite deux fois.

CORRIGÉ

Les deux produits de F contiennent l'expression $(2x + 5)$.

Conclusion. Le facteur commun aux deux termes de F est $(2x + 5)$.

2. 1,5 pts

Factorise F, puis réduis le second facteur.

INDICE

Écris $(2x + 5)$ devant des crochets, qui jouent le rôle de grandes parenthèses. Écris dedans ce que devient chaque terme sans le facteur commun, en gardant le signe entre eux.

CORRIGÉ

Mise en facteur. On écrit $(2x + 5)$ devant un crochet. Dedans, on place ce qui reste de chaque terme, $(x - 3)$ et $(4x + 1)$, avec le signe $+$ entre eux :

$$\begin{aligned} F = (2x + 5)[&(x - 3) \\ &+ (4x + 1)] \end{aligned}$$

Second facteur. Le signe plus permet d'enlever les parenthèses : $x - 3 + 4x + 1 = 5x - 2$.

$$F = (2x + 5)(5x - 2)$$

Conclusion. Factorisée, l'expression s'écrit $F = (2x + 5)(5x - 2)$.

3. 1 pts

Contrôle ta factorisation avec $x = 1$.

INDICE

Calcule la valeur pour $x = 1$ avec la forme de départ, puis avec la forme factorisée.

CORRIGÉ

Forme de départ. Pour $x = 1$, on a $2x + 5 = 7$, $x - 3 = -2$ et $4x + 1 = 5$:

$$\begin{aligned} F &= 7 \times (-2) + 7 \times 5 \\ &= -14 + 35 = 21 \end{aligned}$$

Forme factorisée. Pour $x = 1$, on a $5x - 2 = 3$:

$$F = 7 \times 3 = 21$$

Conclusion. Les deux formes donnent 21 : le contrôle est réussi.

4. 1 pts

Avec la forme factorisée, calcule la valeur de F pour $x = 2$.

INDICE

La forme factorisée demande moins d'opérations.

CORRIGÉ

Pour $x = 2$, les deux facteurs valent $2 \times 2 + 5 = 9$ et $5 \times 2 - 2 = 8$:

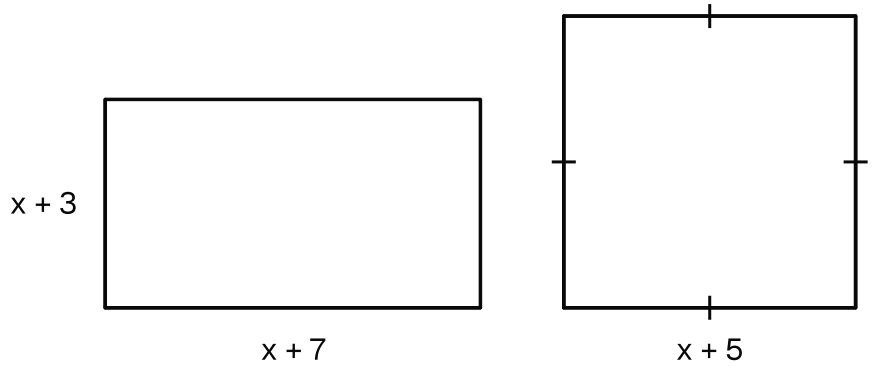
$$F = 9 \times 8 = 72$$

Conclusion. Pour $x = 2$, on trouve $F = 72$, avec une seule multiplication.

Exercice 3 — 5 pts

Une clôture et deux aires

Un terrain rectangulaire mesure $(x+7)$ mètres de long et $(x+3)$ mètres de large. Le nombre x est positif. On le compare à un carré de côté $(x+5)$ mètres.



À gauche, le terrain de x + 7 mètres sur x + 3 mètres ; à droite, le carré de côté x + 5 mètres.

1. — 1 pts

Écris le périmètre P du terrain, puis réduis-le.

INDICE

Rappel : le périmètre d'un rectangle vaut deux longueurs plus deux largeurs.

CORRIGÉ

Mise en expression. Le périmètre compte deux longueurs et deux largeurs :

$$P = 2(x+7) + 2(x+3)$$

Réduction. On développe chaque produit, puis on regroupe $2x + 2x = 4x$ et $14 + 6 = 20$:

$$\begin{aligned} P &= 2x + 14 + 2x + 6 \\ &= 4x + 20 \end{aligned}$$

Conclusion. En mètres, le périmètre du terrain est $P = 4x + 20$.

2. 1 pts

Montre que $P = 4(x + 5)$.

INDICE

Pars de la forme réduite trouvée à la question 1. Écris ses deux termes comme deux produits par un même nombre.

CORRIGÉ

On part de la forme réduite de la question 1 et on écrit $20 = 4 \times 5$:

$$\begin{aligned} & 4x + 20 \\ & = 4 \times x + 4 \times 5 \\ & = 4(x + 5) \end{aligned}$$

Conclusion. Donc $P = 4(x + 5)$. Le carré a quatre côtés de $(x + 5)$ mètres : son périmètre est aussi $4(x + 5)$. Le terrain et le carré ont le même périmètre.

3. 1,5 pts

Développe et réduis l'aire du terrain $A = (x + 7)(x + 3)$, puis l'aire du carré $B = (x + 5)(x + 5)$.

INDICE

Chaque produit de deux sommes donne quatre produits. Regroupe ensuite les termes en x.

CORRIGÉ

Aire du terrain. Par la double distributivité, puis $3x + 7x = 10x$:

$$\begin{aligned} A &= (x + 7)(x + 3) \\ &= x^2 + 3x + 7x + 21 \\ &= x^2 + 10x + 21 \end{aligned}$$

Aire du carré. De même, avec $5x + 5x = 10x$:

$$\begin{aligned} B &= (x + 5)(x + 5) \\ &= x^2 + 5x + 5x + 25 \\ &= x^2 + 10x + 25 \end{aligned}$$

Conclusion. On a $A = x^2 + 10x + 21$ et $B = x^2 + 10x + 25$.

4. 1,5 pts

Montre que $B - A = 4$. Que peux-tu dire des deux aires ?

INDICE

Écris $B - A$ avec les formes réduites de la question 3. Mets celle de A entre parenthèses : le signe moins devant change tous ses signes.

CORRIGÉ

Différence. On reprend les formes réduites de la question 3, en mettant celle de A entre parenthèses :

$$\begin{aligned} B - A &= x^2 + 10x + 25 \\ &\quad - (x^2 + 10x + 21) \end{aligned}$$

Suppression des parenthèses. Elles sont précédées d'un signe moins : les trois termes changent de signe.

$$\begin{aligned} B - A &= x^2 + 10x + 25 \\ &\quad - x^2 - 10x - 21 \end{aligned}$$

Réduction. On a $x^2 - x^2 = 0$, $10x - 10x = 0$ et $25 - 21 = 4$, donc :

$$B - A = 4$$

Conclusion. Pour tout nombre positif x, $B - A = 4$: l'aire du carré dépasse celle du terrain de 4 mètres carrés, quelle que soit la valeur de x.

Exercice 4 5 pts

Soustraire un produit, puis calculer de tête

On considère l'expression $G = (2x+3)(x-1) - (x-2)(x+4)$.

1. 1,5 pts

Développe et réduis $(2x+3)(x-1)$, puis $(x-2)(x+4)$.

INDICE

Double distributivité : quatre produits pour chaque développement, en gardant les signes moins de -1 et de -2.

CORRIGÉ

Premier produit. Par la double distributivité, en gardant le signe de -1 :

$$\begin{aligned}&(2x+3)(x-1)\\&= 2x^2 - 2x + 3x - 3\\&= 2x^2 + x - 3\end{aligned}$$

Second produit. De même, en gardant le signe de -2 :

$$\begin{aligned}&(x-2)(x+4)\\&= x^2 + 4x - 2x - 8\\&= x^2 + 2x - 8\end{aligned}$$

Conclusion. On obtient $2x^2 + x - 3$, puis $x^2 + 2x - 8$.

2. 1 pts

Déduis-en que $G = x^2 - x + 5$.

INDICE

Le signe moins placé devant le second produit porte sur tout son développement : écris ce développement entre parenthèses avant de les supprimer.

CORRIGÉ

Remplacement. On remplace chaque produit par son développement. Le second est soustrait en entier : on le garde entre parenthèses.

$$\begin{aligned}G = {} & 2x^2 + x - 3\\ & - (x^2 + 2x - 8)\end{aligned}$$

Suppression des parenthèses. Le signe moins change le signe de chacun des trois termes :

$$\begin{aligned}G = {} & 2x^2 + x - 3\\ & - x^2 - 2x + 8\end{aligned}$$

Termes semblables. On a $2x^2 - x^2 = x^2$, $x - 2x = -x$ et $-3 + 8 = 5$:

$$G = x^2 - x + 5$$

Conclusion. On a bien $G = x^2 - x + 5$ pour tout nombre x.

3. 1 pts

Montre que $G = x(x-1) + 5$.

INDICE

Dans $x^2 - x$, cherche le facteur commun. Un terme égal au facteur commun laisse 1 dans la parenthèse.

CORRIGÉ

Dans la forme réduite, les termes x^2 et $-x$ ont le facteur commun x. Le terme x s'écrit $x \times 1$:

$$\begin{aligned} & x^2 - x \\ & = x \times x - x \times 1 \\ & = x(x-1) \end{aligned}$$

Conclusion. On ajoute le nombre 5 : $G = x(x-1) + 5$.

4. 1,5 pts

Calcule de tête la valeur de G pour $x = 21$. Déduis-en, sans poser d'opération, la valeur de $45 \times 20 - 19 \times 25$.

INDICE

Pour le calcul de tête, utilise la forme de la question 3. Ensuite, remplace x par 21 dans la forme de départ de G : que valent les quatre parenthèses ?

CORRIGÉ

Calcul de tête. On utilise la forme de la question 3. Pour $x = 21$, on a $x - 1 = 20$:

$$\begin{aligned} G &= 21 \times 20 + 5 \\ &= 420 + 5 = 425 \end{aligned}$$

Lien avec la forme de départ. Pour $x = 21$, les quatre parenthèses valent $2x + 3 = 45$, $x - 1 = 20$, $x - 2 = 19$ et $x + 4 = 25$. La forme de départ de G devient donc $45 \times 20 - 19 \times 25$.

Conclusion. Ce nombre est la valeur de G pour $x = 21$, d'où, sans poser d'opération :

$$\begin{aligned} & 45 \times 20 - 19 \times 25 \\ & = 425 \end{aligned}$$

Exercice 5 5 pts

Deux programmes de calcul

On choisit un nombre, puis on lui applique l'un des deux programmes suivants.

- Programme A : ajouter 3 au nombre choisi ; multiplier le résultat par le nombre choisi diminué de 1.
- Programme B : multiplier le nombre choisi par ce nombre augmenté de 2 ; soustraire 3 du résultat.

1. 1 pts

Applique les deux programmes au nombre 4, puis au nombre -2.

INDICE

Pour le nombre -2, écris-le entre parenthèses et calcule d'abord le nombre diminué de 1 et le nombre augmenté de 2.

CORRIGÉ

Nombre 4.

- Programme A : $4+3=7$ et $4-1=3$, puis $7\times 3=21$.
- Programme B : $4+2=6$, puis $4\times 6=24$ et $24-3=21$.

Nombre -2.

- Programme A : $(-2)+3=1$ et $(-2)-1=-3$, puis $1\times(-3)=-3$.
- Programme B : $(-2)+2=0$, puis $(-2)\times 0=0$ et $0-3=-3$.

Conclusion. Pour 4, les deux programmes donnent 21 ; pour -2, ils donnent tous deux -3.

2. 1 pts

On appelle x le nombre choisi. Écris le résultat A du programme A, puis le résultat B du programme B, sous la forme d'expressions littérales.

INDICE

Traduis chaque étape par une parenthèse : le nombre choisi diminué de 1 s'écrit $(x-1)$.

CORRIGÉ

Programme A. On multiplie $(x+3)$ par $(x-1)$: $A=(x+3)(x-1)$.

Programme B. On multiplie x par $(x+2)$, puis on soustrait 3 : $B=x(x+2)-3$.

Conclusion. Les résultats des deux programmes s'écrivent $A=(x+3)(x-1)$ et $B=x(x+2)-3$.

3. 1,5 pts

Développe et réduis A, puis B. Que peux-tu en conclure ?

INDICE

Pour A, utilise la double distributivité ; pour B, la distributivité simple. Compare ensuite les deux formes réduites.

CORRIGÉ

Développement de A. Par la double distributivité, puis $-x + 3x = 2x$:

$$\begin{aligned} A &= x^2 - x + 3x - 3 \\ &= x^2 + 2x - 3 \end{aligned}$$

Développement de B. Par la distributivité simple, $x(x+2) = x^2 + 2x$, donc :

$$B = x^2 + 2x - 3$$

Conclusion. Les deux formes réduites sont identiques : $A = B$ pour tout nombre x. Les deux programmes donnent donc le même résultat, quel que soit le nombre choisi. Les essais de la question 1 ne le prouvaient pas ; c'est le calcul littéral qui le prouve.

4. 1,5 pts

Un programme C consiste à multiplier le nombre choisi par 5, puis à ajouter 1. Pour le nombre 4, il donne aussi 21. Le programme C donne-t-il, pour tout nombre, le même résultat que le programme A ? Justifie.

INDICE

Un seul essai réussi ne suffit pas à conclure. Essaie un autre nombre simple dans les deux programmes.

CORRIGÉ

Programme C. Il donne $5x + 1$.

Essai avec 0. Le programme C donne $5 \times 0 + 1 = 1$. Le programme A donne $(0+3)(0-1) = 3 \times (-1) = -3$.

Conclusion. Comme $1 \neq -3$, le nombre 0 est un contre-exemple. Le programme C ne donne donc pas, pour tout nombre, le même résultat que le programme A, bien que les deux donnent 21 pour le nombre 4.