BURHAN

Le calcul littéral : exercices, entraînement

2ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/calcul-litteral/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Le calcul littéral	Entraînement	7

Exercice 1

Valeurs numériques avec des fractions

On considère l'expression $K = 9x^2 - x + 1$.

a.

Calcule K pour $x = \dfrac{1}{3}$.

INDICE

Commence par le carré : $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3}$.

CORRIGÉ

Remplacement. On remplace x par $\dfrac{1}{3}$, écrit entre parenthèses :

$$K = 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} + 1$$

Carré et produit. Le carré vaut $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{9}$, donc $9 \times \dfrac{1}{9} = 1$.

Même dénominateur. On écrit chaque nombre avec le dénominateur 3 :

$$\begin{aligned} K &= \frac{3}{3} - \frac{1}{3} + \frac{3}{3} \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Conclusion. Pour $x = \dfrac{1}{3}$, on obtient $K = \dfrac{5}{3}$.

b.

Calcule K pour $x = -\frac{1}{2}$.

INDICE

Avec les parenthèses, deux signes moins se suivent devant $\frac{1}{2}$.

CORRIGÉ

Remplacement. On remplace x par $-\frac{1}{2}$, écrit entre parenthèses :

$$K = 9 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) + 1$$

Signes. Le carré d'un nombre négatif est positif : il vaut $\frac{1}{4}$, et $9 \times \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$. Soustraire $-\frac{1}{2}$ revient à ajouter $\frac{1}{2}$.

Même dénominateur. On écrit tout avec le dénominateur 4 :

$$\begin{aligned} K &= \frac{9}{4} + \frac{2}{4} + \frac{4}{4} \\ &= \frac{15}{4} \end{aligned}$$

Conclusion. Pour $x = -\frac{1}{2}$, on obtient $K = \frac{15}{4}$.

c.

Calcule K pour $x = 1{,}5$.

INDICE

Le carré vient d'abord : $1{,}5 \times 1{,}5 = 2{,}25$.

CORRIGÉ

On respecte les priorités. Le carré : $1{,}5^2 = 2{,}25$. Le produit : $9 \times 2{,}25 = 20{,}25$. Il reste la somme :

$$\begin{aligned} K &= 20{,}25 - 1{,}5 + 1 \\ &= 19{,}75 \end{aligned}$$

Conclusion. Pour $x = 1{,}5$, on obtient $K = 19{,}75$.

Exercice 2

Parenthèses précédées d'un signe moins

a.

Réduis $L = (4x^2 - 3x + 2) - (x^2 - 5x + 6)$.

INDICE

La première parenthèse se recopie. Devant la seconde, le signe moins change ses trois signes.

CORRIGÉ

Suppression des parenthèses. La première, placée en tête, se recopie telle quelle. La seconde est précédée d'un signe moins : ses trois termes changent de signe.

$$\begin{aligned} L &= 4x^2 - 3x + 2 \\ &\quad - x^2 + 5x - 6 \end{aligned}$$

Termes semblables. On a $4x^2 - x^2 = 3x^2$, puis $-3x + 5x = 2x$, et enfin $2 - 6 = -4$.

$$L = 3x^2 + 2x - 4$$

Conclusion. La forme réduite est $L = 3x^2 + 2x - 4$.

b.

Contrôle ton résultat avec $x = 1$.

INDICE

Calcule la valeur pour $x = 1$ sur la forme de départ, puis sur ta forme réduite.

CORRIGÉ

Forme de départ. Pour $x = 1$, la première parenthèse vaut $4 - 3 + 2 = 3$ et la seconde $1 - 5 + 6 = 2$. L'expression vaut donc $3 - 2 = 1$.

Forme réduite. Pour $x = 1$:

$$3 \times 1^2 + 2 \times 1 - 4 = 1$$

Conclusion. Les deux formes donnent 1 : la réduction est probablement juste. Un seul essai ne suffit pas à le prouver, mais il aurait révélé bien des erreurs.

c.

Réduis $M = 7 - (2a - 1) + (3a - 5)$.

INDICE

Traite les deux parenthèses une par une : regarde le signe placé devant chacune.

CORRIGÉ

Suppression des parenthèses. La première est précédée d'un moins : ses termes changent de signe. La seconde est précédée d'un plus : on la recopie.

$$M = 7 - 2a + 1 + 3a - 5$$

Réduction. Termes en a : $-2a + 3a = a$. Nombres : $7 + 1 - 5 = 3$.

$$M = a + 3$$

Conclusion. La forme réduite est $M = a + 3$.

Exercice 3

Développer une somme de deux produits

a.

Développe et réduis $N = 2(x+3) + (x-1)(x+4)$.

INDICE

Développe chaque produit à part : la distributivité simple pour le premier, la double pour le second.

CORRIGÉ

Premier produit. Par la distributivité simple, $2(x+3) = 2x + 6$.

Second produit. Par la double distributivité :

$$\begin{aligned}&(x-1)(x+4)\\&= x^2 + 4x - x - 4\\&= x^2 + 3x - 4\end{aligned}$$

Somme. On ajoute les deux résultats, puis on regroupe $2x + 3x = 5x$ et $6 - 4 = 2$:

$$\begin{aligned}N &= 2x + 6\\&\quad + x^2 + 3x - 4\\&= x^2 + 5x + 2\end{aligned}$$

Conclusion. Développée et réduite, $N = x^2 + 5x + 2$.

b.

Développe et réduis $P = (2y+1)(y-3) + y(y-2)$.

INDICE

Dans le premier produit, le second terme est -3 : garde son signe dans chacun des quatre produits.

CORRIGÉ

Premier produit. Par la double distributivité, en gardant le signe de -3 :

$$\begin{aligned}&(2y+1)(y-3)\\&= 2y^2 - 6y + y - 3\\&= 2y^2 - 5y - 3\end{aligned}$$

Second produit. Par la distributivité simple, $y(y-2) = y^2 - 2y$.

Somme. On regroupe $2y^2 + y^2 = 3y^2$ et $-5y - 2y = -7y$:

$$\begin{aligned}P &= 2y^2 - 5y - 3\\&\quad + y^2 - 2y\\&= 3y^2 - 7y - 3\end{aligned}$$

Conclusion. Développée et réduite, $P = 3y^2 - 7y - 3$.

c.

Contrôle le résultat de la question b avec $y = 2$.

INDICE

Pour $y = 2$, un des facteurs du produit $y(y-2)$ est nul.

CORRIGÉ

Forme de départ. Pour $y = 2$, le facteur $y - 2$ vaut 0, donc le second produit est nul :

$$\begin{aligned}&(2 \times 2 + 1)(2 - 3)\\&\quad + 2 \times (2 - 2)\\&= 5 \times (-1) + 0 = -5\end{aligned}$$

Forme réduite. Pour $y = 2$:

$$\begin{aligned}&3 \times 2^{2} - 7 \times 2 - 3\\&= 12 - 14 - 3 = -5\end{aligned}$$

Conclusion. Les deux formes donnent -5 : le contrôle est réussi.

Exercice 4

Factoriser par une expression entre parenthèses

a.

Factorise $Q = (x+3)(2x-1) + 6(x+3)$.

INDICE

Repère l'expression entre parenthèses présente dans les deux termes.

CORRIGÉ

Facteur commun. L'expression $(x+3)$ figure dans les deux termes.

Mise en facteur. On écrit $(x+3)$ devant un crochet, qui sert de grande parenthèse. On y place ce qui reste de chaque terme sans le facteur commun, $(2x-1)$ puis 6, avec le signe $+$ entre eux :

$$Q = (x+3)[(2x-1) + 6]$$

Réduction du crochet. On a $2x - 1 + 6 = 2x + 5$, donc :

$$Q = (x+3)(2x+5)$$

Conclusion. La forme factorisée est $Q = (x+3)(2x+5)$.

b.

Factorise $R = (a-2)(3a+1) - (a-2)(a+4)$.

INDICE

Après la mise en facteur, le signe moins porte sur toute la parenthèse $(a+4)$.

CORRIGÉ

Mise en facteur. Le facteur commun est $(a-2)$. Le signe moins entre les deux termes reste devant ce qui reste du second, $(a+4)$:

$$\begin{aligned} R = (a-2)[&(3a+1) \\ &- (a+4)] \end{aligned}$$

Réduction du crochet. Le signe moins change les signes des termes de $(a+4)$:

$$\begin{aligned} &(3a+1) - (a+4) \\ &= 3a + 1 - a - 4 \\ &= 2a - 3 \end{aligned}$$

Conclusion. La forme factorisée est :

$$R = (a-2)(2a-3)$$

c.

Contrôle la factorisation de R avec $a = 0$.

INDICE

Remplace a par 0 dans la forme de départ, puis dans la forme factorisée.

CORRIGÉ

Forme de départ. Pour $a = 0$, le premier produit vaut $(-2) \times 1 = -2$, et le produit soustrait vaut $(-2) \times 4 = -8$:

$$\begin{aligned}&(0-2)(3\times 0+1)\\&\quad -(0-2)(0+4)\\&=-2+8=6\end{aligned}$$

Forme factorisée. Pour $a = 0$:

$$\begin{aligned}&(0-2)(2\times 0-3)\\&=(-2)\times(-3)=6\end{aligned}$$

Conclusion. Les deux formes donnent 6 : le contrôle est réussi.

Exercice 5

Calculer de tête en factorisant

Un billet de bus coûte 8 dirhams. Lundi, 37 élèves prennent le bus ; mardi, 63 élèves le prennent.

a.

La recette des deux jours vaut $8 \times 37 + 8 \times 63$ dirhams. Calcule-la de tête en factorisant.

INDICE

Le nombre 8 est commun aux deux produits.

CORRIGÉ

Chacun des deux produits contient le facteur 8. On le met en facteur, puis on calcule la parenthèse :

$$\begin{aligned} &8 \times 37 + 8 \times 63 \\ &= 8 \times (37 + 63) \\ &= 8 \times 100 = 800 \end{aligned}$$

Conclusion. La recette des deux jours est de 800 dirhams.

b.

Calcule de tête $58 \times 99 + 58$.

INDICE

Écris le second terme 58 sous la forme d'un produit par 1.

CORRIGÉ

On écrit le second terme $58 = 58 \times 1$: le facteur 58 devient commun aux deux termes.

$$\begin{aligned} &58 \times 99 + 58 \times 1 \\ &= 58 \times (99 + 1) \\ &= 58 \times 100 = 5800 \end{aligned}$$

Conclusion. On trouve $58 \times 99 + 58 = 5800$.

c.

Calcule de tête $125 \times 13 - 125 \times 5$.

INDICE

La factorisation marche aussi avec une différence.

CORRIGÉ

Le facteur 125 est commun aux deux produits. La mise en facteur s'applique aussi à une soustraction :

$$\begin{aligned} &125 \times 13 - 125 \times 5 \\ &= 125 \times (13 - 5) \\ &= 125 \times 8 = 1000 \end{aligned}$$

Conclusion. On trouve $125 \times 13 - 125 \times 5 = 1000$.

Exercice 6

Contrôler une affirmation

Yassine affirme que, pour tout nombre x, l'expression $(x+5)(x-2)$ est égale à x^2-10.

a.

Calcule les deux expressions pour $x=0$. Peut-on conclure ?

INDICE

Demande-toi ce qu'une seule valeur peut prouver.

CORRIGÉ

Pour $x=0$:

- $(0+5)(0-2)=5\times(-2)=-10$;
- $0^2-10=-10$.

Conclusion. Les deux résultats sont égaux. Mais une seule valeur ne prouve pas une égalité vraie pour tout nombre : on ne peut pas conclure.

b.

Calcule les deux expressions pour $x=1$. Conclus.

INDICE

Si les deux résultats sont différents, la valeur est un contre-exemple.

CORRIGÉ

Pour $x=1$:

- $(1+5)(1-2)=6\times(-1)=-6$;
- $1^2-10=-9$.

Conclusion. Comme $-6\neq-9$, la valeur $x=1$ est un contre-exemple. Les deux expressions ne sont pas égales pour tout nombre x : Yassine se trompe.

c.

Développe et réduis $(x+5)(x-2)$. Contrôle ensuite ton résultat avec $x=1$.

INDICE

La formule de Yassine oublie deux des quatre produits.

CORRIGÉ

Développement. Par la double distributivité, puis en regroupant $-2x+5x=3x$:

$$\begin{aligned}&(x+5)(x-2)\\&=x^2-2x+5x-10\\&=x^2+3x-10\end{aligned}$$

Contrôle. Pour $x=1$, la forme développée donne $1^2+3\times 1-10=-6$. C'est la valeur trouvée pour la forme de départ à la question b.

Conclusion. Pour tout nombre x, $(x+5)(x-2)=x^2+3x-10$. Il manque le terme $3x$ dans la formule de Yassine.

Exercice 7

L'aire d'un jardin

Un jardin rectangulaire mesure $(2x + 3)$ mètres de long et $(x + 2)$ mètres de large. Le nombre x est positif.



Le jardin : un rectangle de longueur 2x + 3 mètres et de largeur x + 2 mètres.

a.

Écris l'aire A du jardin, en mètres carrés, sous la forme d'un produit.

INDICE

Rappel : l'aire d'un rectangle est sa longueur multipliée par sa largeur.

CORRIGÉ

On multiplie la longueur du jardin par sa largeur :

$$A = (2x + 3)(x + 2)$$

Conclusion. En mètres carrés, l'aire du jardin s'écrit $A = (2x + 3)(x + 2)$.

b.

Développe et réduis A.

INDICE

Quatre produits à écrire, puis des termes en x à regrouper.

CORRIGÉ

Quatre produits. Par la double distributivité :

$$A = 2x \times x + 2x \times 2 \\ + 3 \times x + 3 \times 2$$

Réduction. Ces produits valent $2x^2$, $4x$, $3x$ et 6. On regroupe $4x + 3x = 7x$:

$$A = 2x^2 + 4x + 3x + 6 \\ = 2x^2 + 7x + 6$$

Conclusion. Développée et réduite, l'aire vaut $A = 2x^2 + 7x + 6$.

c.

Calcule l'aire du jardin pour $x = 4$, avec chacune des deux formes.

INDICE

Avec la forme produit, calcule d'abord la longueur et la largeur.

CORRIGÉ

Forme produit. Pour $x = 4$, la longueur vaut $2 \times 4 + 3 = 11$ et la largeur $4 + 2 = 6$. Donc $A = 11 \times 6 = 66$.

Forme développée. Pour $x = 4$:

$$A = 2 \times 4^2 + 7 \times 4 + 6 \\ = 32 + 28 + 6 = 66$$

Conclusion. Les deux formes s'accordent : pour $x = 4$, l'aire du jardin est de 66 mètres carrés.