BURHAN

Résumé : Vecteurs de l'espace

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/vecteurs-de-l-espace/resume

Chapitre	Semestre
Vecteurs de l'espace	Semestre 2

Vecteurs, somme et relation de Chasles

Dans l'espace, un vecteur garde sa direction, son sens et sa norme, comme dans le plan. Les règles de calcul du tronc commun restent vraies.

Pour chaque solide, trace une figure à main levée : elle sert à chercher, jamais à prouver.

Convention : le cube $ABCDEFGH$ a pour faces $ABCD$ (dessous) et $EFGH$ (dessus), et pour arêtes verticales $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$; ses faces latérales sont $ABFE$, $BCGF$, $DCGH$, $ADHE$. Un parallélépipède se nomme de la même façon.

Définition : Vecteurs de l'espace

À tout couple (A, B) de points de l'espace, on associe le **vecteur** $\overrightarrow{AB}$.

- Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **égaux** si et seulement si les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu, c'est-à-dire si $ABDC$ est un parallélogramme, éventuellement aplati.
- Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le **vecteur nul**, noté $\vec{0}$. L'**opposé** de $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$, noté $-\overrightarrow{AB}$.
- Si $A \neq B$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour **direction** celle de la droite (AB), pour **sens** celui de A vers B, et pour **norme** la longueur AB, notée $\|\overrightarrow{AB}\|$.
- Pour tout point O et tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

Remarque : Ce qui est admis avec les vecteurs

Cette définition prolonge celle du plan. Deux faits sont **admis** avec elle : l'égalité ainsi définie est cohérente (elle se comporte comme l'égalité des vecteurs du plan), et le point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ existe et est unique.

Définition : Somme de deux vecteurs ; relation de Chasles

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et A un point. Soit B le point tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, puis C le point tel que $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$. La **somme** $\vec{u} + \vec{v}$ est le vecteur $\overrightarrow{AC}$; elle ne dépend pas du point A choisi.

En particulier, pour tous points A, B et C de l'espace, on a la **relation de Chasles** :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

On note $\vec{u} - \vec{v}$ le vecteur $\vec{u} + (-\vec{v})$.

Remarque : Ce qui est admis avec la somme

Le fait que la somme $\vec{u} + \vec{v}$ ne change pas quand on change le point de départ A est **admis**. C'est un prolongement direct du calcul vectoriel du plan.

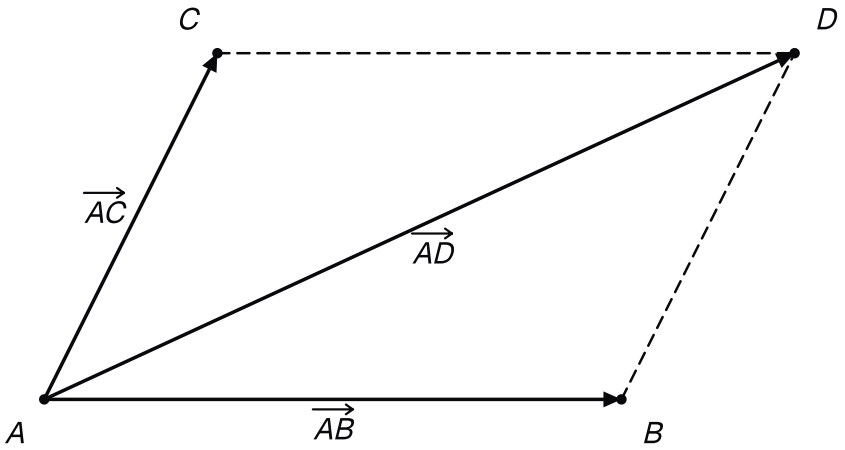
Propriété : Propriétés de l'addition

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace :

- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$;
- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$;
- $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ et $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

Propriété : Règle du parallélogramme

Pour tous points A, B, C et D de l'espace, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme, éventuellement aplati.



Trois flèches issues de A : AB, AC et leur somme AD, qui suit la diagonale de ABDC.

Attention : Un parallélogramme se lit dans le bon ordre

L'ordre des lettres compte. L'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ décrit le parallélogramme $ABDC$.

Si $ABCD$ est un parallélogramme, écris $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, jamais $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Pour t'en assurer, parcours les deux côtés dans le même sens.

Méthode : simplifier une somme de vecteurs

1. **Chercher les enchaînements** : un vecteur qui finit là où un autre commence.
2. **Réordonner** les termes (l'addition est commutative), puis appliquer la relation de Chasles.
3. **Substituer** à un vecteur son égal, pris sur une face en forme de parallélogramme, quand cela crée un enchaînement.
4. **Conclure** par un seul vecteur, ou par $\vec{0}$.

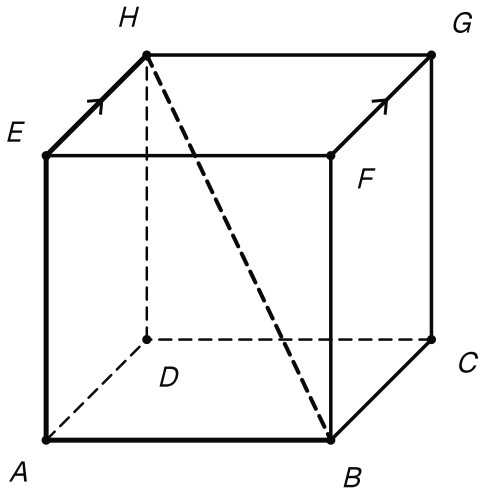
Rédaction : « D'après la relation de Chasles, … ; or $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EH}$ car $EFGH$ est un parallélogramme, donc … ».

Exemple : une somme dans un cube

Dans le cube $ABCDEFGH$, simplifions $\vec{s} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{HB}$.

La face $EFGH$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EH}$. Par la relation de Chasles, appliquée deux fois :

$$\begin{aligned}\vec{s} &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HB} \\ &= \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB} \\ &= \overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$



Le chemin A, E, H, B de la somme simplifiée : FG est remplacé par EH, et les trois étapes se ramènent à l'arête [AB].

Produit par un réel et milieu

Définition : Produit d'un vecteur par un réel

Soit $\vec{u}$ un vecteur et k un réel.

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $k = 0$, on pose $k\vec{u} = \vec{0}$.
- Sinon, on écrit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. Le vecteur $k\vec{u}$ est $\overrightarrow{AC}$, où C est le point de la droite (AB) tel que $AC = |k|\,AB$, situé sur la demi-droite $[AB)$ si $k > 0$ et sur la demi-droite opposée si $k < 0$.

Ainsi, lorsque $k \neq 0$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$, le vecteur $k\vec{u}$ a la direction de $\vec{u}$, le même sens si $k > 0$, le sens contraire si $k < 0$, et $\|k\vec{u}\| = |k|\,\|\vec{u}\|$. Ce vecteur ne dépend pas du point A choisi.

Remarque : Ce qui est admis avec le produit

On **admet** que le vecteur $k\vec{u}$ ne dépend pas du point A choisi pour représenter $\vec{u}$, comme dans le plan.

Propriété : Règles de calcul avec le produit par un réel

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et tous réels k et k' :

- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$ et $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$;
- $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$ et $1\vec{u} = \vec{u}$;
- $k\vec{u} = \vec{0}$ si et seulement si $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$.

Remarque : Règles de calcul : la part admise

Ces règles ne sont qu'esquissées : on se place dans un plan de l'espace qui contient tous les points en jeu. On y applique le calcul vectoriel du plan, qui est **admis** ici, ainsi que l'accord entre vecteurs du plan et vecteurs de l'espace.

Propriété : Milieu d'un segment

Soit A, B et I trois points de l'espace. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- I est le milieu de $[AB]$;
- $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$;
- $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$;
- $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

De plus, si I est le milieu de $[AB]$, alors pour tout point M de l'espace : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

À retenir : Le milieu : deux usages

Le milieu sert de deux façons.

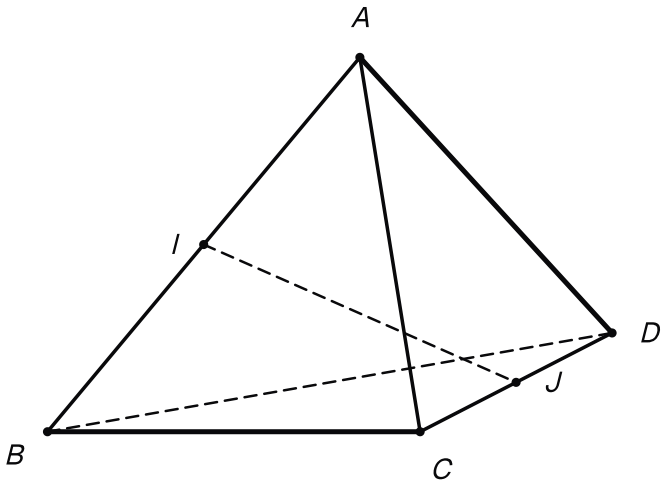
- Pour **placer** I, écris $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
- Pour **remplacer** une somme par un seul vecteur, écris $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$, avec le point M de ton choix.

Exemple : deux milieux d'un tétraèdre

Soit $ABCD$ un tétraèdre, I le milieu de $[AB]$ et J celui de $[CD]$. La relation de Chasles donne deux chemins de I à J :

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ},$$
$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CJ}.$$

On les additionne. Par la propriété du milieu (F07), $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{CJ} = \vec{0}$. Il reste $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.



Deux chemins de I à J dans le tétraèdre : par A et D, ou par B et C ; leur somme fait apparaître AD et BC.

Colinéarité, droites et alignement

Deux vecteurs non nuls colinéaires ont la même direction. Une droite est donc connue par un point et un seul vecteur directeur. Pour prouver un alignement, tu cherches un réel k, et tu l'écris.

Définition : Vecteurs colinéaires ; vecteur directeur d'une droite

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$ ou $\vec{u} = k\vec{v}$. Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Un vecteur **non nul** $\vec{u}$ est un **vecteur directeur** d'une droite D s'il existe deux points distincts A et B de D tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires.

Soit A un point et $\vec{u}$ un vecteur non nul. La droite (AB), où B est le point tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, est la **droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$** ; on la note $D(A, \vec{u})$.

Propriété : Caractérisation vectorielle d'une droite ; alignement

- Soit A, B et C trois points avec $A \neq B$. Les points A, B et C sont **alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
- Soit A un point et $\vec{u}$ un vecteur non nul. Un point M appartient à $D(A, \vec{u})$ si et seulement s'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$.
- Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur d'une droite D et si A est un point de D, alors $D = D(A, \vec{u})$.

Remarque : Alignement : la part admise

Cette propriété est esquissée : trois points sont toujours dans un même plan, où l'on applique le lien entre colinéarité et alignement vu au tronc commun. Cette propriété du plan est **admise**.

Méthode : démontrer un alignement

1. **Fixer** des vecteurs de référence de la configuration, deux à deux non colinéaires.
2. **Écrire** $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ à l'aide de ces vecteurs, par la relation de Chasles.
3. **Exhiber** le réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.
4. **Conclure** par la caractérisation de l'alignement (F09) : vecteurs colinéaires, donc points alignés.

Rédaction : « $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ avec $k = \ldots$, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires : A, B, C sont alignés ».

Attention : La perspective ne prouve rien

Un dessin en perspective trompe : deux droites y semblent se couper sans être sécantes, et trois points y semblent alignés sans l'être.

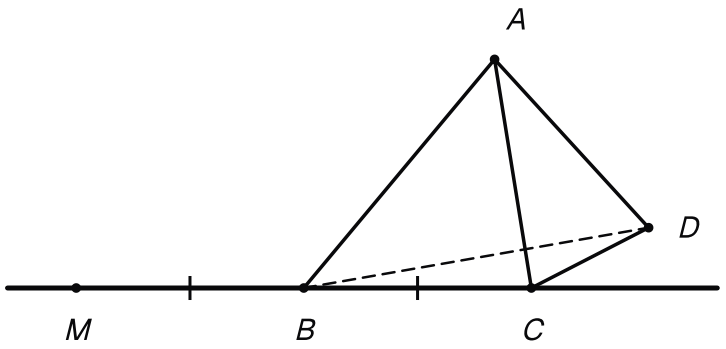
Aucune propriété ne se lit sur la figure. Alignement, parallélisme et coplanarité se démontrent par le calcul vectoriel.

Exemple : un point défini par une égalité

Soit $ABCD$ un tétraèdre et M le point tel que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$. Par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BM} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} \\ &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC}.\end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BC}$ avec $k = -1$: les points B, C, M sont alignés, et B est le milieu de $[CM]$.



Le point M défini par AM = 2AB – AC : sur la droite (BC), B étant le milieu de [CM].

Droites parallèles

Deux droites parallèles ont la même direction. Pour le prouver, compare leurs vecteurs directeurs, écrits avec les mêmes vecteurs de référence.

Propriété : Droites parallèles

Soit D et D' deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$. Les droites D et D' sont **parallèles** si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires.

Remarque : Droites parallèles : la part admise

Cette propriété est esquissée : deux droites parallèles sont dans un même plan, où s'applique le résultat du tronc commun. Ce résultat du plan est **admis** ici.

Méthode : démontrer que deux droites sont parallèles

1. **Nommer** un vecteur directeur de chaque droite, par exemple $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
2. **Écrire** ces deux vecteurs avec les mêmes vecteurs de référence.
3. **Exhiber** le réel k tel que $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$.

4. **Conclure** par la propriété des droites parallèles (F10) : les droites sont parallèles. Elles peuvent être confondues : précise-le quand la question le demande.

Attention : Non parallèles ne veut pas dire sécantes

Dans l'espace, deux droites qui ne sont pas parallèles peuvent n'avoir aucun point commun : elles ne sont alors dans aucun plan commun.

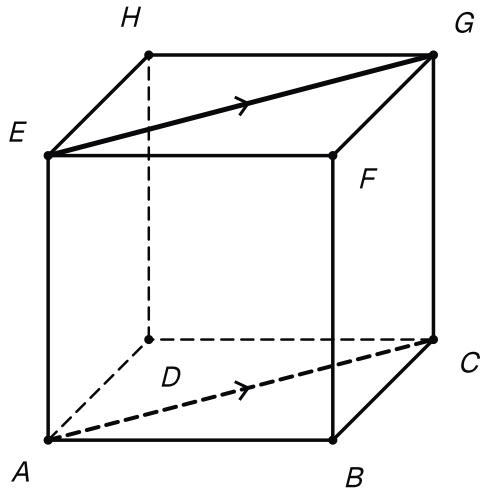
Dans le cube $ABCDEFGH$, c'est le cas de (AB) et (CG). Ne conclus donc jamais « sécantes » à partir de « non parallèles ».

Exemple : deux diagonales de faces

Dans le cube $ABCDEFGH$, les faces $ABFE$ et $BCGF$ sont des parallélogrammes, donc $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{BC}$. Par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EG} &= \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{EG} = k\overrightarrow{AC}$ avec $k = 1$: les droites (EG) et (AC) sont parallèles.



Les diagonales [EG], sur la face du dessus, et [AC], sur la face du dessous, parallèles comme le chevron le code.

Plans et vecteurs coplanaires

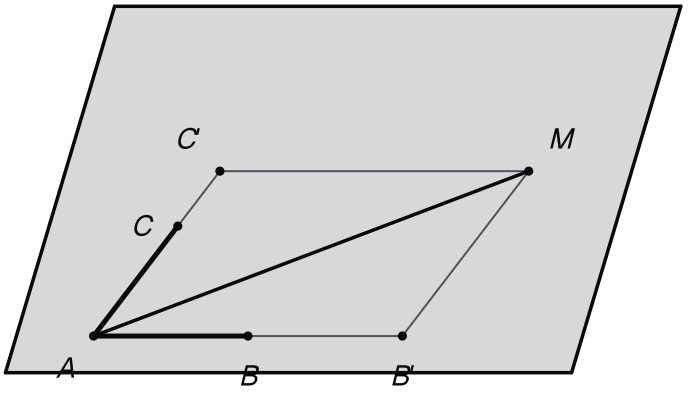
Un plan est porté par deux directions. Depuis un de ses points, on atteint tous les autres avec deux vecteurs non colinéaires et deux réels.

Théorème : Caractérisation vectorielle d'un plan

Soit A, B et C trois points non alignés. Un point M appartient au plan (ABC) si et seulement s'il existe deux réels x et y tels que

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}.$$

Avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, on dit que le plan (ABC) passe par A et qu'il est **dirigé** par le couple $(\vec{u}, \vec{v})$ de vecteurs non colinéaires ; on le note $P(A, \vec{u}, \vec{v})$.



Le plan (ABC), passant par A et dirigé par AB et AC : M, avec x = 2 et y = 1,5, est un point de ce plan.

À retenir : Un point d'un plan : deux réels à exhiber

Le plan (ABC) est le plan $P(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Pour prouver qu'un point M lui appartient, vérifie d'abord que A, B, C ne sont pas alignés. Exhibe ensuite deux réels x et y tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

Définition : Vecteurs coplanaires ; points coplanaires

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** si, pour un point O et les points A, B et C tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$, les quatre points O, A, B et C appartiennent à un même plan. Cette propriété ne dépend pas du point O choisi.

Des points sont **coplanaires** s'ils appartiennent à un même plan.

Remarque : Ce qui est admis avec la coplanarité

On **admet** que la coplanarité de trois vecteurs ne dépend pas du point O choisi pour les représenter. C'est le même type de fait que pour la somme et le produit par un réel.

Théorème : Critère de coplanarité

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs **non colinéaires** et $\vec{w}$ un vecteur. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe deux réels x et y tels que

$$\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}.$$

Méthode : démontrer que trois vecteurs sont coplanaires

1. **Choisir** deux des trois vecteurs qui ne sont pas colinéaires, $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et le justifier.
2. **Écrire** le troisième, $\vec{w}$, avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$, grâce à la relation de Chasles et au calcul vectoriel.
3. **Exhiber** x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.
4. **Conclure** par le critère de coplanarité.

Autre voie : écrire une relation $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ dont un coefficient au moins n'est pas nul.

Attention : Le critère exige deux vecteurs non colinéaires

Le critère de coplanarité ne s'applique que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Prends $\vec{v} = 2\vec{u}$: les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires quel que soit $\vec{w}$. Pourtant $\vec{w}$ ne s'écrit pas toujours $x\vec{u} + y\vec{v}$.

Relation linéaire et non-coplanarité

Propriété : Coplanarité et relation linéaire

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe trois réels a, b et c, **non tous nuls**, tels que

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}.$$

Autrement dit, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont **pas** coplanaires si et seulement si, pour tous réels a, b et c, l'égalité $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ entraîne $a = b = c = 0$.

En particulier (**identification des coefficients**), si $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires et si

$$\begin{aligned} &x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} \\ &= x'\vec{u} + y'\vec{v} + z'\vec{w}, \end{aligned}$$

alors $x = x'$, $y = y'$ et $z = z'$.

Propriété : Points coplanaires

Quatre points A, B, C et D sont coplanaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

Si, de plus, A, B et C ne sont pas alignés, cela équivaut à l'existence de deux réels x et y tels que $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

Méthode : démontrer que quatre points sont coplanaires

1. **Prendre** un des quatre points, A, comme origine, et former $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
2. **Justifier** que A, B, C ne sont pas alignés.
3. **Exhiber** x et y tels que $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.
4. **Conclure** par la propriété des points coplanaires (F15) : les points A, B, C, D sont coplanaires.

Méthode : démontrer que trois vecteurs ne sont pas coplanaires

1. **Poser** des réels a, b, c quelconques tels que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$.
2. **Réécrire** cette égalité avec trois vecteurs déjà connus non coplanaires, comme $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ dans un tétraèdre $ABCD$.
3. **Identifier** : chaque coefficient obtenu est nul, ce qui donne un système en a, b, c.
4. **Résoudre** et conclure par la relation linéaire (F14) : $a = b = c = 0$, donc les vecteurs ne sont pas coplanaires.

À retenir : Identifier les coefficients

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs non coplanaires. Si

$$\begin{aligned} &a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} \\ &= a'\vec{u} + b'\vec{v} + c'\vec{w}, \end{aligned}$$

alors $a = a'$, $b = b'$ et $c = c'$.

Pour le justifier, fais tout passer dans un membre : la relation linéaire (F14) annule alors les trois coefficients. C'est l'outil central du chapitre.

Attention : Non tous nuls, tous non nuls

« Non tous nuls » ne signifie pas « tous non nuls ».

Pour prouver une coplanarité, un seul coefficient non nul suffit dans $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{0}$. Pour prouver une non-coplanarité, il faut au contraire montrer que les **trois** coefficients sont nuls.

Exemple : trois vecteurs non coplanaires

Dans un tétraèdre $ABCD$, posons $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$.

Soit a, b, c des réels tels que $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{0}$. En regroupant :

$$(a+b+c)\overrightarrow{AB}+(b+c)\overrightarrow{AC}+c\overrightarrow{AD}=\vec{0}.$$

Les points A, B, C, D ne sont pas coplanaires, donc $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ non plus (propriété des points coplanaires, F15). Par la relation linéaire (F14), $a+b+c=0$, $b+c=0$ et $c=0$.

Ainsi $c=0$, puis $b=0$, puis $a=0$: $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.

Droite parallèle à un plan, plans parallèles

Imagine un crayon tenu à plat au-dessus d'une table, sans la toucher : sa direction est l'une de celles de la table.

Le calcul vectoriel traduit cette idée par une coplanarité.

Propriété : Droite parallèle à un plan

Soit $P=P(A,\vec{u},\vec{v})$ un plan et D une droite de vecteur directeur $\vec{w}$. La droite D est parallèle au plan P si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, c'est-à-dire s'il existe deux réels x et y tels que $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$.

Propriété : Plans parallèles

Soit $P=P(A,\vec{u},\vec{v})$ et $P'=P(A',\vec{u}',\vec{v}')$ deux plans. Les plans P et P' sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}'$ sont coplanaires et les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{v}'$ sont coplanaires.

Méthode : droite parallèle à un plan, plans parallèles

1. **Nommer** un vecteur directeur $\vec{w}$ de la droite et un couple $(\vec{u},\vec{v})$ de vecteurs non colinéaires qui dirige le plan.
2. **Exhiber** x et y tels que $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$.
3. **Conclure** : la droite est parallèle au plan (F16, parallélisme d'une droite et d'un plan).
4. **Pour deux plans**, faire de même pour chacun des deux vecteurs qui dirigent le second plan, puis conclure (F17, parallélisme de deux plans).

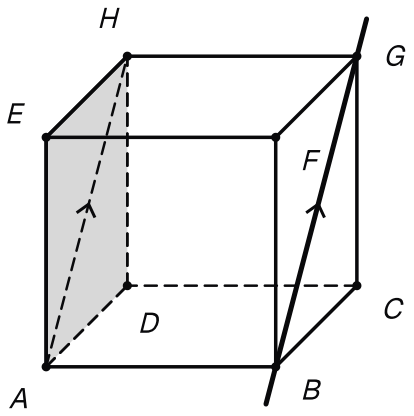
Exemple : une droite parallèle à une face

Dans le cube $ABCDEFGH$, les points A, D, E ne sont pas alignés : E n'est pas dans le plan de la face $ABCD$, qui contient (AD). Le plan (ADE) est donc dirigé par le couple $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

La face $ABCD$ donne $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$; les faces $BCGF$ et $ABFE$ donnent $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AE}$. Par la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE},$$

avec $x = 1$ et $y = 1$. D'après F16 (parallélisme d'une droite et d'un plan), la droite (BG) est parallèle au plan (ADE).



La droite (BG), parallèle au plan (ADE) de la face de gauche, teintée : BG = AD + AE.

Rédiger en devoir

Milieu I de [AB], pour tout point M

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$$

A, B, C alignés (A et B distincts)

$$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$$

(AB) et (CD) parallèles

$$\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$$

M dans le plan (ABC), A, B, C non alignés

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$$

u, v, w coplanaires (u et v non colinéaires)

$$\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$$

u, v, w non coplanaires

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} \Rightarrow a = b = c = 0$$

À retenir : Coin devoir : les formes de questions

Un devoir surveillé enchaîne des questions types.

- « Exprimer un vecteur » : relation de Chasles, puis égalités lues sur des parallélogrammes nommés.
- « Montrer que … sont alignés » ou « … parallèles » : le réel k, écrit.
- « Montrer que … sont coplanaires » : les réels x et y, écrits.
- « Montrer que … ne sont pas coplanaires » : une relation nulle quelconque, puis $a = b = c = 0$.

Tu sais maintenant tout ramener à trois vecteurs non coplanaires et à leurs coefficients. Au chapitre suivant, la géométrie analytique de l'espace, ces coefficients deviendront des coordonnées.