BURHAN

Vecteurs de l'espace : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

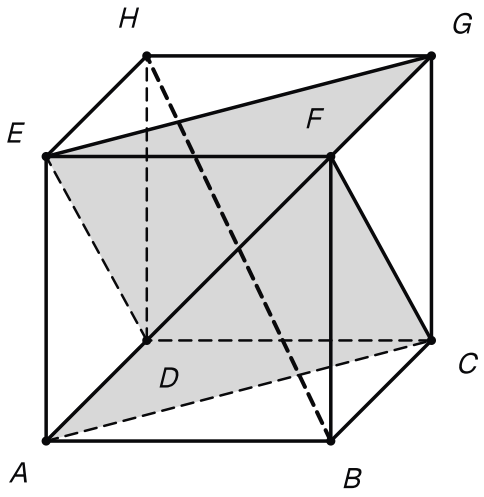
Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/vecteurs-de-l-espace/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Vecteurs de l'espace	Niveau examen	5

Exercice 1 — 10 pts

Problème : Deux plans qui découpent une diagonale du cube

Soit $ABCDEFGH$ un cube : faces $ABCD$ (dessous) et $EFGH$ (dessus), arêtes verticales $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$; faces latérales $ABFE$, $BCGF$, $DCGH$, $ADHE$. Ses faces sont des parallélogrammes, et le sommet E n'est pas dans le plan de la face $ABCD$. Trace une figure à main levée ; aucune réponse ne doit s'appuyer sur elle. On travaille avec $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$, et avec la diagonale $[BH]$.



Le cube de l'énoncé, la diagonale [BH], et les triangles ACF et DEG qui représentent les deux plans étudiés.

1. — 0,5 pts

Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires.

INDICE

Traduis la position de E par rapport à la face $ABCD$ en une propriété des quatre points A, B, D, E.

2. — 2 pts

Exprimer en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ les vecteurs $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DG}$.

INDICE

Lis les égalités de vecteurs sur les faces, puis applique la relation de Chasles.

3. — 2 pts

Montrer que (ACF) et (DEG) sont des plans, puis qu'ils sont parallèles.

INDICE

Pour les plans : montre que $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF}$ ne sont pas colinéaires, de même pour $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DG}$. Pour le parallélisme : écris $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DG}$ avec $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF}$.

4. 1,5 pts

Soit K le point tel que $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BH}$. Montrer que K appartient au plan (ACF).

INDICE

Calcule $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK}$ avec les vecteurs de référence.

5. 2 pts

Soit M un point de la droite (BH), et t le réel tel que $\overrightarrow{BM} = t\overrightarrow{BH}$. Montrer que M appartient à (ACF) si et seulement si $t = \frac{1}{3}$. En déduire l'intersection de la droite (BH) et du plan (ACF).

INDICE

Écris $\overrightarrow{AM}$ et $x\overrightarrow{AC} + y\overrightarrow{AF}$ avec les trois vecteurs de référence, puis compare les coefficients.

6. 1 pts

Soit L le point tel que $\overrightarrow{BL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BH}$. Montrer que L appartient au plan (DEG).

INDICE

Calcule $\overrightarrow{DL} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BL}$.

7. 1 pts

Montrer que $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{LH}$. Interpréter ce résultat pour le segment $[BH]$.

INDICE

Écris chacun des trois vecteurs comme un multiple de $\overrightarrow{BH}$.

Exercice 2

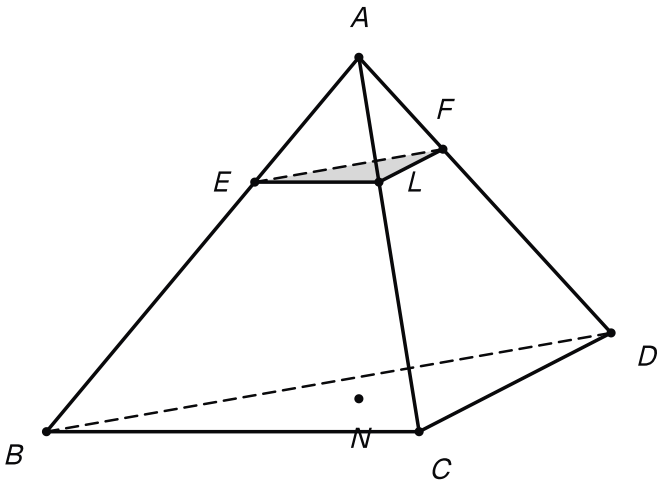
10 pts

Problème : Une section d'un tétraèdre parallèle à une face

Soit $ABCD$ un tétraèdre. On définit les points E, F, L et N par :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB},$$
$$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD},$$
$$\overrightarrow{CL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA},$$
$$\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} = \vec{0}.$$

On travaille avec les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.



Le tétraèdre ABCD et les points E, F, L, N de l'énoncé, avec le triangle EFL.

1.

0,5 pts

Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires.

INDICE

Que sait-on des quatre sommets d'un tétraèdre ?

2.

1,5 pts

Montrer que $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$ et que $\overrightarrow{EL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

INDICE

Commence par $\overrightarrow{AL}$: $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CL}$. Écris ensuite $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE}$.

3. 1 pts

En déduire que les droites (EF) et (BD) sont parallèles.

INDICE

Lis le réel k dans la question 2.

4. 2 pts

Montrer que E, F, L ne sont pas alignés, puis que les plans (EFL) et (BCD) sont parallèles.

INDICE

B, C, D ne sont pas alignés : déduis-en que $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires, puis transporte ce fait par la question 2.

5. 1,5 pts

Montrer que $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$, puis que N appartient au plan (BCD).

INDICE

Fais apparaître A dans chacun des trois vecteurs de la définition de N. Pour le plan, calcule $\overrightarrow{BN}$.

6. 2,5 pts

Calculer $\overrightarrow{EN}$, puis démontrer que $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{EL}$ et $\overrightarrow{EN}$ ne sont pas coplanaires.

INDICE

Pars de $a\overrightarrow{EF} + b\overrightarrow{EL} + c\overrightarrow{EN} = \vec{0}$ avec a, b, c quelconques ; écris tout avec $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, puis identifie.

7. 1 pts

En déduire que N n'appartient pas au plan (EFL), puis que les plans (EFL) et (BCD) sont distincts.

INDICE

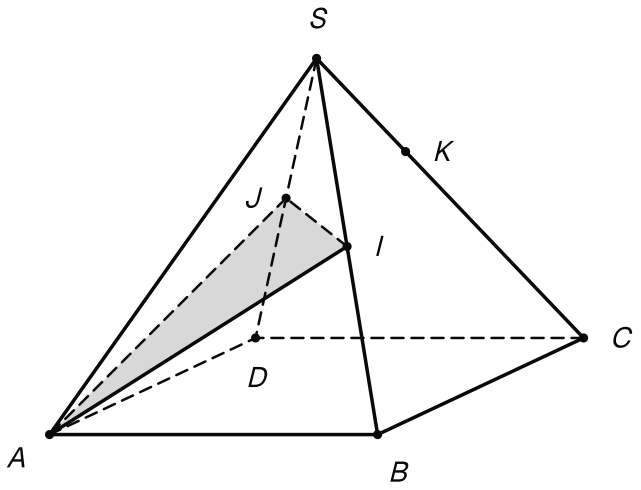
Si N était dans (EFL), que dirait F15 des quatre points E, F, L, N ?

Exercice 3

10 pts

Problème : Un plan qui coupe une arête d'une pyramide

Soit $SABCD$ une pyramide de sommet S dont la base $ABCD$ est un parallélogramme non aplati ; le point S n'est pas dans le plan de la base. On note I le milieu de $[SB]$, J le milieu de $[SD]$, et K le point tel que $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SC}$. Les vecteurs de référence sont $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AS}$.



La pyramide SABCD de l'énoncé, I milieu de [SB], J milieu de [SD], K au tiers de [SC] depuis S, et le triangle AIJ.

1. 0,5 pts

Justifier que $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AS}$ ne sont pas coplanaires.

INDICE

Le plan de la base est le plan (ABD).

2. 1 pts

Montrer que $\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AS}$.

INDICE

Va de S à C par A et B, et utilise la base.

3. 2 pts

Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. En déduire que la droite (IJ) est parallèle au plan (ABD) de la base.

INDICE

Passe par S pour $\overrightarrow{IJ}$. Le plan de la base est dirigé par le couple $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

4. 1 pts

Exprimer $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ en fonction des vecteurs de référence.

INDICE

Utilise la propriété du milieu avec le point A.

5. 2,5 pts

Montrer que A, I, J ne sont pas alignés, puis que $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$. Que peut-on en conclure pour le point K ?

INDICE

Pour la non-colinéarité de $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$, regarde le coefficient de $\overrightarrow{AD}$, puis celui de $\overrightarrow{AB}$. Calcule ensuite $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AS} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SC}$.

6. 1,5 pts

Soit P le milieu de $[IJ]$. Montrer que les points A, P et K sont alignés.

INDICE

Exprime $\overrightarrow{AP}$ avec $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$, puis compare avec la question 5.

7. 1,5 pts

Démontrer que $\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ ne sont pas coplanaires. En déduire que la droite (SC) coupe le plan (AIJ) au seul point K.

INDICE

Pars d'une relation $a\overrightarrow{SC} + b\overrightarrow{AI} + c\overrightarrow{AJ} = \vec{0}$ quelconque et identifie les coefficients suivant les trois vecteurs de référence.

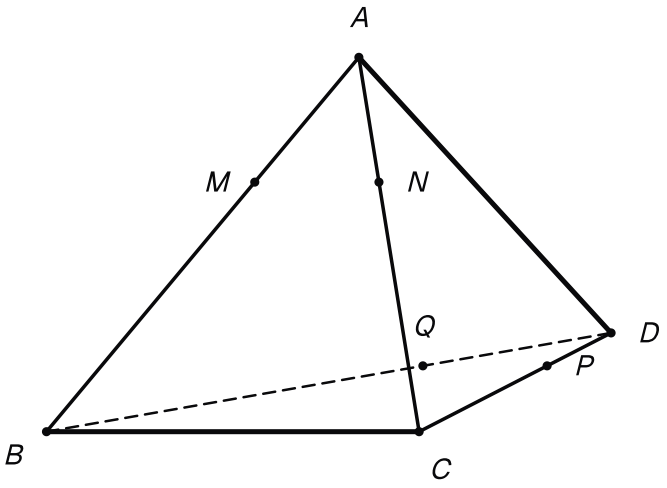
Exercice 4 — 10 pts

Problème : Un parallélogramme parallèle à deux arêtes opposées d'un tétraèdre

Soit $ABCD$ un tétraèdre. Les arêtes $[BC]$ et $[AD]$ n'ont aucun sommet commun : on dit qu'elles sont **opposées**. On définit les points M, N, P et Q par :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB},$$
$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC},$$
$$\overrightarrow{CP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD},$$
$$\overrightarrow{BQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}.$$

On travaille avec les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$. Dessine le tétraèdre pour suivre les lettres ; le raisonnement, lui, ne repose que sur le calcul vectoriel.



Le tétraèdre ABCD, ses arêtes opposées [BC] et [AD], et les points M, N, P, Q de l'énoncé.

1. — 1 pts

Montrer que $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ et que $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.

INDICE

Écris $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP}$, puis $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}$.

2. — 1,5 pts

Montrer que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et que $\overrightarrow{MQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.

INDICE

Fais passer chaque vecteur par A : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}$, et de même pour les deux autres.

3. 2 pts

Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires. En déduire que les points M, N et Q ne sont pas alignés.

INDICE

Écris $\overrightarrow{BC}$ avec $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Une égalité $\overrightarrow{BC} = t\overrightarrow{AD}$ donne une relation entre trois vecteurs qui ne sont pas coplanaires : regarde le coefficient de $\overrightarrow{AB}$.

4. 1,5 pts

Montrer que $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MP}$. En déduire que $MNPQ$ est un parallélogramme non aplati et que P appartient au plan (MNQ).

INDICE

Écris $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QP}$ et utilise la question 2. Pour le plan, lis les réels x et y dans l'égalité obtenue.

5. 1,5 pts

Démontrer que les droites (BC) et (AD) sont toutes deux parallèles au plan (MNQ). Ces deux droites sont-elles parallèles entre elles ?

INDICE

Le plan (MNQ) est dirigé par le couple $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MQ})$. Exprime $\overrightarrow{BC}$ puis $\overrightarrow{AD}$ avec ces deux vecteurs.

6. 1,5 pts

Soit I le milieu de $[BC]$, J le milieu de $[AD]$ et O le milieu de $[MP]$. Montrer que $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, puis que $\overrightarrow{JO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{JI}$. Que peut-on en conclure pour les points J, O et I ?

INDICE

Utilise la propriété du milieu avec le point A pour O, pour I et pour J, puis écris $\overrightarrow{JO} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AJ}$.

7. 1 pts

Soit k un réel. On définit les points M' et P' par $\overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CP'} = (1-k)\overrightarrow{CD}$, et l'on note O' le milieu de $[M'P']$. Démontrer que $\overrightarrow{JO'} = k\overrightarrow{JI}$. Que peut-on en conclure ?

INDICE

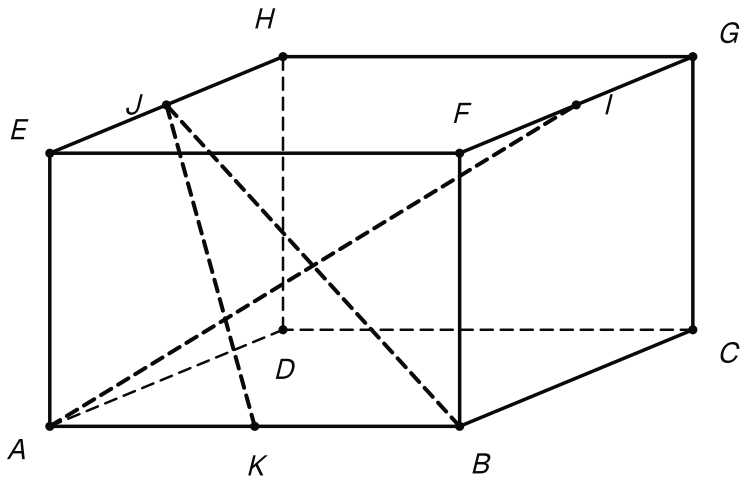
Reprends les calculs des questions 1 et 6 en remplaçant $\frac{1}{3}$ par k et $\frac{2}{3}$ par $1-k$.

Exercice 5 — 10 pts

Problème : Droites sécantes ou non coplanaires dans un parallélépipède

Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède : faces $ABCD$ (dessous) et $EFGH$ (dessus), arêtes $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$; faces latérales $ABFE$, $BCGF$, $DCGH$, $ADHE$. Ses six faces sont des parallélogrammes, et les sommets A, B, D, E ne sont pas coplanaires. On note I le milieu de $[FG]$, J le milieu de $[EH]$ et K le milieu de $[AB]$.

On travaille avec les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$. Un croquis aide à suivre les lettres, mais chaque conclusion se justifie par un calcul de vecteurs.



Le parallélépipède de l'énoncé, I milieu de [FG], J milieu de [EH], K milieu de [AB], et les droites (AI), (BJ) et (KJ).

1. — 0,5 pts

Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires.

INDICE

Traduis l'hypothèse sur les quatre sommets A, B, D, E.

2. — 1,5 pts

Exprimer $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$, $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{KJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$. Vérifier que $\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{AB}$.

INDICE

Lis les égalités de vecteurs sur les faces ($\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{EH}$), puis utilise la relation de Chasles et le milieu.

3. 1,5 pts

Montrer que $ABIJ$ est un parallélogramme non aplati. En déduire que les droites (AI) et (BJ) sont sécantes, et préciser leur point commun.

INDICE

Utilise la définition de l'égalité de deux vecteurs par les milieux des diagonales. Pour « non aplati », montre que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ}$ ne sont pas colinéaires.

4. 2 pts

Démontrer que les droites (AI) et (KJ) sont sécantes en un point P tel que $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$.

INDICE

Un point M de (AI) vérifie $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AI}$; un point de (KJ) vérifie $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AK} + s\overrightarrow{KJ}$. Écris les deux avec les vecteurs de référence et identifie.

5. 2 pts

Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{BJ}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BI}$ ne sont pas coplanaires. En déduire que les droites (BJ) et (DI) ne sont ni parallèles ni sécantes.

INDICE

Pars d'une relation $a\overrightarrow{BJ} + b\overrightarrow{BD} + c\overrightarrow{BI} = \vec{0}$ quelconque. Pour la suite : deux droites parallèles ou sécantes sont contenues dans un même plan.

6. 1 pts

Soit m un réel et L le point tel que $\overrightarrow{AL} = m\overrightarrow{AD}$. Montrer que $\overrightarrow{LI} = \overrightarrow{AB} + \left(\frac{1}{2} - m\right)\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$, puis que les droites (BJ) et (LI) ne sont pas parallèles.

INDICE

Compare les coefficients de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AE}$ dans $\overrightarrow{LI}$ et dans $\overrightarrow{BJ}$.

7. 1,5 pts

Démontrer que les droites (BJ) et (LI) sont sécantes si et seulement si $m = 0$. Retrouver ainsi les résultats des questions 3 et 5.

INDICE

Écris un point de (BJ) avec un réel s et un point de (LI) avec un réel t, en partant de A, puis identifie les coefficients.