BURHAN

Vecteurs de l'espace : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

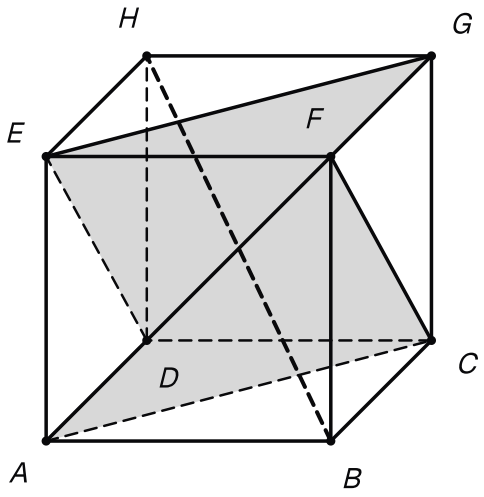
Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/vecteurs-de-l-espace/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Vecteurs de l'espace	Niveau examen	5

Exercice 1 10 pts

Problème : Deux plans qui découpent une diagonale du cube

Soit $ABCDEFGH$ un cube : faces $ABCD$ (dessous) et $EFGH$ (dessus), arêtes verticales $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$; faces latérales $ABFE$, $BCGF$, $DCGH$, $ADHE$. Ses faces sont des parallélogrammes, et le sommet E n'est pas dans le plan de la face $ABCD$. Trace une figure à main levée ; aucune réponse ne doit s'appuyer sur elle. On travaille avec $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$, et avec la diagonale $[BH]$.



Le cube de l'énoncé, la diagonale [BH], et les triangles ACF et DEG qui représentent les deux plans étudiés.

1. 0,5 pts

Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires.

INDICE

Traduis la position de E par rapport à la face $ABCD$ en une propriété des quatre points A, B, D, E.

CORRIGÉ

Les points A, B, D. Ils ne sont pas alignés, car ce sont trois sommets d'une face carrée. Le seul plan qui les contient est donc (ABD), celui de la face $ABCD$.

Le point E. Par hypothèse, $E \notin (ABD)$: les points A, B, D, E ne sont pas coplanaires.

Conclusion. D'après la propriété des points coplanaires (F15), les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires.

2. 2 pts

Exprimer en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ les vecteurs $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DG}$.

INDICE

Lis les égalités de vecteurs sur les faces, puis applique la relation de Chasles.

CORRIGÉ

Égalités sur les faces. Les faces sont des parallélogrammes (égalité de deux vecteurs, F01) :

- $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$;
- $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AE}$.

Calculs. Par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BH} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} \\
&= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}, \\
\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \\
&= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}, \\
\overrightarrow{AF} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} \\
&= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}, \\
\overrightarrow{DE} &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} \\
&= -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}, \\
\overrightarrow{DG} &= \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CG} \\
&= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}.
\end{aligned}$$

Conclusion. Les cinq vecteurs sont ainsi exprimés en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$; on retient en particulier $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AF}$.

3. 2 pts

Montrer que (ACF) et (DEG) sont des plans, puis qu'ils sont parallèles.

INDICE

Pour les plans : montre que $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF}$ ne sont pas colinéaires, de même pour $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DG}$. Pour le parallélisme : écris $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DG}$ avec $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF}$.

CORRIGÉ

Le plan (ACF). Soit t un réel. Par la question 2 :

- si $\overrightarrow{AF} = t\overrightarrow{AC}$, alors $(1-t)\overrightarrow{AB} - t\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \vec{0}$, avec le coefficient 1 pour $\overrightarrow{AE}$;
- si $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AF}$, alors $(1-t)\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - t\overrightarrow{AE} = \vec{0}$, avec le coefficient 1 pour $\overrightarrow{AD}$.

D'après la question 1 et F14 (coplanarité et relation linéaire), ces deux relations sont impossibles. Donc $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF}$ ne sont pas colinéaires : A, C, F ne sont pas alignés (caractérisation de l'alignement, F09), et $(ACF) = P(A, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF})$.

Le plan (DEG). De même :

- si $\overrightarrow{DG} = t\overrightarrow{DE}$, alors $\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AD} + (1-t)\overrightarrow{AE} = \vec{0}$, avec le coefficient 1 pour $\overrightarrow{AB}$;
- si $\overrightarrow{DE} = t\overrightarrow{DG}$, alors $-t\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + (1-t)\overrightarrow{AE} = \vec{0}$, avec le coefficient -1 pour $\overrightarrow{AD}$.

F14 l'interdit encore : D, E, G ne sont pas alignés, et $(DEG) = P(D, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DG})$.

Parallélisme. Par la question 2, $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AC}$. Ainsi $\overrightarrow{DE} = x\overrightarrow{AC} + y\overrightarrow{AF}$ avec $x = -1$, $y = 1$, et $\overrightarrow{DG} = x\overrightarrow{AC} + y\overrightarrow{AF}$ avec $x = 0$, $y = 1$. D'après le critère de coplanarité (F13), $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{DE}$ sont coplanaires, et $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{DG}$ aussi.

Conclusion. (ACF) et (DEG) sont des plans et, d'après la propriété des plans parallèles (F17), ils sont parallèles.

4. 1,5 pts

Soit K le point tel que $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BH}$. Montrer que K appartient au plan (ACF).

INDICE

Calcule $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK}$ avec les vecteurs de référence.

CORRIGÉ

Calcul de $\overrightarrow{AK}$. Par la relation de Chasles, la définition de K et la question 2 :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AK} &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BH}\\ &= \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\\ &\quad + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\\ &\quad + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}.\end{aligned}$$

Avec $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF}$. Par la question 2 :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AF}\\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\\ &\quad + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\\ &\quad + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}.\end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{AK} = x\overrightarrow{AC} + y\overrightarrow{AF}$ avec $x = y = \frac{1}{3}$.

Conclusion. A, C, F ne sont pas alignés (question 3) : d'après la caractérisation vectorielle d'un plan (F11), le point K appartient au plan (ACF).

5. 2 pts

Soit M un point de la droite (BH), et t le réel tel que $\overrightarrow{BM} = t\overrightarrow{BH}$. Montrer que M appartient à (ACF) si et seulement si $t = \dfrac{1}{3}$. En déduire l'intersection de la droite (BH) et du plan (ACF).

INDICE

Écris $\overrightarrow{AM}$ et $x\overrightarrow{AC} + y\overrightarrow{AF}$ avec les trois vecteurs de référence, puis compare les coefficients.

CORRIGÉ

Deux écritures. D'une part, par la relation de Chasles et la question 2 :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{BH} \\ &= (1-t)\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AD} \\ &\quad + t\overrightarrow{AE}.\end{aligned}$$

D'autre part, pour deux réels x et y :

$$\begin{aligned}&x\overrightarrow{AC} + y\overrightarrow{AF} \\ &= (x+y)\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AD} \\ &\quad + y\overrightarrow{AE}.\end{aligned}$$

Équivalence. D'après la caractérisation vectorielle d'un plan (F11), $M \in (ACF)$ si et seulement s'il existe x et y rendant ces deux vecteurs égaux. Les vecteurs de référence ne sont pas coplanaires (question 1) : on identifie les coefficients (F14). Cela donne $x = t$, $y = t$ et $1 - t = 2t$, c'est-à-dire $t = \dfrac{1}{3}$. Réciproquement, si $t = \dfrac{1}{3}$, les réels $x = y = \dfrac{1}{3}$ conviennent.

Intersection. Le point de (BH) associé à $t = \dfrac{1}{3}$ est le point K de la question 4.

Conclusion. M appartient à (ACF) si et seulement si $t = \dfrac{1}{3}$: la droite (BH) et le plan (ACF) ont pour seul point commun le point K.

6. 1 pts

Soit L le point tel que $\overrightarrow{BL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BH}$. Montrer que L appartient au plan (DEG).

INDICE

Calcule $\overrightarrow{DL} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BL}$.

CORRIGÉ

Calcul de $\overrightarrow{DL}$. Par la relation de Chasles, la définition de L et la question 2 :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DL} &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BH}\\ &= -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\\ &\quad + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}\\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\\ &\quad + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}.\end{aligned}$$

Avec $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DG}$. Par la question 2 :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}\overrightarrow{DE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DG}\\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\\ &\quad + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\\ &\quad + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}.\end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{DL} = x\overrightarrow{DE} + y\overrightarrow{DG}$ avec $x = y = \frac{1}{3}$.

Conclusion. D, E, G ne sont pas alignés (question 3) : d'après la caractérisation vectorielle d'un plan (F11), le point L appartient au plan (DEG).

7. 1 pts

Montrer que $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{LH}$. Interpréter ce résultat pour le segment $[BH]$.

INDICE

Écris chacun des trois vecteurs comme un multiple de $\overrightarrow{BH}$.

CORRIGÉ

Calculs. Par la relation de Chasles, les définitions de K et de L et les règles de calcul avec le produit par un réel (F06) :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KL} &= \overrightarrow{BL} - \overrightarrow{BK}\\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{BH} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BH}\\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{BH},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{LH} &= \overrightarrow{BH} - \overrightarrow{BL}\\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{BH}.\end{aligned}$$

Comme $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BH}$, les trois vecteurs sont égaux.

Interprétation. Les points K et L appartiennent au segment $[BH]$, et les segments $[BK]$, $[KL]$ et $[LH]$ ont la même longueur.

Conclusion. $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{LH}$: les points K, du plan (ACF), et L, du plan (DEG), partagent le segment $[BH]$ en trois segments de même longueur.

Exercice 2

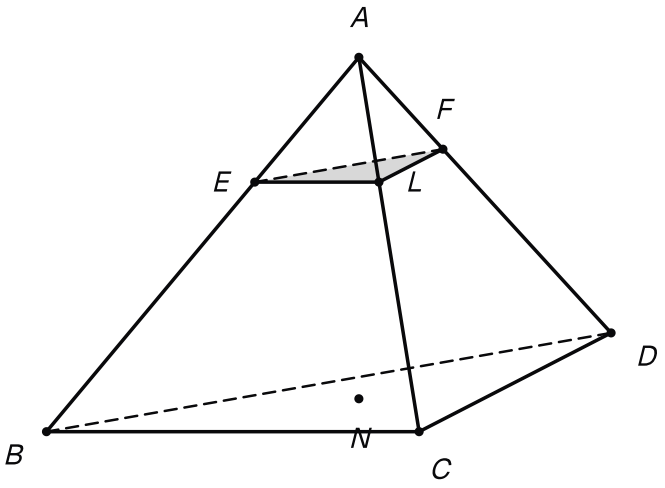
10 pts

Problème : Une section d'un tétraèdre parallèle à une face

Soit $ABCD$ un tétraèdre. On définit les points E, F, L et N par :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB},$$
$$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD},$$
$$\overrightarrow{CL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA},$$
$$\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} = \vec{0}.$$

On travaille avec les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.



Le tétraèdre ABCD et les points E, F, L, N de l'énoncé, avec le triangle EFL.

1.

0,5 pts

Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires.

INDICE

Que sait-on des quatre sommets d'un tétraèdre ?

CORRIGÉ

Les sommets A, B, C, D d'un tétraèdre ne sont pas coplanaires.

Conclusion. D'après la propriété des points coplanaires (F15), les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires.

2. 1,5 pts

Montrer que $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$ et que $\overrightarrow{EL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

INDICE

Commence par $\overrightarrow{AL}$: $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CL}$. Écris ensuite $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE}$.

CORRIGÉ

Calcul de $\overrightarrow{AL}$. Par la définition de L, $\overrightarrow{CL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. Par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AL} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CL}\\ &= \overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Calculs de $\overrightarrow{EF}$ et de $\overrightarrow{EL}$. Par la relation de Chasles et les règles de calcul avec le produit par un réel (F06) :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE}\\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})\\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{BD},\\ \overrightarrow{EL} &= \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AE}\\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})\\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{EL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

3. 1 pts

En déduire que les droites (EF) et (BD) sont parallèles.

INDICE

Lis le réel k dans la question 2.

CORRIGÉ

Par la question 2, $\overrightarrow{EF} = k\overrightarrow{BD}$ avec $k = \frac{1}{3}$: les vecteurs directeurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{BD}$, non nuls, sont colinéaires.

Conclusion. D'après la propriété des droites parallèles (F10), les droites (EF) et (BD) sont parallèles.

4. 2 pts

Montrer que E, F, L ne sont pas alignés, puis que les plans (EFL) et (BCD) sont parallèles.

INDICE

B, C, D ne sont pas alignés : déduis-en que $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires, puis transporte ce fait par la question 2.

CORRIGÉ

B, C, D non alignés. S'ils étaient alignés, les quatre sommets seraient coplanaires. Donc $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires (caractérisation de l'alignement, F09).

E, F, L non alignés. Soit t un réel. Par la question 2, une relation $\overrightarrow{EL} = t\overrightarrow{EF}$ donnerait $\overrightarrow{BC} = t\overrightarrow{BD}$, et une relation $\overrightarrow{EF} = t\overrightarrow{EL}$ donnerait $\overrightarrow{BD} = t\overrightarrow{BC}$: c'est impossible. Donc $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EL}$ ne sont pas colinéaires, et E, F, L ne sont pas alignés.

Parallélisme. Ainsi $(EFL) = P(E, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EL})$ et $(BCD) = P(B, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC})$. Par la question 2 :

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} + 0\overrightarrow{BC},$$

$$\overrightarrow{EL} = 0\overrightarrow{BD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$$

D'après le critère de coplanarité (F13), $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{EF}$ sont coplanaires, et $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{EL}$ aussi.

Conclusion. E, F, L ne sont pas alignés et, d'après la propriété des plans parallèles (F17), les plans (EFL) et (BCD) sont parallèles.

5. 1,5 pts

Montrer que $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$, puis que N appartient au plan (BCD).

INDICE

Fais apparaître A dans chacun des trois vecteurs de la définition de N. Pour le plan, calcule $\overrightarrow{BN}$.

CORRIGÉ

Calcul de $\overrightarrow{AN}$. Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AB}$, et de même pour C et D. L'égalité qui définit N devient :

$$\begin{aligned} &3\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \\ &\quad + \overrightarrow{AD} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Comme $\overrightarrow{NA} = -\overrightarrow{AN}$, on obtient $3\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$, puis $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$ (règles de calcul avec le produit par un réel, F06).

Calcul de $\overrightarrow{BN}$. Par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BN} &= \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} \\ &= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \\ &\quad + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}. \end{aligned}$$

Avec $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$. Comme $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$, la somme $\frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$ a la même expression. Donc $\overrightarrow{BN} = x\overrightarrow{BC} + y\overrightarrow{BD}$ avec $x = y = \frac{1}{3}$.

Conclusion. L'égalité annoncée pour $\overrightarrow{AN}$ est établie et, comme B, C, D ne sont pas alignés (question 4), la caractérisation vectorielle d'un plan (F11) montre que N appartient au plan (BCD).

6. 2,5 pts

Calculer $\overrightarrow{EN}$, puis démontrer que $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{EL}$ et $\overrightarrow{EN}$ ne sont pas coplanaires.

INDICE

Pars de $a\overrightarrow{EF}+b\overrightarrow{EL}+c\overrightarrow{EN}=\vec{0}$ avec a, b, c quelconques ; écris tout avec $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, puis identifie.

CORRIGÉ

Calcul de $\overrightarrow{EN}$. Par la relation de Chasles et la question 5 :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EN}&=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AE}\\&=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

Relation nulle. Soit a, b, c des réels tels que $a\overrightarrow{EF}+b\overrightarrow{EL}+c\overrightarrow{EN}=\vec{0}$. Par la question 2, $\overrightarrow{EF}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{EL}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. En regroupant :

$$\begin{aligned}-\frac{a+b}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{b+c}{3}\overrightarrow{AC}\\+\frac{a+c}{3}\overrightarrow{AD}=\vec{0}.\end{aligned}$$

Identification. Par la question 1 et F14 (coplanarité et relation linéaire), les trois coefficients sont nuls : $a+b=0$, $b+c=0$ et $a+c=0$. Donc $b=-a$, puis $c=-b=a$, puis $a+c=2a=0$. Ainsi $a=b=c=0$.

Conclusion. $\overrightarrow{EN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et, d'après F14, les vecteurs $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{EL}$ et $\overrightarrow{EN}$ ne sont pas coplanaires.

7. 1 pts

En déduire que N n'appartient pas au plan (EFL), puis que les plans (EFL) et (BCD) sont distincts.

INDICE

Si N était dans (EFL), que dirait F15 des quatre points E, F, L, N ?

CORRIGÉ

Raisonnement par l'absurde. Si N appartenait à (EFL), les points E, F, L, N seraient coplanaires. D'après la propriété des points coplanaires (F15), $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{EL}$, $\overrightarrow{EN}$ seraient alors coplanaires, ce que la question 6 exclut. Donc $N\notin(EFL)$.

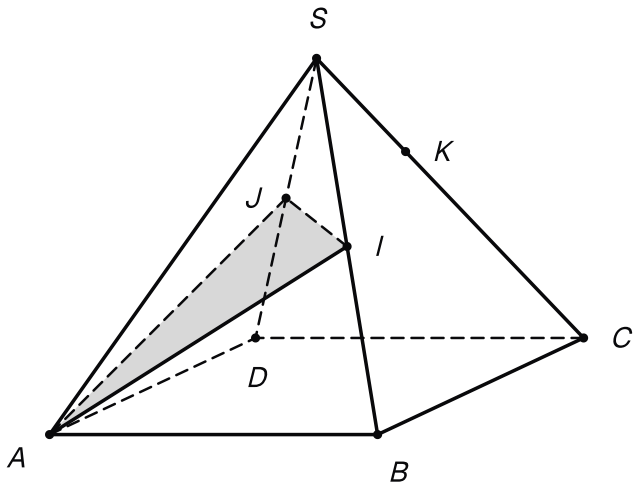
Plans distincts. Le point N appartient à (BCD) (question 5) mais pas à (EFL) : les deux plans sont distincts.

Conclusion. N n'appartient pas au plan (EFL), et les plans (EFL) et (BCD), parallèles par la question 4, sont distincts.

Exercice 3 — 10 pts

Problème : Un plan qui coupe une arête d'une pyramide

Soit $SABCD$ une pyramide de sommet S dont la base $ABCD$ est un parallélogramme non aplati ; le point S n'est pas dans le plan de la base. On note I le milieu de $[SB]$, J le milieu de $[SD]$, et K le point tel que $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SC}$. Les vecteurs de référence sont $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AS}$.



La pyramide SABCD de l'énoncé, I milieu de [SB], J milieu de [SD], K au tiers de [SC] depuis S, et le triangle AIJ.

1. — 0,5 pts

Justifier que $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AS}$ ne sont pas coplanaires.

INDICE

Le plan de la base est le plan (ABD).

CORRIGÉ

Les points A, B, D. Ils ne sont pas alignés, car ce sont trois sommets d'un parallélogramme non aplati. Le seul plan qui les contient est donc (ABD), celui de la base, qui ne contient pas S.

Conclusion. Les points A, B, D, S ne sont pas coplanaires : d'après la propriété des points coplanaires (F15), les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AS}$ ne sont pas coplanaires.

2. 1 pts

Montrer que $\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AS}$.

INDICE

Va de S à C par A et B, et utilise la base.

CORRIGÉ

Relation de Chasles. En passant par A puis par B :

$$\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

Remplacer. La base $ABCD$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ (égalité de deux vecteurs, F01). De plus, $\overrightarrow{SA} = -\overrightarrow{AS}$.

Conclusion. $\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AS}$.

3. 2 pts

Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. En déduire que la droite (IJ) est parallèle au plan (ABD) de la base.

INDICE

Passe par S pour $\overrightarrow{IJ}$. Le plan de la base est dirigé par le couple $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

CORRIGÉ

Calcul de $\overrightarrow{IJ}$. D'après la propriété du milieu (F07), $\overrightarrow{IS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BS}$ et $\overrightarrow{SJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SD}$. Par la relation de Chasles et les règles de calcul avec le produit par un réel (F06) :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IS} + \overrightarrow{SJ} \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BS} + \overrightarrow{SD}) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}.\end{aligned}$$

Le plan de la base. Les points A, B, D ne sont pas alignés (question 1), donc $(ABD) = P(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

Décomposition. Comme $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, on a $\overrightarrow{IJ} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$ avec $x = -\frac{1}{2}$ et $y = \frac{1}{2}$. Ce vecteur n'est pas nul, car $B \neq D$: il dirige la droite (IJ).

Conclusion. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ et, d'après le critère de parallélisme d'une droite et d'un plan (F16), la droite (IJ) est parallèle au plan (ABD) de la base.

4. 1 pts

Exprimer $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ en fonction des vecteurs de référence.

INDICE

Utilise la propriété du milieu avec le point A.

CORRIGÉ

I est le milieu de $[SB]$: d'après la propriété du milieu (F07), avec le point A, $\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AI}$. De même, J est le milieu de $[SD]$, donc $\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AJ}$.

Conclusion. Par les règles de calcul avec le produit par un réel (F06) :

$$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AS},$$
$$\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AS}.$$

5. 2,5 pts

Montrer que A, I, J ne sont pas alignés, puis que $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$. Que peut-on en conclure pour le point K ?

INDICE

Pour la non-colinéarité de $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$, regarde le coefficient de $\overrightarrow{AD}$, puis celui de $\overrightarrow{AB}$. Calcule ensuite $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AS} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SC}$.

CORRIGÉ

Premier cas. Soit t un réel. Si $\overrightarrow{AJ} = t\overrightarrow{AI}$, la question 4 donne :

$$\begin{aligned} &-\frac{t}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\ &+\frac{1-t}{2}\overrightarrow{AS} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Le coefficient de $\overrightarrow{AD}$ vaut $\frac{1}{2}$: d'après la question 1 et F14 (coplanarité et relation linéaire), c'est impossible.

Second cas. Si $\overrightarrow{AI} = t\overrightarrow{AJ}$, on obtient de même :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{t}{2}\overrightarrow{AD} \\ &+\frac{1-t}{2}\overrightarrow{AS} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Le coefficient de $\overrightarrow{AB}$ vaut $\frac{1}{2}$: même contradiction. Donc $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ ne sont pas colinéaires, et A, I, J ne sont pas alignés (caractérisation de l'alignement, F09).

Calcul de $\overrightarrow{AK}$. Par la relation de Chasles, la définition de K et la question 2 :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AK} &= \overrightarrow{AS} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SC} \\ &= \overrightarrow{AS} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \\ &\quad - \frac{1}{3}\overrightarrow{AS} \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \\ &\quad + \frac{2}{3}\overrightarrow{AS}. \end{aligned}$$

Avec $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$. Par la question 4 :

$$\begin{aligned} &\frac{2}{3}\overrightarrow{AI} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ} \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AS} \\ &\quad + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AS}, \end{aligned}$$

ce qui est la même expression. Donc $\overrightarrow{AK} = x\overrightarrow{AI} + y\overrightarrow{AJ}$ avec $x = y = \frac{2}{3}$.

Conclusion. A, I, J ne sont pas alignés et $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$: d'après la caractérisation vectorielle d'un plan (F11), le point K appartient au plan (AIJ).

6. `1,5 pts`

Soit P le milieu de $[IJ]$. Montrer que les points A, P et K sont alignés.

INDICE

Exprime $\overrightarrow{AP}$ avec $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$, puis compare avec la question 5.

CORRIGÉ

Calcul de $\overrightarrow{AP}$. P est le milieu de $[IJ]$: d'après la propriété du milieu (F07), avec le point A, $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ})$.

Comparer. Par la question 5 et les règles de calcul avec le produit par un réel (F06) :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AK} &= \frac{2}{3}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ}) \\ &= \frac{4}{3}\overrightarrow{AP}.\end{aligned}$$

$\overrightarrow{AP}$ **n'est pas nul.** Sinon $\overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{AI}$, et $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$ seraient colinéaires, ce que la question 5 exclut. Donc $A \neq P$.

Conclusion. $\overrightarrow{AK} = k\overrightarrow{AP}$ avec $k = \frac{4}{3}$: d'après la caractérisation de l'alignement (F09), les points A, P et K sont alignés.

7. 1,5 pts

Démontrer que $\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ ne sont pas coplanaires. En déduire que la droite (SC) coupe le plan (AIJ) au seul point K.

INDICE

Pars d'une relation $a\overrightarrow{SC}+b\overrightarrow{AI}+c\overrightarrow{AJ}=\vec{0}$ quelconque et identifie les coefficients suivant les trois vecteurs de référence.

CORRIGÉ

Relation nulle. Soit a, b, c des réels tels que $a\overrightarrow{SC}+b\overrightarrow{AI}+c\overrightarrow{AJ}=\vec{0}$. Par les questions 2 et 4, en regroupant :

$$\begin{aligned}&\left(a+\frac{b}{2}\right)\overrightarrow{AB}\\&\quad+\left(a+\frac{c}{2}\right)\overrightarrow{AD}\\&\quad+\left(-a+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}\right)\overrightarrow{AS}=\vec{0}.\end{aligned}$$

Identification. Par la question 1 et F14 (coplanarité et relation linéaire), chaque coefficient est nul : $b=-2a$ et $c=-2a$. Le troisième coefficient devient $-a-a-a=-3a$, donc $a=0$, puis $b=c=0$. Les vecteurs $\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ ne sont pas coplanaires.

Intersection. Le plan (AIJ) est $P(A,\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ})$ (question 5), et $\overrightarrow{SC}$ dirige la droite (SC). D'après le critère de parallélisme d'une droite et d'un plan (F16), la droite (SC) n'est pas parallèle au plan (AIJ). Une droite non parallèle à un plan le coupe en un seul point (tronc commun). Or K appartient à (SC), par sa définition, et à (AIJ), par la question 5.

Conclusion. Les vecteurs $\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$ ne sont pas coplanaires, et la droite (SC) coupe le plan (AIJ) au seul point K.

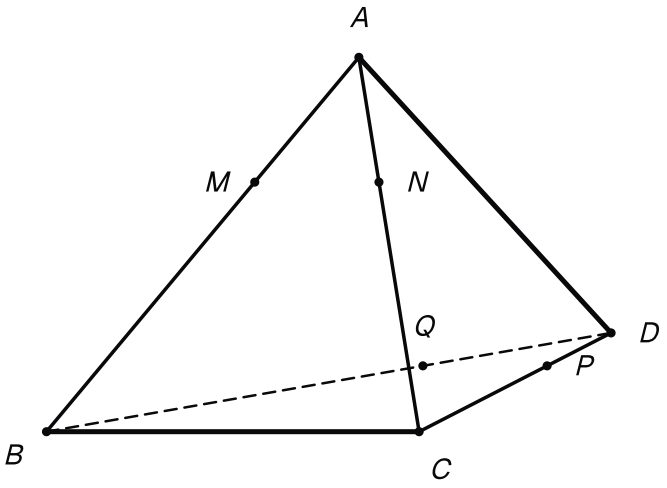
Exercice 4 10 pts

Problème : Un parallélogramme parallèle à deux arêtes opposées d'un tétraèdre

Soit $ABCD$ un tétraèdre. Les arêtes $[BC]$ et $[AD]$ n'ont aucun sommet commun : on dit qu'elles sont **opposées**. On définit les points M, N, P et Q par :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB},$$
$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC},$$
$$\overrightarrow{CP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD},$$
$$\overrightarrow{BQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}.$$

On travaille avec les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$. Dessine le tétraèdre pour suivre les lettres ; le raisonnement, lui, ne repose que sur le calcul vectoriel.



Le tétraèdre ABCD, ses arêtes opposées [BC] et [AD], et les points M, N, P, Q de l'énoncé.

1. 1 pts

Montrer que $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ et que $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.

INDICE

Écris $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP}$, puis $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}$.

CORRIGÉ

Relation de Chasles. $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Calculs. Par les définitions de P et de Q et les règles de calcul avec le produit par un réel (F06) :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}\\ &= \overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}\\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AQ} &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}\\ &= \overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}\\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.

2. 1,5 pts

Montrer que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et que $\overrightarrow{MQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.

INDICE

Fais passer chaque vecteur par A : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}$, et de même pour les deux autres.

CORRIGÉ

Par la relation de Chasles, la question 1 et les règles de calcul avec le produit par un réel (F06) :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}\\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})\\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{BC},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QP} &= \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AQ}\\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{BC},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MQ} &= \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AM}\\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{MQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.

3. 2 pts

Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires. En déduire que les points M, N et Q ne sont pas alignés.

INDICE

Écris $\overrightarrow{BC}$ avec $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Une égalité $\overrightarrow{BC} = t\overrightarrow{AD}$ donne une relation entre trois vecteurs qui ne sont pas coplanaires : regarde le coefficient de $\overrightarrow{AB}$.

CORRIGÉ

Vecteurs de référence. Les sommets A, B, C, D d'un tétraèdre ne sont pas coplanaires : d'après la propriété des points coplanaires (F15), $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires. Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$. Soit t un réel.

- Si $\overrightarrow{BC} = t\overrightarrow{AD}$, alors $-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - t\overrightarrow{AD} = \vec{0}$, avec le coefficient -1 pour $\overrightarrow{AB}$: F14 (coplanarité et relation linéaire) l'interdit.
- Si $\overrightarrow{AD} = t\overrightarrow{BC}$, alors $t\overrightarrow{AB} - t\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$, avec le coefficient 1 pour $\overrightarrow{AD}$: même contradiction.

Donc $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires.

M, N, Q non alignés. Si l'on avait $\overrightarrow{MQ} = t\overrightarrow{MN}$, la question 2 donnerait $\overrightarrow{AD} = \frac{t}{2}\overrightarrow{BC}$; si l'on avait $\overrightarrow{MN} = t\overrightarrow{MQ}$, elle donnerait $\overrightarrow{BC} = 2t\overrightarrow{AD}$. Les deux cas sont exclus : $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MQ}$ ne sont pas colinéaires.

Conclusion. $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires et, d'après la caractérisation de l'alignement (F09), les points M, N et Q ne sont pas alignés.

4. 1,5 pts

Montrer que $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{MP}$. En déduire que $MNPQ$ est un parallélogramme non aplati et que P appartient au plan (MNQ).

INDICE

Écris $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{QP}$ et utilise la question 2. Pour le plan, lis les réels x et y dans l'égalité obtenue.

CORRIGÉ

Relation de Chasles. Par la question 2, $\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{MN}$, donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MP}&=\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{QP}\\&=\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{MN}.\end{aligned}$$

Parallélogramme. D'après la règle du parallélogramme (F04), l'égalité $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{MP}$ signifie que $MNPQ$ est un parallélogramme, éventuellement aplati. Il n'est pas aplati, car M, N, Q ne sont pas alignés (question 3).

Le point P. Ainsi (MNQ) est un plan, et $\overrightarrow{MP}=x\overrightarrow{MN}+y\overrightarrow{MQ}$ avec $x=y=1$.

Conclusion. $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{MP}$, $MNPQ$ est un parallélogramme non aplati et, d'après la caractérisation vectorielle d'un plan (F11), P appartient au plan (MNQ).

5. 1,5 pts

Démontrer que les droites (BC) et (AD) sont toutes deux parallèles au plan (MNQ). Ces deux droites sont-elles parallèles entre elles ?

INDICE

Le plan (MNQ) est dirigé par le couple $(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MQ})$. Exprime $\overrightarrow{BC}$ puis $\overrightarrow{AD}$ avec ces deux vecteurs.

CORRIGÉ

Le plan (MNQ). Par la question 3, $(MNQ)=P(M,\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MQ})$.

Décompositions. Par la question 2 :

- $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{MN}$, donc $\overrightarrow{BC}=x\overrightarrow{MN}+y\overrightarrow{MQ}$ avec $x=3$ et $y=0$;
- $\overrightarrow{AD}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{MQ}$, donc $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{MN}+y\overrightarrow{MQ}$ avec $x=0$ et $y=\dfrac{3}{2}$.

D'après le critère de parallélisme d'une droite et d'un plan (F16), (BC) et (AD) sont parallèles au plan (MNQ).

Entre elles. Leurs vecteurs directeurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires (question 3).

Conclusion. Les droites (BC) et (AD) sont toutes deux parallèles au plan (MNQ) mais, d'après la propriété des droites parallèles (F10), elles ne sont pas parallèles entre elles.

6. 1,5 pts

Soit I le milieu de $[BC]$, J le milieu de $[AD]$ et O le milieu de $[MP]$. Montrer que $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, puis que $\overrightarrow{JO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{JI}$. Que peut-on en conclure pour les points J, O et I ?

INDICE

Utilise la propriété du milieu avec le point A pour O, pour I et pour J, puis écris $\overrightarrow{JO} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AJ}$.

CORRIGÉ

Calcul de $\overrightarrow{AO}$. O est le milieu de $[MP]$: d'après la propriété du milieu (F07), avec le point A, et la question 1 :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AO} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AP} \\ &= \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} \\ &\quad + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

Calculs de $\overrightarrow{AI}$ et de $\overrightarrow{AJ}$. De même (propriété du milieu, F07), $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

Calculs de $\overrightarrow{JO}$ et de $\overrightarrow{JI}$. Par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{JO} &= \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AJ} \\ &= \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} \\ &\quad - \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}, \\ \overrightarrow{JI} &= \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AJ} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ &\quad - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{JO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{JI}$ (règles de calcul avec le produit par un réel, F06).

$\overrightarrow{JI}$ n'est pas nul. Son coefficient suivant $\overrightarrow{AB}$ vaut $\frac{1}{2}$, et la décomposition suivant $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ est unique (identification des coefficients, F14). Donc $J \neq I$.

Conclusion. L'expression annoncée de $\overrightarrow{AO}$ est établie, $\overrightarrow{JO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{JI}$ et, d'après la caractérisation de l'alignement (F09), les points J, O et I sont alignés.

7. 1 pts

Soit k un réel. On définit les points M' et P' par $\overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CP'} = (1-k)\overrightarrow{CD}$, et l'on note O' le milieu de $[M'P']$. Démontrer que $\overrightarrow{JO'} = k\overrightarrow{JI}$. Que peut-on en conclure ?

INDICE

Reprends les calculs des questions 1 et 6 en remplaçant $\frac{1}{3}$ par k et $\frac{2}{3}$ par $1-k$.

CORRIGÉ

Calcul de $\overrightarrow{AP'}$. Comme à la question 1, par la relation de Chasles et la définition de P' :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP'} &= \overrightarrow{AC} + (1-k)\overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{AC} - (1-k)\overrightarrow{AC} \\ &\quad + (1-k)\overrightarrow{AD} \\ &= k\overrightarrow{AC} + (1-k)\overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

Calcul de $\overrightarrow{AO'}$. D'après la propriété du milieu (F07), avec le point A :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AO'} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AM'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AP'} \\ &= \frac{k}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{2}\overrightarrow{AC} \\ &\quad + \frac{1-k}{2}\overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

Calcul de $\overrightarrow{JO'}$. Par la relation de Chasles, avec $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{JO'} &= \overrightarrow{AO'} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\ &= \frac{k}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{2}\overrightarrow{AC} \\ &\quad - \frac{k}{2}\overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

Par la question 6, $\overrightarrow{JI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$: donc $\overrightarrow{JO'} = k\overrightarrow{JI}$ (règles de calcul avec le produit par un réel, F06).

Conclusion. Pour tout réel k, $\overrightarrow{JO'} = k\overrightarrow{JI}$ avec $J \neq I$: d'après la caractérisation vectorielle d'une droite (F09), le milieu O' de $[M'P']$ appartient toujours à la droite (IJ). Pour $k = \frac{1}{3}$, on a $M' = M$ et $P' = P$: on retrouve le point O de la question 6.

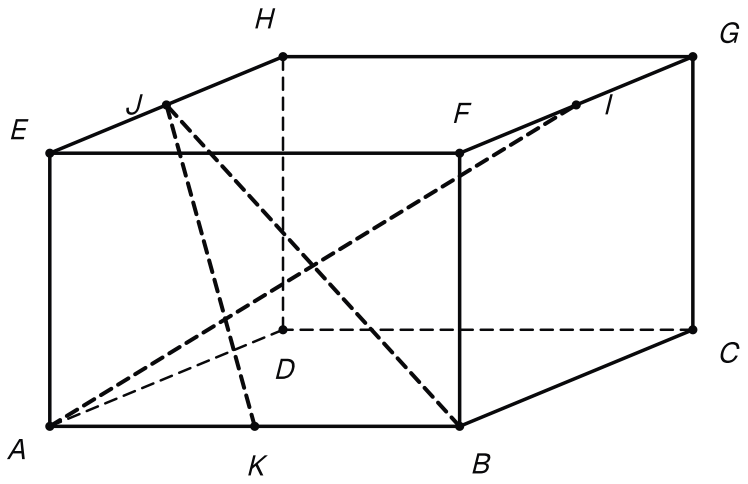
Exercice 5

10 pts

Problème : Droites sécantes ou non coplanaires dans un parallélépipède

Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède : faces $ABCD$ (dessous) et $EFGH$ (dessus), arêtes $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$; faces latérales $ABFE$, $BCGF$, $DCGH$, $ADHE$. Ses six faces sont des parallélogrammes, et les sommets A, B, D, E ne sont pas coplanaires. On note I le milieu de $[FG]$, J le milieu de $[EH]$ et K le milieu de $[AB]$.

On travaille avec les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$. Un croquis aide à suivre les lettres, mais chaque conclusion se justifie par un calcul de vecteurs.



Le parallélépipède de l'énoncé, I milieu de [FG], J milieu de [EH], K milieu de [AB], et les droites (AI), (BJ) et (KJ).

1.

0,5 pts

Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires.

INDICE

Traduis l'hypothèse sur les quatre sommets A, B, D, E.

CORRIGÉ

Par hypothèse, les points A, B, D, E ne sont pas coplanaires.

Conclusion. D'après la propriété des points coplanaires (F15), les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires.

2. 1,5 pts

Exprimer $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$, $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{KJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$. Vérifier que $\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{AB}$.

INDICE

Lis les égalités de vecteurs sur les faces ($\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{EH}$), puis utilise la relation de Chasles et le milieu.

CORRIGÉ

Égalités sur les faces. Les faces sont des parallélogrammes : $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}$ (égalité de deux vecteurs, F01).

Calculs. Par la relation de Chasles et la propriété du milieu (F07) :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FG} \\
&= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}, \\
\overrightarrow{AJ} &= \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EH} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}, \\
\overrightarrow{BJ} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ} \\
&= -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}, \\
\overrightarrow{KJ} &= \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AJ} \\
&= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}.
\end{aligned}$$

Vérification. Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB}$.

Conclusion. Les vecteurs $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$, $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{KJ}$ sont exprimés ci-dessus en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, et $\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{AB}$.

3. 1,5 pts

Montrer que $ABIJ$ est un parallélogramme non aplati. En déduire que les droites (AI) et (BJ) sont sécantes, et préciser leur point commun.

INDICE

Utilise la définition de l'égalité de deux vecteurs par les milieux des diagonales. Pour « non aplati », montre que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ}$ ne sont pas colinéaires.

CORRIGÉ

Parallélogramme. Par la question 2, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{JI}$. Par la définition de l'égalité de deux vecteurs (F01), les segments $[AI]$ et $[BJ]$ ont le même milieu, noté O : $ABIJ$ est un parallélogramme, éventuellement aplati.

Non aplati. Soit t un réel. Par la question 2 :

- si $\overrightarrow{AJ} = t\overrightarrow{AB}$, alors $-t\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \vec{0}$, avec le coefficient 1 pour $\overrightarrow{AE}$;
- si $\overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{AJ}$, alors $\overrightarrow{AB} - \frac{t}{2}\overrightarrow{AD} - t\overrightarrow{AE} = \vec{0}$, avec le coefficient 1 pour $\overrightarrow{AB}$.

D'après la question 1 et F14 (coplanarité et relation linéaire), c'est impossible dans les deux cas : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ}$ ne sont pas colinéaires, donc A, B, J ne sont pas alignés (caractérisation de l'alignement, F09), et le parallélogramme $ABIJ$ n'est pas aplati.

Droites sécantes. Le point O appartient aux deux droites (AI) et (BJ). Elles sont distinctes, car A n'appartient pas à (BJ), puisque A, B, J ne sont pas alignés. Deux droites distinctes ont au plus un point commun.

Conclusion. $ABIJ$ est un parallélogramme non aplati, et les droites (AI) et (BJ) sont sécantes en O, milieu commun de $[AI]$ et de $[BJ]$.

4. 2 pts

Démontrer que les droites (AI) et (KJ) sont sécantes en un point P tel que $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$.

INDICE

Un point M de (AI) vérifie $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AI}$; un point de (KJ) vérifie $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AK} + s\overrightarrow{KJ}$. Écris les deux avec les vecteurs de référence et identifie.

CORRIGÉ

Points de (AI). Le vecteur $\overrightarrow{AI}$ n'est pas nul, car son coefficient suivant $\overrightarrow{AE}$ vaut 1 (identification des coefficients, F14). D'après la caractérisation vectorielle d'une droite (F09), un point M appartient à (AI) si et seulement s'il existe un réel t tel que :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= t\overrightarrow{AI} \\ &= t\overrightarrow{AB} + \frac{t}{2}\overrightarrow{AD} + t\overrightarrow{AE}.\end{aligned}$$

Points de (KJ). De même, $\overrightarrow{KJ} \neq \vec{0}$, et M appartient à (KJ) si et seulement s'il existe un réel s tel que :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AK} + s\overrightarrow{KJ} \\ &= \frac{1-s}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{s}{2}\overrightarrow{AD} \\ &\quad + s\overrightarrow{AE}.\end{aligned}$$

Identification. Les vecteurs de référence ne sont pas coplanaires (question 1) : on identifie les coefficients (F14). Un point commun correspond à $t = \frac{1-s}{2}$, $\frac{t}{2} = \frac{s}{2}$ et $t = s$, donc à $t = s$ et $3t = 1$, c'est-à-dire $t = s = \frac{1}{3}$. Réciproquement, ces valeurs vérifient les trois égalités.

Conclusion. Les droites (AI) et (KJ) ont un seul point commun P, défini par $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$: elles sont sécantes en P.

5. 2 pts

Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{BJ}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BI}$ ne sont pas coplanaires. En déduire que les droites (BJ) et (DI) ne sont ni parallèles ni sécantes.

INDICE

Pars d'une relation $a\overrightarrow{BJ}+b\overrightarrow{BD}+c\overrightarrow{BI}=\vec{0}$ quelconque. Pour la suite : deux droites parallèles ou sécantes sont contenues dans un même plan.

CORRIGÉ

Expressions. Par la relation de Chasles et la question 2, $\overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$.

Relation nulle. Soit a, b, c des réels tels que $a\overrightarrow{BJ}+b\overrightarrow{BD}+c\overrightarrow{BI}=\vec{0}$. Avec la question 2, en regroupant :

$$\begin{aligned}&(-a-b)\overrightarrow{AB}\\&\quad+\left(\frac{a}{2}+b+\frac{c}{2}\right)\overrightarrow{AD}\\&\quad+(a+c)\overrightarrow{AE}=\vec{0}.\end{aligned}$$

Identification. Par la question 1 et F14 (coplanarité et relation linéaire), chaque coefficient est nul : $b=-a$ et $c=-a$. Le coefficient de $\overrightarrow{AD}$ devient $\frac{a}{2}-a-\frac{a}{2}=-a$, d'où $a=0$. Donc $a=b=c=0$: les trois vecteurs ne sont pas coplanaires.

Position des droites. D'après la propriété des points coplanaires (F15), les points B, J, D, I ne sont pas coplanaires. Si les droites (BJ) et (DI) étaient parallèles ou sécantes, elles seraient contenues dans un même plan (tronc commun), qui contiendrait B, J, D et I : c'est impossible.

Conclusion. Les vecteurs $\overrightarrow{BJ}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BI}$ ne sont pas coplanaires, et les droites (BJ) et (DI) ne sont ni parallèles ni sécantes : elles ne sont pas coplanaires.

6. 1 pts

Soit m un réel et L le point tel que $\overrightarrow{AL} = m\overrightarrow{AD}$. Montrer que $\overrightarrow{LI} = \overrightarrow{AB} + \left(\frac{1}{2} - m\right)\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$, puis que les droites (BJ) et (LI) ne sont pas parallèles.

INDICE

Compare les coefficients de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AE}$ dans $\overrightarrow{LI}$ et dans $\overrightarrow{BJ}$.

CORRIGÉ

Calcul de $\overrightarrow{LI}$. Par la relation de Chasles, la question 2 et la définition de L :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{LI} &= \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AL} \\ &= \overrightarrow{AB} + \left(\frac{1}{2} - m\right)\overrightarrow{AD} \\ &\quad + \overrightarrow{AE}.\end{aligned}$$

Ce vecteur n'est pas nul, car son coefficient suivant $\overrightarrow{AB}$ vaut 1 (identification des coefficients, F14) : il dirige la droite (LI).

Non-colinéarité. Rappelons que $\overrightarrow{BJ} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$. Soit t un réel.

- Si $\overrightarrow{LI} = t\overrightarrow{BJ}$, l'identification des coefficients (F14) donne $1 = -t$ pour $\overrightarrow{AB}$ et $1 = t$ pour $\overrightarrow{AE}$: impossible.
- Si $\overrightarrow{BJ} = t\overrightarrow{LI}$, elle donne $-1 = t$ et $1 = t$: impossible.

Conclusion. Le vecteur $\overrightarrow{LI}$ a l'expression annoncée, et les vecteurs directeurs $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{LI}$ ne sont pas colinéaires : d'après la propriété des droites parallèles (F10), les droites (BJ) et (LI) ne sont parallèles pour aucune valeur de m.

7. 1,5 pts

Démontrer que les droites (BJ) et (LI) sont sécantes si et seulement si $m = 0$. Retrouver ainsi les résultats des questions 3 et 5.

INDICE

Écris un point de (BJ) avec un réel s et un point de (LI) avec un réel t, en partant de A, puis identifie les coefficients.

CORRIGÉ

Points de (BJ). D'après la caractérisation vectorielle d'une droite (F09), un point M appartient à (BJ) si et seulement s'il existe un réel s tel que :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{BJ} \\ &= (1-s)\overrightarrow{AB} + \frac{s}{2}\overrightarrow{AD} \\ &\quad + s\overrightarrow{AE}.\end{aligned}$$

Points de (LI). De même, M appartient à (LI) si et seulement s'il existe un réel t tel que :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AM} \\ &= \overrightarrow{AL} + t\overrightarrow{LI} \\ &= t\overrightarrow{AB} \\ &\quad + \left(m + \frac{t}{2} - tm\right)\overrightarrow{AD} \\ &\quad + t\overrightarrow{AE}.\end{aligned}$$

Identification. Les vecteurs de référence ne sont pas coplanaires : par F14, un point commun correspond à :

- $1 - s = t$ (coefficients de $\overrightarrow{AB}$) ;
- $s = t$ (coefficients de $\overrightarrow{AE}$) ;
- $\dfrac{s}{2} = m + \dfrac{t}{2} - tm$ (coefficients de $\overrightarrow{AD}$).

Les deux premières égalités donnent $s = t = \dfrac{1}{2}$. La troisième devient alors $\dfrac{1}{4} = \dfrac{m}{2} + \dfrac{1}{4}$, soit $m = 0$. Réciproquement, si $m = 0$, les valeurs $s = t = \dfrac{1}{2}$ vérifient les trois égalités.

Équivalence. Les deux droites ont donc un point commun si et seulement si $m = 0$. Comme elles ne sont jamais parallèles (question 6), elles sont alors sécantes.

Cas particuliers.

- Pour $m = 0$, $L = A$: les droites (AI) et (BJ) sont sécantes, au point O tel que $\overrightarrow{AO} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AI}$, milieu commun de $[AI]$ et de $[BJ]$ (question 3).
- Pour $m = 1$, $L = D$: les droites (BJ) et (DI) ne sont ni parallèles ni sécantes (question 5).

Conclusion. Les droites (BJ) et (LI) sont sécantes si et seulement si $m = 0$, ce qui redonne les résultats des questions 3 et 5.