BURHAN

Vecteurs de l'espace : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

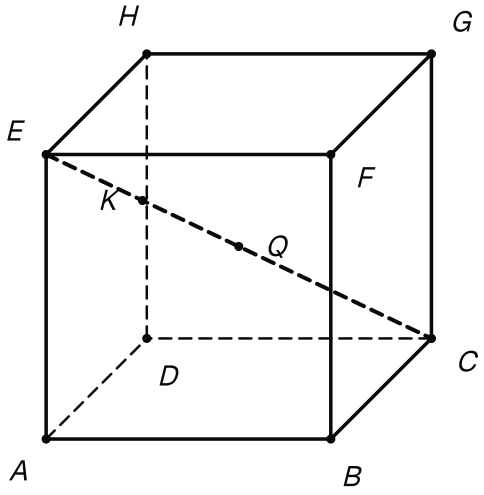
Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/vecteurs-de-l-espace/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Vecteurs de l'espace	Entraînement	7

Exercice 1

Une diagonale du cube

Soit $ABCDEFGH$ un cube : faces $ABCD$ (dessous) et $EFGH$ (dessus), arêtes verticales $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$; faces latérales $ABFE$, $BCGF$, $DCGH$, $ADHE$. Les vecteurs de référence sont $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$. Soit K le point tel que $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$, et Q le milieu de $[EC]$.



Le cube de l'énoncé avec la diagonale [EC], le point K défini depuis A et Q milieu de [EC].

1.

Montrer que $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$.

INDICE

Va de E à C par A puis B, et remplace $\overrightarrow{BC}$ grâce à la face $ABCD$.

2.

Démontrer que les points E, K et C sont alignés.

INDICE

Calcule $\overrightarrow{EK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AE}$, puis compare avec la question 1.

3.

Montrer que $\overrightarrow{EQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EC}$, puis que K est le milieu de $[EQ]$.

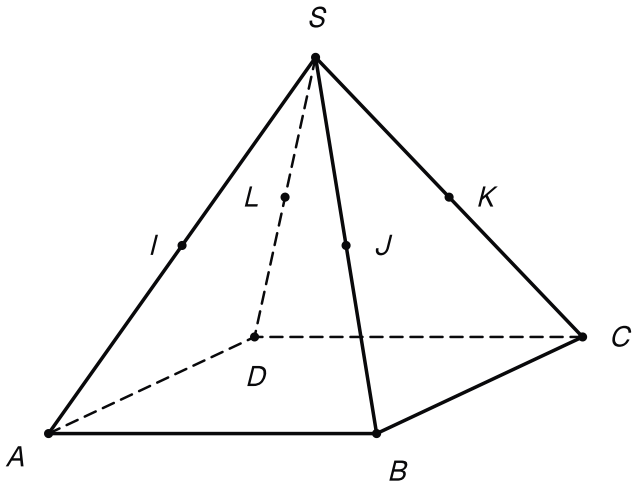
INDICE

Utilise la propriété du milieu sous la forme $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, puis compare $\overrightarrow{EK}$ et $\overrightarrow{EQ}$.

Exercice 2

Milieux des arêtes latérales d'une pyramide

Soit $SABCD$ une pyramide dont la base $ABCD$ est un parallélogramme non aplati. On note I, J, K, L les milieux respectifs de $[SA]$, $[SB]$, $[SC]$, $[SD]$.



La pyramide SABCD et les milieux I, J, K, L de ses arêtes latérales [SA], [SB], [SC], [SD].

1.

Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, puis que les droites (IJ) et (DC) sont parallèles.

INDICE

Passe par S : $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IS} + \overrightarrow{SJ}$. Pour la suite, relis le bon ordre des sommets du parallélogramme $ABCD$.

2.

Montrer que $IJKL$ est un parallélogramme.

INDICE

Calcule $\overrightarrow{LK}$ comme à la question 1, en passant par S, puis compare-le à $\overrightarrow{IJ}$.

3.

Montrer que les droites (IK) et (AC) sont parallèles.

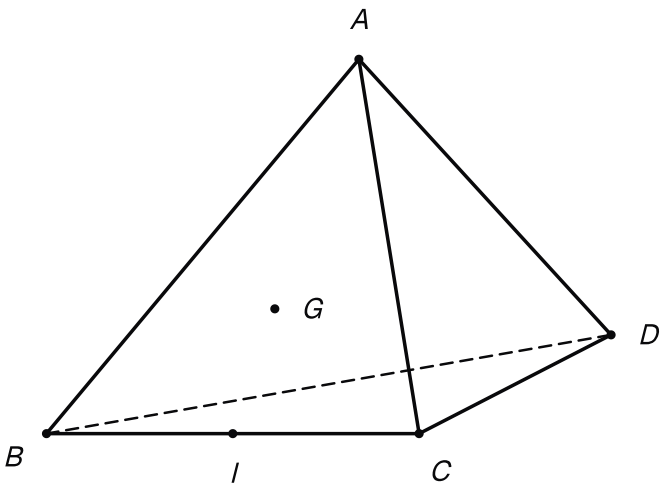
INDICE

Même chemin par S, avec les milieux de $[SA]$ et de $[SC]$.

Exercice 3

Un point défini par une égalité vectorielle

Soit $ABCD$ un tétraèdre et I le milieu de $[BC]$. Soit G un point tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.



Le tétraèdre ABCD, le milieu I de [BC] et le point G défini par GA + GB + GC = 0.

1.

Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

INDICE

Fais apparaître A dans $\overrightarrow{GB}$ et dans $\overrightarrow{GC}$: $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}$.

2.

En déduire que G appartient au plan (ABC).

INDICE

Vérifie d'abord que A, B, C ne sont pas alignés, puis lis x et y.

3.

Démontrer que les points A, G et I sont alignés, et préciser le réel k tel que $\overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{AI}$.

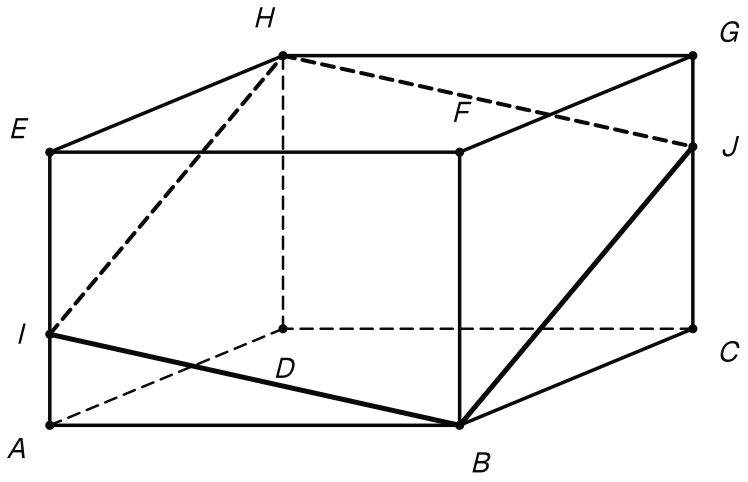
INDICE

Exprime $\overrightarrow{AI}$ grâce au milieu de $[BC]$, puis compare avec la question 1.

Exercice 4

Quatre points coplanaires dans un parallélépipède

Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède : faces $ABCD$ et $EFGH$, arêtes $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$, faces latérales $ABFE$, $BCGF$, $DCGH$, $ADHE$; ses six faces sont des parallélogrammes. Les sommets A, B, D, E ne sont pas coplanaires. On note I le point tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$, et J le point tel que $\overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CG}$.



Le parallélépipède de l'énoncé, avec I au tiers de [AE] depuis A, J aux deux tiers de [CG] depuis C, et le quadrilatère BIHJ.

1.

Exprimer $\overrightarrow{BI}$, $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{BH}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

INDICE

Passe par A pour $\overrightarrow{BI}$, par C pour $\overrightarrow{BJ}$, et par A puis D pour $\overrightarrow{BH}$.

2.

Démontrer que $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BJ}$ ne sont pas colinéaires. En déduire que B, I, J ne sont pas alignés.

INDICE

Suppose $\overrightarrow{BJ} = t\overrightarrow{BI}$, regroupe tout dans un membre, et regarde le coefficient de $\overrightarrow{AD}$. Traite aussi le cas $\overrightarrow{BI} = t\overrightarrow{BJ}$.

3.

Démontrer que les points B, I, H et J sont coplanaires. Préciser la nature du quadrilatère $BIHJ$.

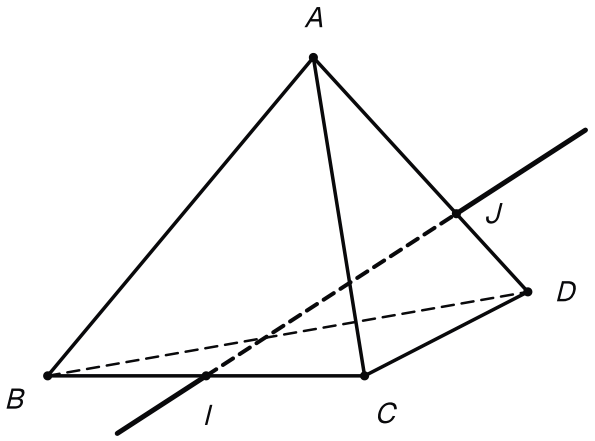
INDICE

Additionne $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BJ}$, et compare avec $\overrightarrow{BH}$.

Exercice 5

Trois vecteurs non coplanaires

Soit $ABCD$ un tétraèdre. On note I le milieu de $[BC]$ et J le point tel que $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$.



Le tétraèdre ABCD, I milieu de [BC] et J sur [DA], au tiers de l'arête depuis D.

1.

Montrer que $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.

INDICE

Calcule séparément $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$, puis $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AI}$.

2.

Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas coplanaires.

INDICE

Pars de réels a, b, c quelconques tels que $a\overrightarrow{IJ} + b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC} = \vec{0}$, et réécris l'égalité avec $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.

3.

En déduire que la droite (IJ) n'est pas parallèle au plan (ABC).

INDICE

Raisonne par l'absurde avec la propriété de la droite parallèle à un plan, et vérifie que $\overrightarrow{IJ}$ n'est pas nul.

4.

La droite (IJ) est-elle parallèle au plan (BCD) ?

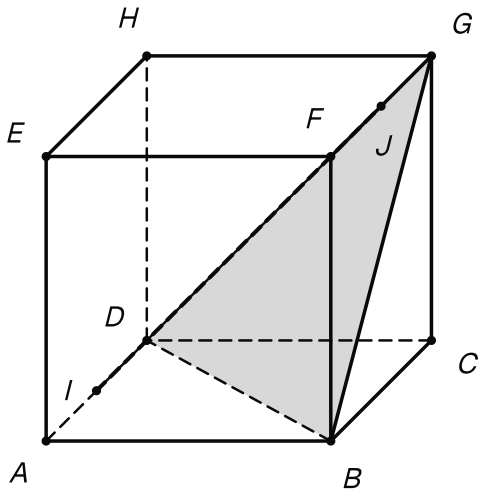
INDICE

Cherche x et y tels que $\overrightarrow{IJ} = x\overrightarrow{BC} + y\overrightarrow{BD}$, en écrivant tout avec $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.

Exercice 6

Une droite parallèle au plan d'une section

Soit $ABCDEFGH$ un cube : sa base est $ABCD$, sa face du dessus $EFGH$, et ses arêtes verticales $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$; faces latérales $ABFE$, $BCGF$, $DCGH$, $ADHE$. Les points A, B, D, E ne sont pas coplanaires. On note I le milieu de $[AD]$ et J le milieu de $[FG]$.



Le cube de l'énoncé, I milieu de [AD], J milieu de [FG], et le triangle BDG qui représente le plan (BDG).

1.

Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$.

INDICE

Va de I à J par A, B et F, puis remplace $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{FJ}$.

2.

Exprimer $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$. Montrer qu'ils ne sont pas colinéaires.

INDICE

Pour la non-colinéarité, suppose $\overrightarrow{BG} = t\overrightarrow{BD}$ et regarde le coefficient de $\overrightarrow{AE}$; traite aussi l'autre cas.

3.

Démontrer que la droite (IJ) est parallèle au plan (BDG).

INDICE

Cherche x et y tels que $\overrightarrow{IJ} = x\overrightarrow{BD} + y\overrightarrow{BG}$: commence par le coefficient de $\overrightarrow{AE}$.

4.

La droite (IJ) est-elle contenue dans le plan (BDG) ?

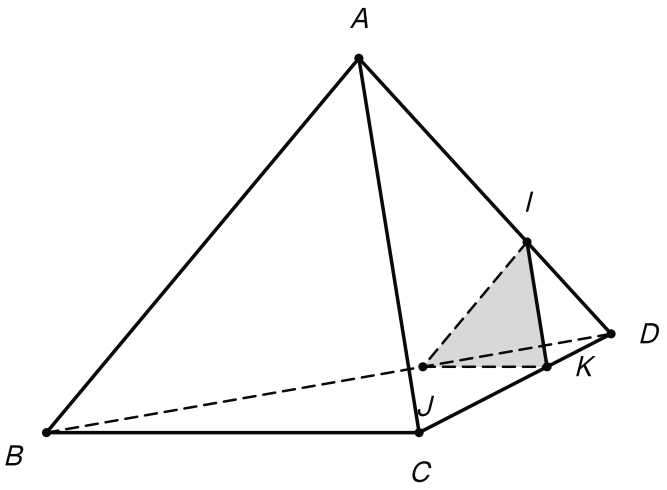
INDICE

Teste le point I : existe-t-il x et y tels que $\overrightarrow{BI} = x\overrightarrow{BD} + y\overrightarrow{BG}$?

Exercice 7

Deux plans parallèles dans un tétraèdre

Soit $ABCD$ un tétraèdre. On note I, J et K les points tels que $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$.



Le tétraèdre ABCD et les points I, J, K au tiers des arêtes [DA], [DB], [DC] en partant de D, avec le triangle IJK.

1.

Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et que $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

INDICE

Passe par le sommet D commun aux trois arêtes.

2.

En déduire que (IJK) est un plan, parallèle au plan (ABC).

INDICE

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires : qu'en est-il de $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$? Applique ensuite la propriété des plans parallèles.

3.

Démontrer que ces deux plans sont distincts.

INDICE

Montre que I n'appartient pas à (ABC), en raisonnant par l'absurde avec $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.