BURHAN

Vecteurs de l'espace : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

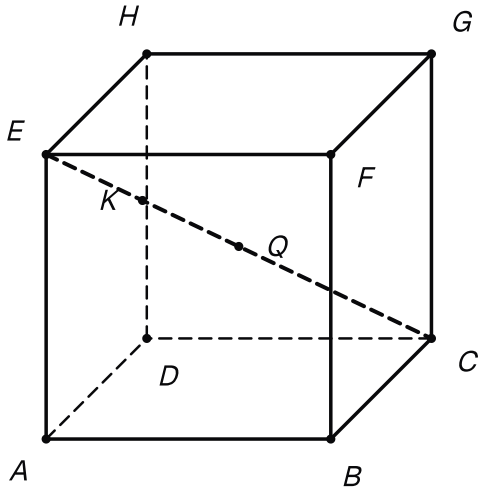
Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/vecteurs-de-l-espace/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Vecteurs de l'espace	Entraînement	7

Exercice 1

Une diagonale du cube

Soit $ABCDEFGH$ un cube : faces $ABCD$ (dessous) et $EFGH$ (dessus), arêtes verticales $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$; faces latérales $ABFE$, $BCGF$, $DCGH$, $ADHE$. Les vecteurs de référence sont $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$. Soit K le point tel que $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$, et Q le milieu de $[EC]$.



Le cube de l'énoncé avec la diagonale [EC], le point K défini depuis A et Q milieu de [EC].

1.

Montrer que $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$.

INDICE

Va de E à C par A puis B, et remplace $\overrightarrow{BC}$ grâce à la face $ABCD$.

CORRIGÉ

Relation de Chasles. En passant par A puis par B :

$$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

Remplacer. La face $ABCD$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ (égalité de deux vecteurs, F01). De plus, $\overrightarrow{EA} = -\overrightarrow{AE}$.

Conclusion. $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$.

2.

Démontrer que les points E, K et C sont alignés.

INDICE

Calcule $\overrightarrow{EK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AE}$, puis compare avec la question 1.

CORRIGÉ

Calcul de $\overrightarrow{EK}$. Par la relation de Chasles et la définition de K :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EK} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AK} \\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} \\ &\quad - \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}.\end{aligned}$$

Colinéarité. D'après la question 1 et les règles de calcul avec le produit par un réel (F06), $\overrightarrow{EK} = k\overrightarrow{EC}$ avec $k = \dfrac{1}{4}$: les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{EK}$ sont colinéaires.

Conclusion. Comme $E \neq C$, la caractérisation de l'alignement (F09) montre que les points E, K et C sont alignés.

3.

Montrer que $\overrightarrow{EQ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{EC}$, puis que K est le milieu de $[EQ]$.

INDICE

Utilise la propriété du milieu sous la forme $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, puis compare $\overrightarrow{EK}$ et $\overrightarrow{EQ}$.

CORRIGÉ

Milieu de $[EC]$. Q est le milieu de $[EC]$: d'après la propriété du milieu (F07), $\overrightarrow{EQ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{EC}$.

Comparer. D'après la question 2, $\overrightarrow{EK} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{EC}$. Par les règles de calcul avec le produit par un réel (F06) :

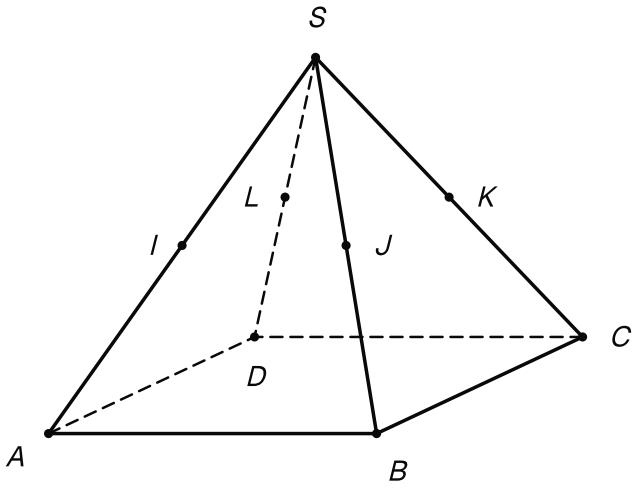
$$\begin{aligned}\overrightarrow{EK} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{EC}\right) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{EQ}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{EQ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{EC}$ et, d'après la propriété du milieu (F07), l'égalité $\overrightarrow{EK} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{EQ}$ signifie que K est le milieu de $[EQ]$.

Exercice 2

Milieux des arêtes latérales d'une pyramide

Soit $SABCD$ une pyramide dont la base $ABCD$ est un parallélogramme non aplati. On note I, J, K, L les milieux respectifs de $[SA]$, $[SB]$, $[SC]$, $[SD]$.



La pyramide SABCD et les milieux I, J, K, L de ses arêtes latérales [SA], [SB], [SC], [SD].

1.

Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, puis que les droites (IJ) et (DC) sont parallèles.

INDICE

Passe par S : $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IS} + \overrightarrow{SJ}$. Pour la suite, relis le bon ordre des sommets du parallélogramme $ABCD$.

CORRIGÉ

Milieux. D'après la propriété du milieu (F07), $\overrightarrow{IS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{SJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SB}$.

Calcul. Par la relation de Chasles et les règles de calcul avec le produit par un réel (F06) :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IS} + \overrightarrow{SJ} \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SB}) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

Parallélisme. $ABCD$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (égalité de deux vecteurs, F01). Ainsi $\overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{DC}$ avec $k = \frac{1}{2}$: les vecteurs directeurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{DC}$, non nuls, sont colinéaires.

Conclusion. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et, d'après la propriété des droites parallèles (F10), les droites (IJ) et (DC) sont parallèles.

2.

Montrer que $IJKL$ est un parallélogramme.

INDICE

Calcule $\overrightarrow{LK}$ comme à la question 1, en passant par S, puis compare-le à $\overrightarrow{IJ}$.

CORRIGÉ

Calcul de $\overrightarrow{LK}$. Comme à la question 1, en passant par S :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{LK} &= \overrightarrow{LS} + \overrightarrow{SK} \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{DS} + \overrightarrow{SC}) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}.\end{aligned}$$

Or $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{LK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IJ}$.

Parallélogramme. Par la définition de l'égalité de deux vecteurs (F01), $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$ signifie que $[IK]$ et $[JL]$ ont le même milieu : $IJKL$ est un parallélogramme, éventuellement aplati.

Non aplati. De même, $\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{IS} + \overrightarrow{SL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. La base n'est pas aplatie, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires ; leurs moitiés $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IL}$ ne le sont pas non plus.

Conclusion. $IJKL$ est un parallélogramme, et il n'est pas aplati.

3.

Montrer que les droites (IK) et (AC) sont parallèles.

INDICE

Même chemin par S, avec les milieux de $[SA]$ et de $[SC]$.

CORRIGÉ

Par la propriété du milieu (F07) et la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IK} &= \overrightarrow{IS} + \overrightarrow{SK} \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SC}) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

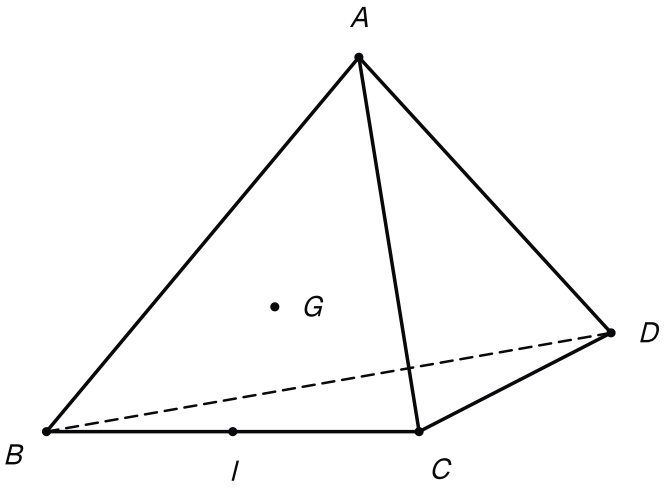
Donc $\overrightarrow{IK} = k\overrightarrow{AC}$ avec $k = \frac{1}{2}$: les vecteurs directeurs sont colinéaires.

Conclusion. D'après la propriété des droites parallèles (F10), les droites (IK) et (AC) sont parallèles.

Exercice 3

Un point défini par une égalité vectorielle

Soit $ABCD$ un tétraèdre et I le milieu de $[BC]$. Soit G un point tel que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.



Le tétraèdre ABCD, le milieu I de [BC] et le point G défini par GA + GB + GC = 0.

1.

Montrer que $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

INDICE

Fais apparaître A dans $\overrightarrow{GB}$ et dans $\overrightarrow{GC}$: $\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}$.

CORRIGÉ

Faire apparaître A. Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}$. L'égalité qui définit G devient :

$$3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}.$$

Isoler $\overrightarrow{AG}$. Comme $\overrightarrow{GA}=-\overrightarrow{AG}$, on obtient $3\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. On multiplie les deux membres par $\frac{1}{3}$ (règles de calcul avec le produit par un réel, F06).

Conclusion. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

2.

En déduire que G appartient au plan (ABC).

INDICE

Vérifie d'abord que A, B, C ne sont pas alignés, puis lis x et y.

CORRIGÉ

A, B, C non alignés. S'ils étaient alignés, la droite qui les porte et le point D seraient dans un même plan : les quatre sommets seraient coplanaires. C'est faux.

Décomposition. Par la question 1, $\overrightarrow{AG} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ avec $x = y = \dfrac{1}{3}$.

Conclusion. D'après la caractérisation vectorielle d'un plan (F11), le point G appartient au plan (ABC).

3.

Démontrer que les points A, G et I sont alignés, et préciser le réel k tel que $\overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{AI}$.

INDICE

Exprime $\overrightarrow{AI}$ grâce au milieu de $[BC]$, puis compare avec la question 1.

CORRIGÉ

Milieu de $[BC]$. D'après la propriété du milieu (F07), avec le point A : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$.

Calcul. Par la question 1 et les règles de calcul avec le produit par un réel (F06) :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}.\end{aligned}$$

Donc $k = \dfrac{2}{3}$.

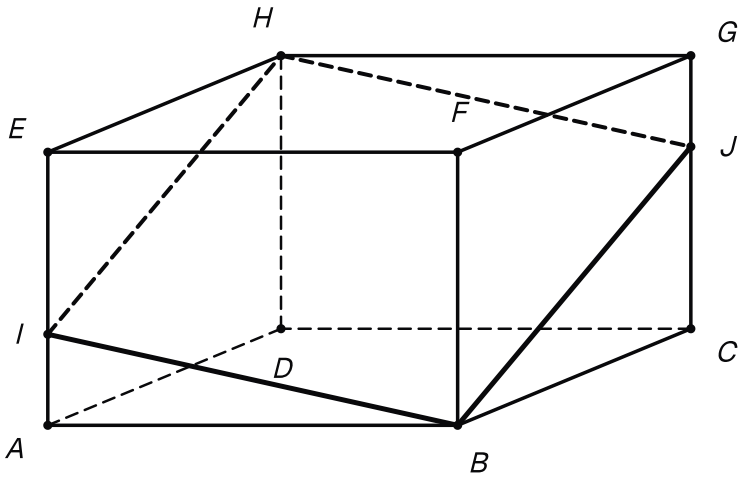
Alignement. $A \neq I$: sinon A serait le milieu de $[BC]$, donc un point de (BC), et A, B, C seraient alignés, ce que la question 2 exclut. Les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont colinéaires.

Conclusion. D'après la caractérisation de l'alignement (F09), les points A, G et I sont alignés, et $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.

Exercice 4

Quatre points coplanaires dans un parallélépipède

Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède : faces $ABCD$ et $EFGH$, arêtes $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$, faces latérales $ABFE$, $BCGF$, $DCGH$, $ADHE$; ses six faces sont des parallélogrammes. Les sommets A, B, D, E ne sont pas coplanaires. On note I le point tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$, et J le point tel que $\overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CG}$.



Le parallélépipède de l'énoncé, avec I au tiers de [AE] depuis A, J aux deux tiers de [CG] depuis C, et le quadrilatère BIHJ.

1.

Exprimer $\overrightarrow{BI}$, $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{BH}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

INDICE

Passe par A pour $\overrightarrow{BI}$, par C pour $\overrightarrow{BJ}$, et par A puis D pour $\overrightarrow{BH}$.

CORRIGÉ

Égalités sur les faces. Les faces sont des parallélogrammes : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AE}$ (égalité de deux vecteurs, F01).

Calculs. Par la relation de Chasles et la définition de I et de J :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BI} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI} \\ &= -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BJ} &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CJ} \\ &= \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BH} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} \\ &= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{BI} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BH} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.

2.

Démontrer que $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BJ}$ ne sont pas colinéaires. En déduire que B, I, J ne sont pas alignés.

INDICE

Suppose $\overrightarrow{BJ} = t\overrightarrow{BI}$, regroupe tout dans un membre, et regarde le coefficient de $\overrightarrow{AD}$. Traite aussi le cas $\overrightarrow{BI} = t\overrightarrow{BJ}$.

CORRIGÉ

Vecteurs de référence. Les points A, B, D, E ne sont pas coplanaires : d'après la propriété des points coplanaires (F15), $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires. D'après F14 (coplanarité et relation linéaire), une combinaison nulle de ces trois vecteurs a donc ses trois coefficients nuls.

Premier cas. Supposons $\overrightarrow{BJ} = t\overrightarrow{BI}$ pour un réel t. Par la question 1 :

$$\begin{aligned} &t\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \\ &\quad + \left(\frac{2}{3} - \frac{t}{3}\right)\overrightarrow{AE} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Le coefficient de $\overrightarrow{AD}$ vaut 1 : c'est impossible.

Second cas. Supposons $\overrightarrow{BI} = t\overrightarrow{BJ}$ pour un réel t. Alors :

$$\begin{aligned} &-\overrightarrow{AB} - t\overrightarrow{AD} \\ &\quad + \left(\frac{1}{3} - \frac{2t}{3}\right)\overrightarrow{AE} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Le coefficient de $\overrightarrow{AB}$ vaut -1 : c'est impossible.

Conclusion. $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BJ}$ ne sont pas colinéaires ; en particulier $\overrightarrow{BI} \neq \vec{0}$, car le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur. D'après la caractérisation de l'alignement (F09), B, I, J ne sont pas alignés.

3.

Démontrer que les points B, I, H et J sont coplanaires. Préciser la nature du quadrilatère $BIHJ$.

INDICE

Additionne $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BJ}$, et compare avec $\overrightarrow{BH}$.

CORRIGÉ

Décomposition. Par la question 1 :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{BJ}\\&=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}\\&=\overrightarrow{BH}.\end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{BH}=x\overrightarrow{BI}+y\overrightarrow{BJ}$ avec $x=y=1$.

Coplanarité. B, I, J ne sont pas alignés (question 2) : d'après la propriété des points coplanaires (F15), B, I, J et H sont coplanaires.

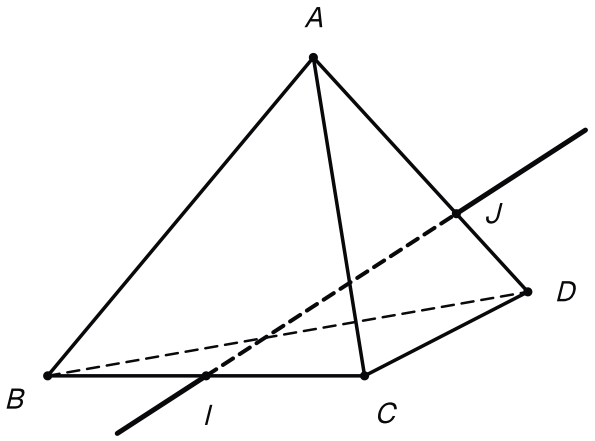
Nature de $BIHJ$. D'après la règle du parallélogramme (F04), l'égalité $\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{BH}$ signifie que $BIHJ$ est un parallélogramme, éventuellement aplati. Il n'est pas aplati, car B, I, J ne sont pas alignés.

Conclusion. Les points B, I, H et J sont coplanaires, et $BIHJ$ est un parallélogramme non aplati.

Exercice 5

Trois vecteurs non coplanaires

Soit $ABCD$ un tétraèdre. On note I le milieu de $[BC]$ et J le point tel que $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$.



Le tétraèdre ABCD, I milieu de [BC] et J sur [DA], au tiers de l'arête depuis D.

1.

Montrer que $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.

INDICE

Calcule séparément $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$, puis $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AI}$.

CORRIGÉ

Calcul de $\overrightarrow{AI}$. I est le milieu de $[BC]$. D'après la propriété du milieu (F07), avec le point A : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$, donc $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Calcul de $\overrightarrow{AJ}$. Par la relation de Chasles et la définition de J :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AJ} &= \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DA} \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

Calcul de $\overrightarrow{IJ}$. Par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ &\quad + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.

2.

Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas coplanaires.

INDICE

Pars de réels a, b, c quelconques tels que $a\overrightarrow{IJ} + b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC} = \vec{0}$, et réécris l'égalité avec $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.

CORRIGÉ

Soit a, b, c des réels tels que $a\overrightarrow{IJ} + b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

Réécriture. Par la question 1, en regroupant les termes :

$$\begin{aligned}&\left(b - \frac{a}{2}\right)\overrightarrow{AB}\\ &+ \left(c - \frac{a}{2}\right)\overrightarrow{AC}\\ &+ \frac{2a}{3}\overrightarrow{AD} = \vec{0}.\end{aligned}$$

Identification. Les sommets du tétraèdre ne sont pas coplanaires : d'après la propriété des points coplanaires (F15), $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires. D'après F14 (coplanarité et relation linéaire), les trois coefficients sont donc nuls. D'abord $\frac{2a}{3} = 0$, donc $a = 0$. Puis $b = 0$ et $c = 0$.

Conclusion. Toute relation nulle entre $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ a ses trois coefficients nuls : d'après F14, ces trois vecteurs ne sont pas coplanaires.

3.

En déduire que la droite (IJ) n'est pas parallèle au plan (ABC).

INDICE

Raisonne par l'absurde avec la propriété de la droite parallèle à un plan, et vérifie que $\overrightarrow{IJ}$ n'est pas nul.

CORRIGÉ

$\overrightarrow{IJ}$ **n'est pas nul.** Si l'on avait $\overrightarrow{IJ} = \vec{0}$, la relation $1\overrightarrow{IJ} + 0\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AC} = \vec{0}$, de coefficients non tous nuls, contredirait la question 2. Donc $I \neq J$, et $\overrightarrow{IJ}$ dirige la droite (IJ).

Raisonnement par l'absurde. Le plan (ABC) est $P(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Si (IJ) était parallèle à ce plan, le critère de parallélisme d'une droite et d'un plan (F16) rendrait $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{IJ}$ coplanaires, ce que la question 2 exclut.

Conclusion. La droite (IJ) n'est pas parallèle au plan (ABC).

4.

La droite (IJ) est-elle parallèle au plan (BCD) ?

INDICE

Cherche x et y tels que $\overrightarrow{IJ} = x\overrightarrow{BC} + y\overrightarrow{BD}$, en écrivant tout avec $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.

CORRIGÉ

Le plan (BCD). Les points B, C, D ne sont pas alignés, sinon les quatre sommets du tétraèdre seraient coplanaires. Donc $(BCD) = P(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})$. D'après le critère de parallélisme d'une droite et d'un plan (F16), (IJ) est parallèle à (BCD) si et seulement s'il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{IJ} = x\overrightarrow{BC} + y\overrightarrow{BD}$.

Développer. Soit x et y deux réels. Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$, donc :

$$\begin{aligned} & x\overrightarrow{BC} + y\overrightarrow{BD} \\ &= -(x+y)\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC} \\ &\quad + y\overrightarrow{AD}. \end{aligned}$$

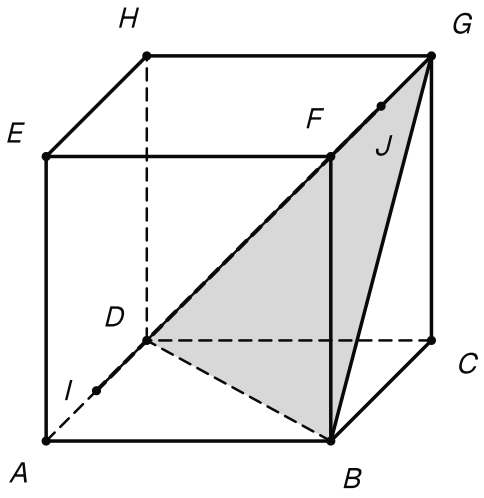
Identifier. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires : on identifie les coefficients avec ceux de la question 1 (identification des coefficients, F14). Pour $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$, on obtient $x = -\dfrac{1}{2}$ et $y = \dfrac{2}{3}$, puis $-(x+y) = -\dfrac{1}{6}$. Or le coefficient de $\overrightarrow{AB}$ doit valoir $-\dfrac{1}{2}$: aucun couple ne convient.

Conclusion. La droite (IJ) n'est pas parallèle au plan (BCD).

Exercice 6

Une droite parallèle au plan d'une section

Soit $ABCDEFGH$ un cube : sa base est $ABCD$, sa face du dessus $EFGH$, et ses arêtes verticales $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$; faces latérales $ABFE$, $BCGF$, $DCGH$, $ADHE$. Les points A, B, D, E ne sont pas coplanaires. On note I le milieu de $[AD]$ et J le milieu de $[FG]$.



Le cube de l'énoncé, I milieu de [AD], J milieu de [FG], et le triangle BDG qui représente le plan (BDG).

1.

Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$.

INDICE

Va de I à J par A, B et F, puis remplace $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{FJ}$.

CORRIGÉ

Relation de Chasles.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} \\ &\quad + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FJ}.\end{aligned}$$

Remplacer. D'après la propriété du milieu (F07), $\overrightarrow{IA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{FJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FG}$. Les faces donnent $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ (égalité de deux vecteurs, F01). Donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ} &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \\ &\quad + \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$.

2.

Exprimer $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$. Montrer qu'ils ne sont pas colinéaires.

INDICE

Pour la non-colinéarité, suppose $\overrightarrow{BG} = t\overrightarrow{BD}$ et regarde le coefficient de $\overrightarrow{AE}$; traite aussi l'autre cas.

CORRIGÉ

Expressions. Par la relation de Chasles et les faces ($\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE}$) :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} \\ &= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}, \\ \overrightarrow{BG} &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}.\end{aligned}$$

Non-colinéarité. Les points A, B, D, E ne sont pas coplanaires : d'après la propriété des points coplanaires (F15), $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires. Soit t un réel.

- Si $\overrightarrow{BG} = t\overrightarrow{BD}$, alors $t\overrightarrow{AB} + (1-t)\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \vec{0}$. Le coefficient de $\overrightarrow{AE}$ vaut 1 : F14 (coplanarité et relation linéaire) l'interdit.
- Si $\overrightarrow{BD} = t\overrightarrow{BG}$, alors $-\overrightarrow{AB} + (1-t)\overrightarrow{AD} - t\overrightarrow{AE} = \vec{0}$. Le coefficient de $\overrightarrow{AB}$ vaut -1 : même contradiction.

Conclusion. $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$; ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

3.

Démontrer que la droite (IJ) est parallèle au plan (BDG).

INDICE

Cherche x et y tels que $\overrightarrow{IJ} = x\overrightarrow{BD} + y\overrightarrow{BG}$: commence par le coefficient de $\overrightarrow{AE}$.

CORRIGÉ

Le plan (BDG). Par la question 2, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BG}$ ne sont pas colinéaires : B, D, G ne sont pas alignés (caractérisation de l'alignement, F09), et $(BDG) = P(B, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BG})$.

Décomposition. Par les questions 1 et 2 :

$$\begin{aligned}&-\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BG} \\ &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} \\ &= \overrightarrow{IJ}.\end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{IJ} = x\overrightarrow{BD} + y\overrightarrow{BG}$ avec $x = -1$ et $y = 1$. Le vecteur $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$ n'est pas nul, sinon $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ seraient coplanaires (coplanarité et relation linéaire, F14) : il dirige la droite (IJ).

Conclusion. D'après le critère de parallélisme d'une droite et d'un plan (F16), la droite (IJ) est parallèle au plan (BDG).

4.

La droite (IJ) est-elle contenue dans le plan (BDG) ?

INDICE

Teste le point I : existe-t-il x et y tels que $\overrightarrow{BI} = x\overrightarrow{BD} + y\overrightarrow{BG}$?

CORRIGÉ

Calcul de $\overrightarrow{BI}$. Par la relation de Chasles et la propriété du milieu (F07) :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BI} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI} \\ &= -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

Raisonnement par l'absurde. Supposons $I \in (BDG)$. D'après la caractérisation vectorielle d'un plan (F11), il existe deux réels x et y tels que :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BI} &= x\overrightarrow{BD} + y\overrightarrow{BG} \\ &= -x\overrightarrow{AB} + (x+y)\overrightarrow{AD} \\ &\quad + y\overrightarrow{AE}.\end{aligned}$$

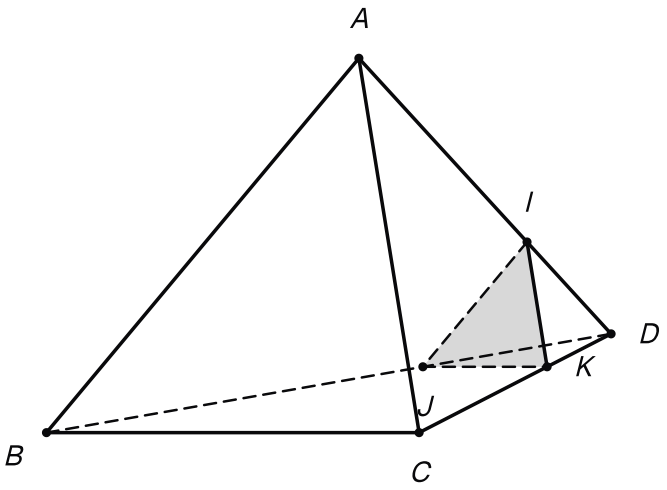
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires : on identifie les coefficients (F14). On obtient $x = 1$, $y = 0$ et $x + y = \frac{1}{2}$, ce qui est contradictoire.

Conclusion. Le point I n'appartient pas au plan (BDG) : la droite (IJ), qui passe par I, n'est pas contenue dans ce plan.

Exercice 7

Deux plans parallèles dans un tétraèdre

Soit $ABCD$ un tétraèdre. On note I, J et K les points tels que $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$.



Le tétraèdre ABCD et les points I, J, K au tiers des arêtes [DA], [DB], [DC] en partant de D, avec le triangle IJK.

1.

Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et que $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

INDICE

Passe par le sommet D commun aux trois arêtes.

CORRIGÉ

D'après la définition de I, $\overrightarrow{ID} = -\overrightarrow{DI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$. Par la relation de Chasles et les règles de calcul avec le produit par un réel (F06) :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DJ} \\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IK} &= \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DK} \\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

2.

En déduire que (IJK) est un plan, parallèle au plan (ABC).

INDICE

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires : qu'en est-il de $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$? Applique ensuite la propriété des plans parallèles.

CORRIGÉ

(ABC) **est un plan.** A, B, C ne sont pas alignés, sinon les quatre sommets seraient coplanaires. Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires (caractérisation de l'alignement, F09).

(IJK) **est un plan.** Soit t un réel. Si $\overrightarrow{IK} = t\overrightarrow{IJ}$, la question 1 donne $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB}$; si $\overrightarrow{IJ} = t\overrightarrow{IK}$, elle donne $\overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{AC}$. Les deux cas sont impossibles : $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ ne sont pas colinéaires, donc I, J, K ne sont pas alignés, et $(IJK) = P(I, \overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK})$.

Parallélisme. Avec $(ABC) = P(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, la question 1 s'écrit :

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AC},$$

$$\overrightarrow{IK} = 0\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

D'après le critère de coplanarité (F13), $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{IJ}$ sont coplanaires, et $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{IK}$ aussi.

Conclusion. D'après la propriété des plans parallèles (F17), (IJK) est un plan, parallèle au plan (ABC).

3.

Démontrer que ces deux plans sont distincts.

INDICE

Montre que I n'appartient pas à (ABC), en raisonnant par l'absurde avec $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.

CORRIGÉ

Calcul de $\overrightarrow{AI}$. Par la relation de Chasles et la définition de I :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DI} \\ &= \overrightarrow{AD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

Raisonnement par l'absurde. Supposons $I \in (ABC)$. D'après la caractérisation vectorielle d'un plan (F11), il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{AI} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$. Comme $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$, on en déduit :

$$\overrightarrow{AD} = \frac{3x}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3y}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Par F11, D appartiendrait alors au plan (ABC), et les quatre sommets du tétraèdre seraient coplanaires : c'est faux. Donc $I \notin (ABC)$.

Conclusion. Le point I appartient au plan (IJK) mais pas au plan (ABC) : ces deux plans parallèles sont distincts.