BURHAN

Vecteurs de l'espace : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/vecteurs-de-l-espace/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Vecteurs de l'espace	Application	9

Exercice 1

Enchaîner par la relation de Chasles

Soit M, N, P et Q quatre points de l'espace. Écris chaque vecteur sous la forme d'un seul vecteur, ou de $\vec{0}$.

1.

$\vec{a} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{NQ}$.

INDICE

Cherche le terme qui finit en M : place-le en premier.

2.

$\vec{b} = \overrightarrow{MQ} - \overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{NP} - \overrightarrow{MP}$.

INDICE

Remplace chaque vecteur précédé d'un signe moins par son opposé : $-\overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{QN}$.

3.

$\vec{c} = \overrightarrow{QM} + 2\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NM}$.

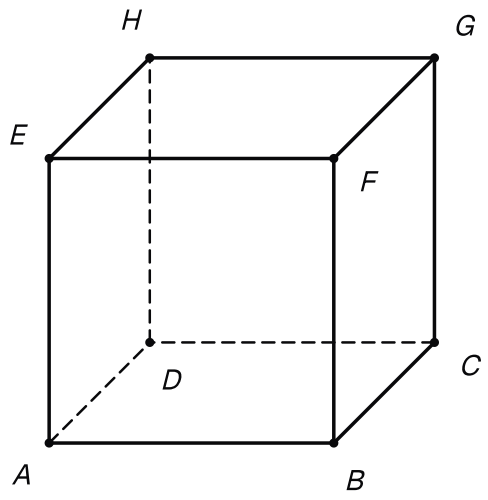
INDICE

Regroupe d'abord $2\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{NM}$, qui sont des multiples du même vecteur.

Exercice 2

Égalités de vecteurs dans un cube

Soit $ABCDEFGH$ un cube : faces $ABCD$ (dessous) et $EFGH$ (dessus), arêtes verticales $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$; faces latérales $ABFE$, $BCGF$, $DCGH$, $ADHE$. Ses faces sont des carrés, donc des parallélogrammes. Trace une figure à main levée pour suivre les lettres.



Le cube de l'exercice, pour suivre les lettres : la face ABCD dessous, EFGH dessus.

1.

Parmi les vecteurs $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{HG}$, lesquels sont égaux à $\overrightarrow{AB}$? Justifier chaque réponse par une face.

INDICE

Dans un parallélogramme, deux côtés opposés sont égaux quand on les parcourt dans le même sens. Lesquels de ces vecteurs sont parcourus dans le même sens que $\overrightarrow{AB}$? Il peut y en avoir plusieurs.

2.

Simplifier $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{GC}$, puis $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{HG}$.

INDICE

Pour la seconde somme, remplace $\overrightarrow{BF}$ par un vecteur qui commence en A, puis $\overrightarrow{HG}$ par un vecteur qui commence en E.

3.

Un élève écrit : « $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{GF}$, car $EFGH$ est un carré ». Corriger son égalité.

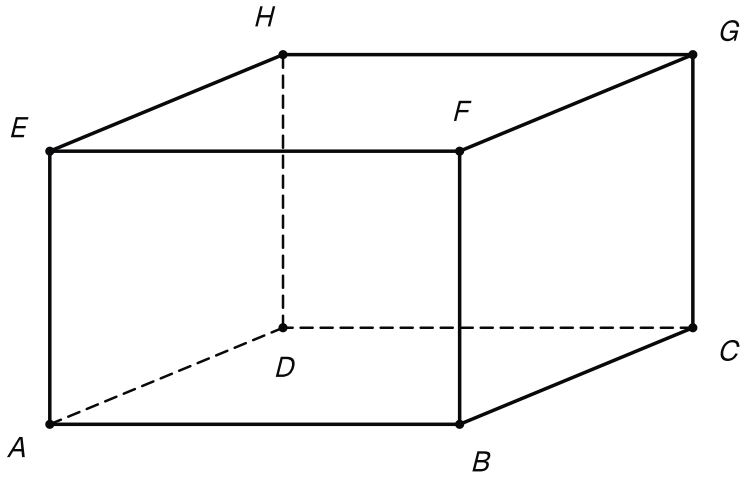
INDICE

Dans le parallélogramme $EFGH$, quel côté est parcouru dans le même sens que $[EH]$, de E vers H ?

Exercice 3

Règle du parallélogramme dans un parallélépipède

Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède, nommé comme un cube : faces $ABCD$ et $EFGH$, arêtes $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$; faces latérales $ABFE$, $BCGF$, $DCGH$, $ADHE$. Chacune de ses six faces est un parallélogramme. Écris chaque somme sous la forme d'un seul vecteur.



Le parallélépipède ABCDEFGH de l'exercice : six faces parallélogrammes, nommées comme celles d'un cube.

1.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$.

INDICE

Cherche la face qui contient les arêtes $[AB]$ et $[AE]$, et écris ses sommets dans l'ordre exigé par la règle.

2.

$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DH}$.

INDICE

Les deux vecteurs partent de D : la somme est la diagonale issue de D de la face qui les contient.

3.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$. On admet que $ACGE$ est un parallélogramme.

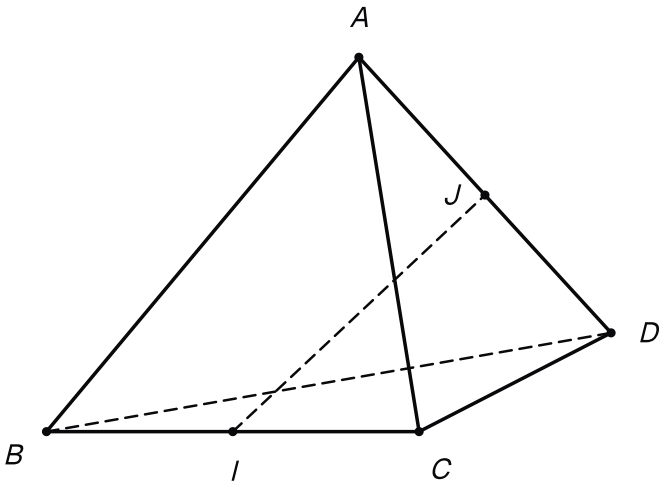
INDICE

Additionne d'abord les deux premiers vecteurs dans la face $ABCD$, puis utilise le parallélogramme $ACGE$.

Exercice 4

Milieux et sommes de vecteurs

Soit $ABCD$ un tétraèdre (quatre points non coplanaires), I le milieu de $[BC]$ et J le milieu de $[AD]$.



Le tétraèdre ABCD, avec I milieu de [BC] et J milieu de [AD], reliés par le segment [IJ].

1.

Montrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$.

INDICE

Applique la propriété du milieu de $[BC]$ avec un point bien choisi.

2.

Montrer de même que $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{DI}$.

INDICE

Même propriété, avec un autre point.

3.

En déduire que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 4\overrightarrow{JI}$.

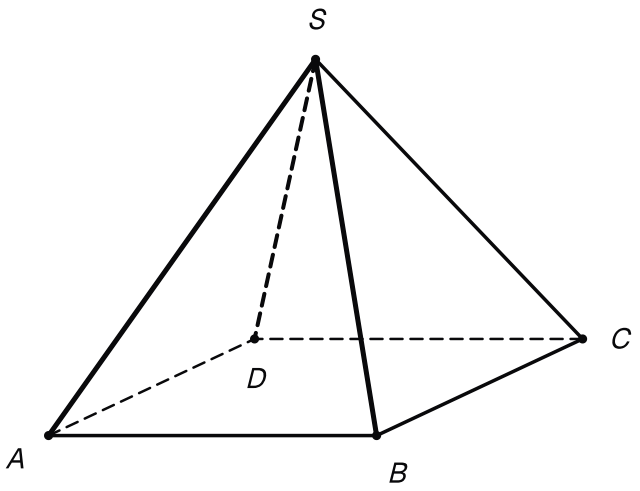
INDICE

Utilise les questions 1 et 2, puis cherche quel milieu fait apparaître le vecteur $\overrightarrow{JI}$.

Exercice 5

Exprimer des vecteurs d'une pyramide

Soit $SABCD$ une pyramide de sommet S, dont la base $ABCD$ est un parallélogramme. On exprime chaque vecteur en fonction de $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$ et $\overrightarrow{SD}$.



La pyramide SABCD, de base le parallélogramme ABCD, et ses arêtes latérales issues de S.

1.

Exprimer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BD}$.

INDICE

Passe par le sommet S : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SB}$.

2.

Exprimer $\overrightarrow{SC}$.

INDICE

Écris $\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BC}$, puis remplace $\overrightarrow{BC}$ grâce à la base.

3.

Soit K le milieu de $[SC]$, de sorte que $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$. Exprimer $\overrightarrow{AK}$.

INDICE

Écris $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SK}$, puis utilise la question 2.

Exercice 6

Reconnaître des vecteurs colinéaires

Soit $ABCD$ un tétraèdre. Dans chaque question, exhibe un réel k et conclus.

1.

On pose :

$$\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AD},$$
$$\vec{v} = -4\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - 6\overrightarrow{AD}.$$

Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

INDICE

Compare les coefficients de $\overrightarrow{AB}$ dans $\vec{u}$ et dans $\vec{v}$: par quel réel passe-t-on de l'un à l'autre ?

2.

On pose $\vec{s} = 3\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$. Montrer que $\vec{s}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

INDICE

Mets 3 en facteur, puis reconnais $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ par la relation de Chasles.

3.

Soit P le point tel que $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AB}$. Montrer que $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

INDICE

Écris $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP}$.

Exercice 7

Un point dans un plan

Soit $ABCD$ un tétraèdre : les points A, B, C, D ne sont pas coplanaires. On admet que A, B, C ne sont pas alignés : (ABC) est un plan.

1.

Exprimer $\overrightarrow{BC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

INDICE

Passe par le point A.

2.

Soit M le point tel que $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CA}$. Montrer que M appartient au plan (ABC).

INDICE

Calcule $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}$, puis écris-le avec $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

3.

Soit N le point tel que $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DA} + 3\overrightarrow{BC}$. Montrer que N appartient au plan (ABC).

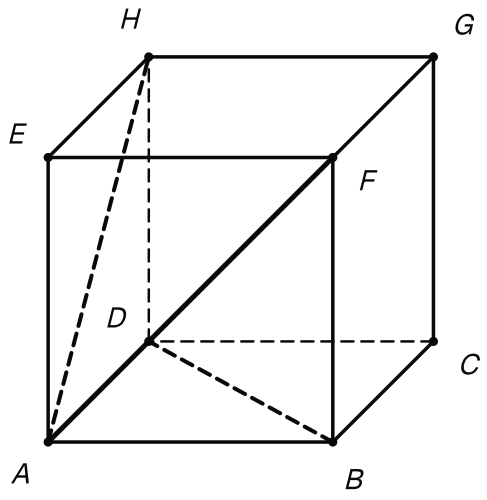
INDICE

Commence par $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$, puis utilise la question 1.

Exercice 8

Trois vecteurs coplanaires dans un cube

Soit $ABCDEFGH$ un cube (faces $ABCD$ et $EFGH$, arêtes $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$). On admet que $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AH}$ ne sont pas colinéaires.



Le cube de l'exercice et trois diagonales de faces : [AF] devant, [AH] à gauche, [BD] dessous.

1.

Exprimer $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

INDICE

Utilise les faces $ABFE$ et $ADHE$, puis passe par A pour $\overrightarrow{BD}$.

2.

Vérifier que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AF}$. En déduire que $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont coplanaires.

INDICE

Remplace $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AF}$ par leurs expressions : un terme disparaît.

3.

Soit K le point tel que $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BD}$. Montrer que K appartient au plan (AFH).

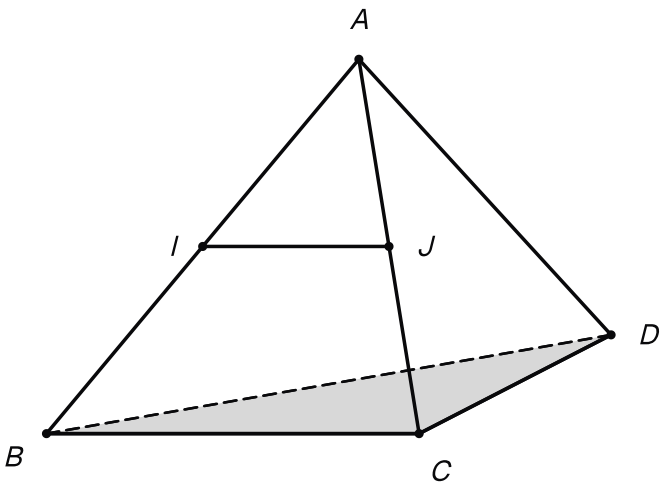
INDICE

Les points A, F, H ne sont pas alignés, puisque $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AH}$ ne sont pas colinéaires (caractérisation de l'alignement, F09).

Exercice 9

Une droite des milieux parallèle à une face

Soit $ABCD$ un tétraèdre, I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[AC]$.



Le tétraèdre ABCD avec I milieu de [AB], J milieu de [AC], et la face BCD, teintée.

1.

Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

INDICE

Passe par A : $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ}$, puis traduis chaque milieu.

2.

En déduire que la droite (IJ) est parallèle au plan (BCD).

INDICE

Le plan (BCD) est dirigé par le couple $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})$. Écris $\overrightarrow{IJ}$ avec ces deux vecteurs.