BURHAN

# Vecteurs de l'espace : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/vecteurs-de-l-espace/exercices/application

| Chapitre | Palier | Exercices |
| --- | --- | --- |
| Vecteurs de l'espace | Application | 9 |

### Exercice 1

## Enchaîner par la relation de Chasles

Soit $M$, $N$, $P$ et $Q$ quatre points de l'espace. Écris chaque vecteur sous la forme d'un seul vecteur, ou de $\vec{0}$.

**1.**

$\vec{a} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{NQ}$.

INDICE

Cherche le terme qui finit en $M$ : place-le en premier.

CORRIGÉ

**Réordonner.** L'addition des vecteurs est commutative (propriétés de l'addition, F03) : on place $\overrightarrow{PM}$ en tête, pour que chaque vecteur commence là où finit le précédent.

**Relation de Chasles.** On l'applique deux fois (F02) :

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NQ} \\ &= \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NQ} \\ &= \overrightarrow{PQ}.\end{aligned}$$

**Conclusion.** $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$.

**2.**

$\vec{b} = \overrightarrow{MQ} - \overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{NP} - \overrightarrow{MP}$.

INDICE

Remplace chaque vecteur précédé d'un signe moins par son opposé : $-\overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{QN}$.

CORRIGÉ

**Opposés.** Par définition de l'opposé d'un vecteur (F01), $-\overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{QN}$ et $-\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{PM}$. Les vecteurs s'enchaînent alors dans l'ordre.

**Relation de Chasles.** On l'applique à $\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QN}$ et à $\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PM}$, puis au résultat :

$$\begin{aligned}\vec{b} &= \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QN} \\ &\quad + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PM} \\ &= \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM} \\ &= \overrightarrow{MM} = \vec{0}.\end{aligned}$$

**Conclusion.** $\vec{b} = \vec{0}$.

### 3.

$\vec{c} = \overrightarrow{QM} + 2\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NM}$.

INDICE

Regroupe d'abord $2\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{NM}$, qui sont des multiples du même vecteur.

CORRIGÉ

**Multiples de $\overrightarrow{MN}$.** Comme $\overrightarrow{NM} = -\overrightarrow{MN}$, les règles de calcul avec le produit par un réel (F06) donnent :

$$\begin{aligned} &2\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM} \\ &= (2-1)\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MN}. \end{aligned}$$

**Opposé.** De plus, $-\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{NP}$ (opposé d'un vecteur, F01).

**Relation de Chasles.** Après avoir réordonné les termes (F03) :

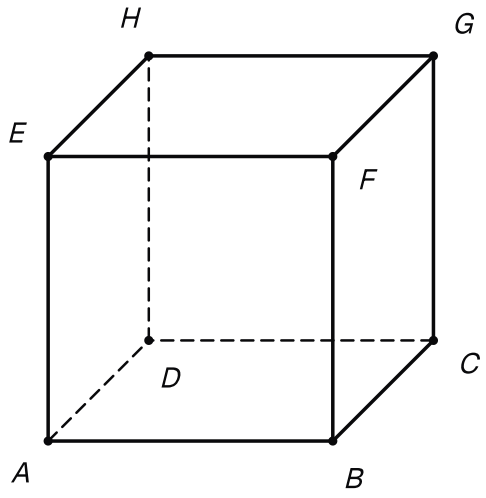
$$\begin{aligned} \vec{c} &= \overrightarrow{QM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} \\ &= \overrightarrow{QN} + \overrightarrow{NP} \\ &= \overrightarrow{QP}. \end{aligned}$$

**Conclusion.** $\vec{c} = \overrightarrow{QP}$.

**Exercice 2**

## Égalités de vecteurs dans un cube

Soit $ABCDEFGH$ un cube : faces $ABCD$ (dessous) et $EFGH$ (dessus), arêtes verticales $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$ ; faces latérales $ABFE$, $BCGF$, $DCGH$, $ADHE$. Ses faces sont des carrés, donc des parallélogrammes. Trace une figure à main levée pour suivre les lettres.




**Le cube de l'exercice, pour suivre les lettres : la face ABCD dessous, EFGH dessus.**

### 1.

Parmi les vecteurs $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{HG}$, lesquels sont égaux à $\overrightarrow{AB}$ ? Justifier chaque réponse par une face.

INDICE

Dans un parallélogramme, deux côtés opposés sont égaux quand on les parcourt dans le même sens. Lesquels de ces vecteurs sont parcourus dans le même sens que $\overrightarrow{AB}$ ? Il peut y en avoir plusieurs.

CORRIGÉ

Chaque face est un parallélogramme. Par la définition de l'égalité de deux vecteurs (FO1), on lit sur les faces :

- face $ABCD$ : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ;
- face $ABFE$ : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$ ;
- face $EFGH$ : $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HG}$.

En revanche, $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{GH} = -\overrightarrow{HG} = -\overrightarrow{AB}$. Comme $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$, ces deux vecteurs ne sont pas égaux à $\overrightarrow{AB}$.

**Conclusion.** Les vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$ sont $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{HG}$.

### 2.

Simplifier $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{GC}$, puis $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{HG}$.

INDICE

Pour la seconde somme, remplace $\overrightarrow{BF}$ par un vecteur qui commence en $A$, puis $\overrightarrow{HG}$ par un vecteur qui commence en $E$.

CORRIGÉ

**Première somme.** Les faces $ABFE$ et $BCGF$ donnent $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{CG}$ (égalité de deux vecteurs, F01). Par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{GC}&=\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GC}\\&=\overrightarrow{CC}=\vec{0}.\end{aligned}$$

**Seconde somme.** La face $ABFE$ donne $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AE}$ et la face $EFGH$ donne $\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{EF}$. On réordonne les termes (commutativité, F03), puis on applique la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{HG}\\&=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}\\&=\overrightarrow{DF}.\end{aligned}$$

**Conclusion.** $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{DF}$.

### 3.

Un élève écrit : « $\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{GF}$, car $EFGH$ est un carré ». Corriger son égalité.

INDICE

Dans le parallélogramme $EFGH$, quel côté est parcouru dans le même sens que $[EH]$, de $E$ vers $H$ ?

CORRIGÉ

**L'égalité juste.** Dans le parallélogramme $EFGH$, les diagonales $[EG]$ et $[HF]$ ont le même milieu. Par la définition de l'égalité de deux vecteurs (F01), $\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{FG}$.

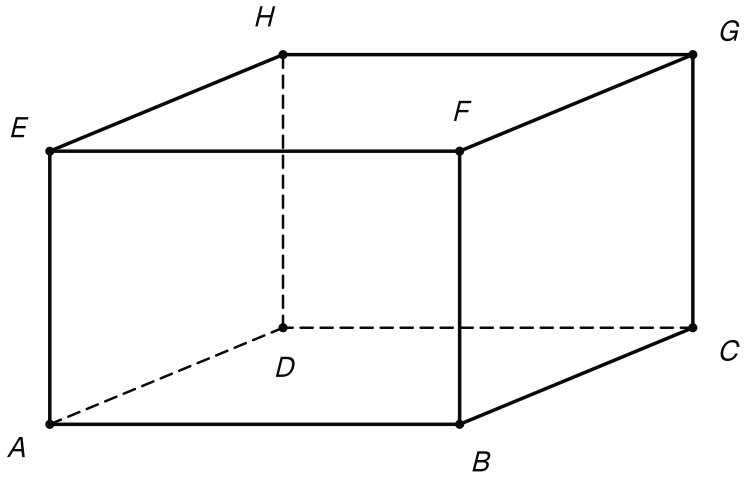
**L'erreur.** L'élève a pris l'opposé : $\overrightarrow{GF}=-\overrightarrow{FG}=-\overrightarrow{EH}$. Comme $\overrightarrow{EH}\neq\vec{0}$, on a $\overrightarrow{GF}\neq\overrightarrow{EH}$ : son égalité est fausse.

**Conclusion.** Il fallait écrire $\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{FG}$.

### Exercice 3

## Règle du parallélogramme dans un parallélépipède

Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède, nommé comme un cube : faces $ABCD$ et $EFGH$, arêtes $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$ ; faces latérales $ABFE$, $BCGF$, $DCGH$, $ADHE$. Chacune de ses six faces est un parallélogramme. Écris chaque somme sous la forme d'un seul vecteur.




**Le parallélépipède ABCDEFGH de l'exercice : six faces parallélogrammes, nommées comme celles d'un cube.**

**1.**

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$.

INDICE

Cherche la face qui contient les arêtes $[AB]$ et $[AE]$, et écris ses sommets dans l'ordre exigé par la règle.

CORRIGÉ

La face $ABFE$ est un parallélogramme : la règle du parallélogramme (F04) s'applique aux sommets $A$, $B$, $F$, $E$ lus dans cet ordre.

**Conclusion.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF}$.

### 2.

$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DH}$.

INDICE

Les deux vecteurs partent de $D$ : la somme est la diagonale issue de $D$ de la face qui les contient.

CORRIGÉ

La face $ADHE$ est un parallélogramme. Lu à partir de $D$, c'est le parallélogramme $DAEH$ : la règle du parallélogramme (F04) s'applique aux sommets $D$, $A$, $E$, $H$.

**Conclusion.** $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{DE}$.

### 3.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$. On admet que $ACGE$ est un parallélogramme.

INDICE

Additionne d'abord les deux premiers vecteurs dans la face $ABCD$, puis utilise le parallélogramme $ACGE$.

CORRIGÉ

**Face $ABCD$.** C'est un parallélogramme. Par la règle du parallélogramme (F04) :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}.$$

**Parallélogramme $ACGE$.** Il est admis par l'énoncé. La même règle donne :

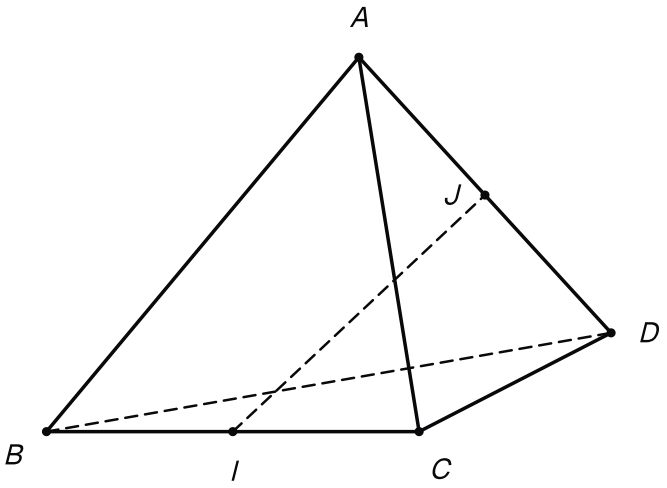
$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG}.$$

**Conclusion.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG}$.

### Exercice 4

## Milieux et sommes de vecteurs

Soit $ABCD$ un tétraèdre (quatre points non coplanaires), $I$ le milieu de $[BC]$ et $J$ le milieu de $[AD]$.




**Le tétraèdre ABCD, avec I milieu de [BC] et J milieu de [AD], reliés par le segment [IJ].**

### 1.

Montrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$.

INDICE

Applique la propriété du milieu de $[BC]$ avec un point bien choisi.

CORRIGÉ

$I$ est le milieu de $[BC]$. D'après la propriété du milieu (F07), pour tout point $M$ de l'espace :

$$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}.$$

**Conclusion.** Avec $M = A$, on obtient $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$.

### 2.

Montrer de même que $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{DI}$.

INDICE

Même propriété, avec un autre point.

CORRIGÉ

On applique la même propriété du milieu (F07), cette fois avec $M = D$.

**Conclusion.** $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{DI}$.

### 3.

En déduire que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=4\overrightarrow{JI}$.

INDICE

Utilise les questions 1 et 2, puis cherche quel milieu fait apparaître le vecteur $\overrightarrow{JI}$.

CORRIGÉ

**Regrouper.** Avec les questions 1 et 2, puis les règles de calcul avec le produit par un réel (F06) :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}\\&=2\overrightarrow{AI}+2\overrightarrow{DI}\\&=2(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{DI}).\end{aligned}$$

**Faire apparaître $J$.** $J$ est le milieu de $[AD]$. La propriété du milieu (F07), avec le point $I$, donne $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{ID}=2\overrightarrow{IJ}$. En prenant les opposés des deux membres :

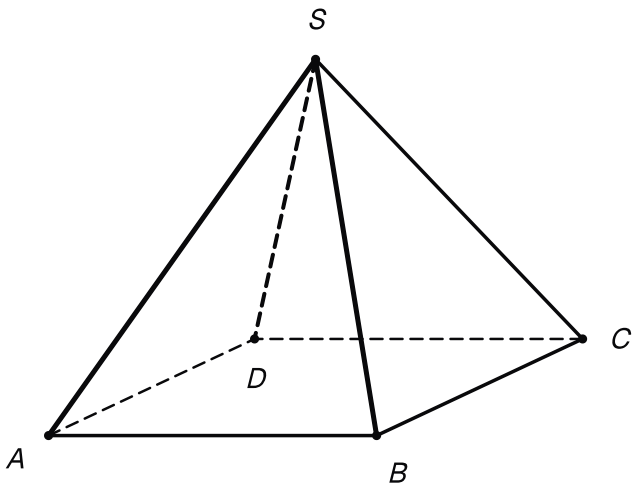
$$\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{DI}=2\overrightarrow{JI}.$$

**Conclusion.** La somme vaut $2\times 2\overrightarrow{JI}=4\overrightarrow{JI}$ : on a bien $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=4\overrightarrow{JI}$.

### Exercice 5

## Exprimer des vecteurs d'une pyramide

Soit $SABCD$ une pyramide de sommet $S$, dont la base $ABCD$ est un parallélogramme. On exprime chaque vecteur en fonction de $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$ et $\overrightarrow{SD}$.




**La pyramide SABCD, de base le parallélogramme ABCD, et ses arêtes latérales issues de S.**

#### 1.

Exprimer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BD}$.

INDICE

Passe par le sommet $S$ : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SB}$.

CORRIGÉ

Par la relation de Chasles, en passant par le sommet $S$, puis avec $\overrightarrow{AS} = -\overrightarrow{SA}$ et $\overrightarrow{BS} = -\overrightarrow{SB}$ :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SB} \\ &= \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}, \\ \overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{SD} \\ &= \overrightarrow{SD} - \overrightarrow{SB}.\end{aligned}$$

**Conclusion.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}$ et $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{SD} - \overrightarrow{SB}$.

**2.**

Exprimer $\overrightarrow{SC}$.

INDICE

Écris $\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BC}$, puis remplace $\overrightarrow{BC}$ grâce à la base.

CORRIGÉ

**Relation de Chasles.** $\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BC}$.

**Utiliser la base.** $ABCD$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ (égalité de deux vecteurs, F01). Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SD} - \overrightarrow{SA}$.

**Conclusion.** $\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} - \overrightarrow{SA}$.

**3.**

Soit $K$ le milieu de $[SC]$, de sorte que $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$. Exprimer $\overrightarrow{AK}$.

INDICE

Écris $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SK}$, puis utilise la question 2.

CORRIGÉ

**Milieu.** $K$ est le milieu de $[SC]$, donc $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$ (propriété du milieu, F07).

**Calcul.** Par la relation de Chasles, la question 2 et les règles de calcul avec le produit par un réel (F06) :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AK} &= \overrightarrow{AS} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SC} \\ &= -\overrightarrow{SA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SB} \\ &\quad + \frac{1}{2}\overrightarrow{SD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{SA} \\ &= -\frac{3}{2}\overrightarrow{SA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SB} \\ &\quad + \frac{1}{2}\overrightarrow{SD}.\end{aligned}$$

**Conclusion.** $\overrightarrow{AK} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{SA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SD}$.

### Exercice 6

## Reconnaître des vecteurs colinéaires

Soit $ABCD$ un tétraèdre. Dans chaque question, exhibe un réel $k$ et conclus.

**1.**

On pose :

$$\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AD},$$
$$\vec{v} = -4\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - 6\overrightarrow{AD}.$$

Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

INDICE

Compare les coefficients de $\overrightarrow{AB}$ dans $\vec{u}$ et dans $\vec{v}$ : par quel réel passe-t-on de l'un à l'autre ?

CORRIGÉ

D'après les règles de calcul avec le produit par un réel (F06) :

$$\begin{aligned} -2\vec{u} &= -4\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \\ &\quad - 6\overrightarrow{AD} \\ &= \vec{v}. \end{aligned}$$

Ainsi $\vec{v} = k\vec{u}$ avec $k = -2$.

**Conclusion.** Par définition de la colinéarité (F08), $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

**2.**

On pose $\vec{s} = 3\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$. Montrer que $\vec{s}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

INDICE

Mets $3$ en facteur, puis reconnais $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ par la relation de Chasles.

CORRIGÉ

**Factoriser.** D'après les règles de calcul avec le produit par un réel (F06), $\vec{s} = 3(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$.

**Relation de Chasles.**

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC}. \end{aligned}$$

Donc $\vec{s} = -3\overrightarrow{BC}$, c'est-à-dire $\vec{s} = k\overrightarrow{BC}$ avec $k = -3$.

**Conclusion.** Par définition de la colinéarité (F08), $\vec{s}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

### 3.

Soit $P$ le point tel que $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AB}$. Montrer que $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

INDICE

Écris $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP}$.

CORRIGÉ

Par la relation de Chasles, puis la définition de $P$ :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP} \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

Or $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$. Donc $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB}$ avec $k = 2$.

**Conclusion.** Les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires (définition de la colinéarité, F08). Comme $A \neq B$, le point $P$ appartient de plus à la droite $(AB)$ (caractérisation de l'alignement, F09).

### Exercice 7

## Un point dans un plan

Soit $ABCD$ un tétraèdre : les points $A$, $B$, $C$, $D$ ne sont pas coplanaires. On admet que $A$, $B$, $C$ ne sont pas alignés : $(ABC)$ est un plan.

**1.**

Exprimer $\overrightarrow{BC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

INDICE

Passe par le point $A$.

CORRIGÉ

Par la relation de Chasles, en passant par $A$ : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$. De plus, $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ (opposé d'un vecteur, F01).

**Conclusion.** $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

**2.**

Soit $M$ le point tel que $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CA}$. Montrer que $M$ appartient au plan $(ABC)$.

INDICE

Calcule $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}$, puis écris-le avec $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

CORRIGÉ

**Calcul de $\overrightarrow{AM}$.** Par la relation de Chasles, la définition de $M$ et $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$ :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ avec $x = 1$ et $y = -1$.

**Conclusion.** Les points $A$, $B$, $C$ ne sont pas alignés : d'après la caractérisation vectorielle d'un plan (F11), $M$ appartient au plan $(ABC)$.

### 3.

Soit $N$ le point tel que $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DA} + 3\overrightarrow{BC}$. Montrer que $N$ appartient au plan $(ABC)$.

INDICE

Commence par $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$, puis utilise la question 1.

CORRIGÉ

**Calcul de $\overrightarrow{AN}$.** Par la relation de Chasles et la définition de $N$ :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AN} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} + 3\overrightarrow{BC} \\ &= 3\overrightarrow{BC}.\end{aligned}$$

**Avec la question 1.** Par les règles de calcul avec le produit par un réel (F06) :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AN} &= 3(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \\ &= -3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

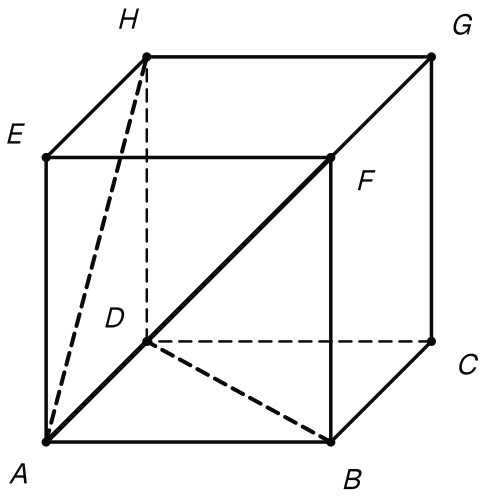
On a donc $\overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, soit $x = -3$ et $y = 3$.

**Conclusion.** Comme $A$, $B$, $C$ ne sont pas alignés, la caractérisation vectorielle d'un plan (F11) montre que $N$ appartient au plan $(ABC)$.

### Exercice 8

## Trois vecteurs coplanaires dans un cube

Soit $ABCDEFGH$ un cube (faces $ABCD$ et $EFGH$, arêtes $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$). On admet que $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AH}$ ne sont pas colinéaires.




**Le cube de l'exercice et trois diagonales de faces : [AF] devant, [AH] à gauche, [BD] dessous.**

### 1.

Exprimer $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

INDICE

Utilise les faces $ABFE$ et $ADHE$, puis passe par $A$ pour $\overrightarrow{BD}$.

CORRIGÉ

- La face $ABFE$ est un parallélogramme. Par la règle du parallélogramme (F04), $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$.
- La face $ADHE$ est un parallélogramme. Par la même règle, $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.
- Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

**Conclusion.** $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

### 2.

Vérifier que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AF}$. En déduire que $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont coplanaires.

INDICE

Remplace $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AF}$ par leurs expressions : un terme disparaît.

CORRIGÉ

**Calcul.** D'après la question 1 :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AF}\\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE}\\ &= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\\ &= \overrightarrow{BD}.\end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{BD} = x\overrightarrow{AF} + y\overrightarrow{AH}$ avec $x = -1$ et $y = 1$.

**Conclusion.** Les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AH}$ ne sont pas colinéaires : d'après le critère de coplanarité (F13), $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont coplanaires.

### 3.

Soit $K$ le point tel que $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BD}$. Montrer que $K$ appartient au plan $(AFH)$.

INDICE

Les points $A$, $F$, $H$ ne sont pas alignés, puisque $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AH}$ ne sont pas colinéaires (caractérisation de l'alignement, F09).

CORRIGÉ

**Le plan $(AFH)$.** Les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AH}$ ne sont pas colinéaires, donc $A$, $F$, $H$ ne sont pas alignés (caractérisation de l'alignement, F09) : $(AFH)$ est un plan.

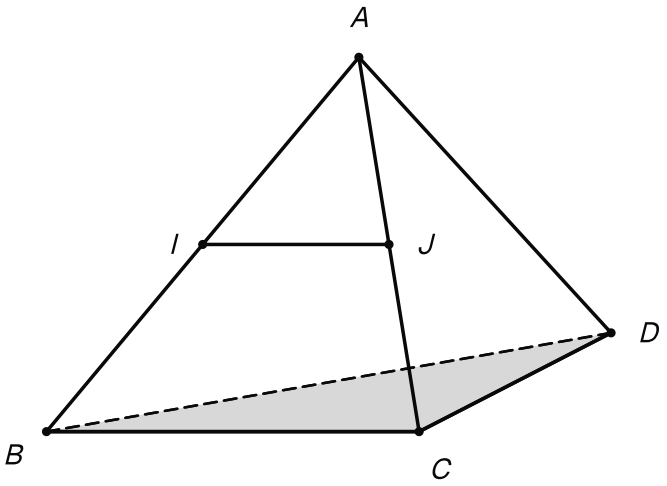
**Décomposition.** Par la définition de $K$ et la question 2, $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AH}$. Ainsi $\overrightarrow{AK} = x\overrightarrow{AF} + y\overrightarrow{AH}$ avec $x = -1$ et $y = 1$.

**Conclusion.** D'après la caractérisation vectorielle d'un plan (F11), $K$ appartient au plan $(AFH)$.

### Exercice 9

## Une droite des milieux parallèle à une face

Soit $ABCD$ un tétraèdre, $I$ le milieu de $[AB]$ et $J$ le milieu de $[AC]$.




**Le tétraèdre ABCD avec I milieu de [AB], J milieu de [AC], et la face BCD, teintée.**

**1.**

Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

INDICE

Passe par $A$ : $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ}$, puis traduis chaque milieu.

CORRIGÉ

**Milieux.** D'après la propriété du milieu (F07), $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{IA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$. De même, $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

**Calcul.** Par la relation de Chasles et les règles de calcul avec le produit par un réel (F06) :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.\end{aligned}$$

**Conclusion.** $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

### 2.

En déduire que la droite $(IJ)$ est parallèle au plan $(BCD)$.

INDICE

Le plan $(BCD)$ est dirigé par le couple $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})$. Écris $\overrightarrow{IJ}$ avec ces deux vecteurs.

CORRIGÉ

**Le plan $(BCD)$.** Les points $B$, $C$, $D$ ne sont pas alignés : sinon les quatre sommets du tétraèdre seraient coplanaires. Le plan $(BCD)$ est donc le plan $P(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})$.

**Un vecteur directeur de $(IJ)$.** Par la question 1, $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, qui n'est pas nul : $I \neq J$, et $\overrightarrow{IJ}$ dirige la droite $(IJ)$.

**Décomposition.** $\overrightarrow{IJ} = x\overrightarrow{BC} + y\overrightarrow{BD}$ avec $x = \frac{1}{2}$ et $y = 0$.

**Conclusion.** D'après le critère de parallélisme d'une droite et d'un plan (F16), la droite $(IJ)$ est parallèle au plan $(BCD)$.