BURHAN

Vecteurs de l'espace

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/vecteurs-de-l-espace/cours

Chapitre	Semestre
Vecteurs de l'espace	Semestre 2

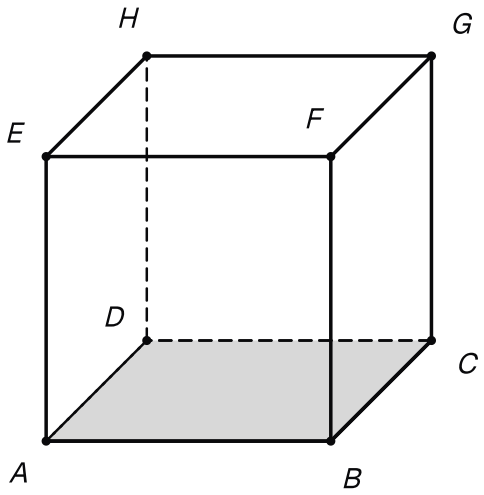
Des vecteurs qui sortent du plan

Pose un dé sur ta table et nomme-le comme un **cube** $ABCDEFGH$. La face $ABCD$ touche la table, la face $EFGH$ est au-dessus.

Les arêtes verticales sont $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$ et $[DH]$. Au-dessus de A, B, C, D se trouvent, dans cet ordre, E, F, G, H. Les quatre autres faces sont $ABFE$, $BCGF$, $DCGH$ et $ADHE$.

Trace ce cube à main levée : il te servira dans tout le chapitre.

Dans le plan, tu sais additionner des vecteurs. Que deviennent-ils quand les points quittent la feuille ?



Le cube ABCDEFGH du chapitre : la face ABCD est posée sur la table, la face EFGH au-dessus, et E, F, G, H surplombent A, B, C, D.

Devine : Quatre sommets du cube

Les quatre sommets A, C, G et E du cube sont-ils dans un même plan ?

A. Oui, ils sont dans un même plan.

Juste.

C'est juste. Les arêtes $[AE]$ et $[CG]$ sont parallèles : avec $[AC]$ et $[EG]$, elles forment un rectangle qui coupe le cube en biais.

B. Non, ils forment un tétraèdre.

Faux.

Faux. Deux droites parallèles sont dans un même plan. Or (AE) et (CG) sont parallèles, et elles portent les quatre points.

C. Cela dépend de la taille du cube.

Faux.

Faux. Agrandir le cube ne change ni les parallélismes ni les plans : la réponse vaut pour tous les cubes.

Correction

Oui. En fin de chapitre, tu l'écriras ainsi.

Les arêtes verticales $[CG]$ et $[AE]$ ont même direction, même longueur et même sens : $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE}$. Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG}$. Donc :

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}.$$

Les points A, C, G, E sont donc dans un même plan. Aucun coup d'œil au dessin ne remplace ce calcul.

Dans ce chapitre, tu prolonges à l'espace le calcul vectoriel du plan.

Tu sauras démontrer que trois points sont alignés, ou que quatre points sont dans un même plan. Tu sauras aussi prouver qu'une droite est parallèle à un plan.

À chaque fois, tu exhiberas les réels qui le prouvent. Et tu ne liras jamais une propriété sur un dessin en perspective.

Vecteurs de l'espace, somme et relation de Chasles

Ce que tu sais du plan

Petit rappel. Dans le plan, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ veut dire que $ABCD$ est un parallélogramme, éventuellement aplati.

La relation de Chasles enchaîne les vecteurs : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Dans l'espace, la nouveauté arrive quand on compare des vecteurs qui ne sont pas sur une même face.

Devine : Deux arêtes éloignées

Dans le cube $ABCDEFGH$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HG}$ sont-ils égaux ?

A. On ne peut pas les comparer.

Faux.

Faux. On compare deux vecteurs de l'espace par la définition qui suit, quelle que soit leur place.

B. Oui, ces deux vecteurs sont égaux.

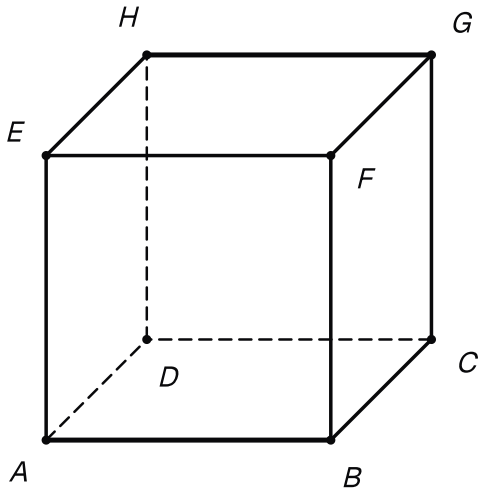
Juste.
C'est juste. Les arêtes $[AB]$ et $[HG]$ ont la même direction, la même longueur, et on les parcourt dans le même sens.

C. Non, ils ne sont pas sur une même face.
Faux.
Faux. Deux vecteurs égaux n'ont pas besoin d'être sur une même face : seuls comptent la direction, le sens et la longueur.

Correction
Oui : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HG}$.

La face $ABCD$ donne $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. La face $DCGH$ donne $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{HG}$.

La définition qui suit rend ce raisonnement rigoureux.



Les données de la question : les arêtes [AB], sur la face du dessous, et [HG], sur la face du dessus, mises en valeur dans le cube.

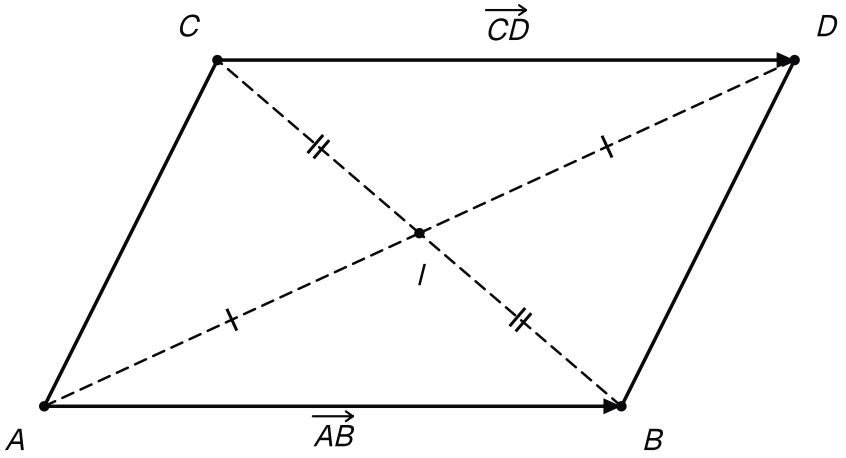
Égalité de deux vecteurs

Définition : Vecteurs de l'espace

À tout couple (A, B) de points de l'espace, on associe le **vecteur** $\overrightarrow{AB}$.

- Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **égaux** si et seulement si les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu, c'est-à-dire si $ABDC$ est un parallélogramme, éventuellement aplati.
- Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le **vecteur nul**, noté $\vec{0}$. L'**opposé** de $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$, noté $-\overrightarrow{AB}$.

- Si $A \neq B$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour **direction** celle de la droite (AB), pour **sens** celui de A vers B, et pour **norme** la longueur AB, notée $\|\overrightarrow{AB}\|$.
- Pour tout point O et tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.



Les vecteurs AB et CD égaux : ABDC est un parallélogramme, et ses diagonales [AD] et [BC] ont le même milieu I.

Remarque : Ce qui est admis

Cette définition prolonge celle du plan. Elle vient avec des faits **admis** :

- Deux vecteurs égaux à un même troisième sont égaux.
- Le point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ existe et il est unique.
- De plus, la somme définie plus bas ne dépend pas du point de départ.

Dans un plan de l'espace, ces vecteurs, leur somme et leur produit par un réel sont ceux du tronc commun : cet accord est admis lui aussi.

Ces faits prolongent tes acquis du plan ; on ne les démontre pas cette année.

Exemple : Deux vecteurs égaux sans face commune

Montrons que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{FG}$ dans le cube.

La face $ADHE$ est un carré, donc un parallélogramme : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EH}$. La face $EFGH$ est aussi un carré : $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$.

Deux vecteurs égaux à un même troisième sont égaux, donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{FG}$.

Pourtant, les arêtes $[AD]$ et $[FG]$ n'ont aucune face commune.

Somme et relation de Chasles

Définition : Somme de deux vecteurs ; relation de Chasles

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et A un point. Soit B le point tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, puis C le point tel que $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$. La **somme** $\vec{u} + \vec{v}$ est le vecteur $\overrightarrow{AC}$; elle ne dépend pas du point A choisi.

En particulier, pour tous points A, B et C de l'espace, on a la **relation de Chasles** : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. On note $\vec{u} - \vec{v}$ le vecteur $\vec{u} + (-\vec{v})$.

Exemple : Deux chemins vers G

Pour aller de A à G, longeons trois arêtes. La relation de Chasles donne $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF}$, puis $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AG}$.

Par un autre chemin, on obtient de même :

$$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AG}.$$

La somme ne dépend que du départ et de l'arrivée.

Un piège, puis à toi

Attention : L'ordre des sommets

✗ « $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{GF}$, car $BCGF$ est un carré. »

✓ « $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FG}$, car $BCGF$ est un carré. »

Dans un parallélogramme $PQRS$, l'égalité juste est $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$: on lit les deux côtés opposés dans le même sens.

Et $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ ne dit pas que $PQRS$ est un parallélogramme. Elle dit que $PQSR$ en est un.

À toi : Deux arêtes, une diagonale

Dans le cube $ABCDEFGH$, montre que $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DG}$. Rédige ta preuve en nommant chaque règle. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Remplace chaque vecteur par un vecteur égal, pour former une chaîne qui part de D.
Indice 2

La face $ADHE$ est un parallélogramme : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DH}$. Cherche de même un vecteur égal à $\overrightarrow{EF}$ qui part de H.

Indice 3

Attention à l'ordre des sommets dans la face $EFGH$: on a $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$, et non $\overrightarrow{GH}$.

Réponse

Vecteurs égaux. La face $ADHE$ est un carré, donc $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DH}$. La face $EFGH$ est un carré, donc $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$.

Chasles. On remplace, puis on applique la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HG} \\ &= \overrightarrow{DG}.\end{aligned}$$

Conclusion. Dans le cube, $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DG}$.

Propriétés de l'addition, règle du parallélogramme

Observer

Devine : Une somme sur une face

Dans le cube $ABCDEFGH$, à quel vecteur est égale la somme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$?

A. Au vecteur $\overrightarrow{BE}$.

Faux.

Faux. $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}$: cette diagonale correspond à une différence.

B. Au vecteur $\overrightarrow{EB}$.

Faux.

Faux. $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE}$: c'est encore une différence, pas une somme.

C. Au vecteur $\overrightarrow{AG}$.

Faux.

Faux. Pour atteindre G, il faut aussi avancer dans la direction de $\overrightarrow{AD}$.

D. Au vecteur $\overrightarrow{AF}$.

Juste.

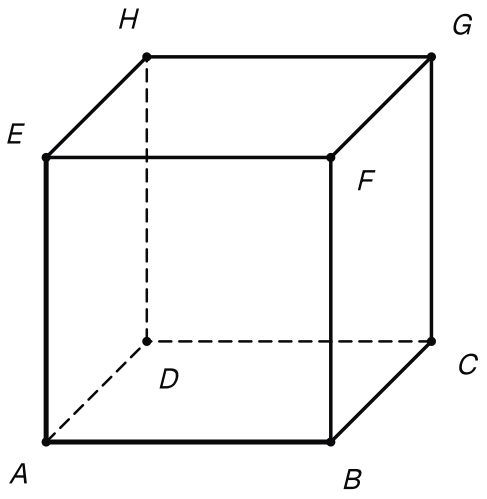
C'est juste. Dans le carré $ABFE$, la somme de deux côtés issus de A est la diagonale issue de A.

Correction

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF}$.

En effet, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF}$ dans le carré $ABFE$. Puis la relation de Chasles donne $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF}$.

C'est un cas de la règle du parallélogramme, qui arrive plus bas.



Les deux vecteurs de la somme, issus de A : l'arête [AB] de la face du dessous et l'arête verticale [AE].

Dans cet exemple, l'ordre des deux vecteurs ne compte pas : additionner des vecteurs, c'est enchaîner des déplacements.

Pourquoi est-ce vrai ? Les règles de l'addition découlent de la définition de l'égalité par les milieux. La preuve ci-dessous l'établit dans l'espace, sans passer par le plan.

Les règles et leur preuve

Propriété : Propriétés de l'addition

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace :

- $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$;
- $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$;
- $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$ et $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$.

Démonstration

Étape 1. Soit A un point, puis B et C les points tels que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{BC}=\vec{v}$ (F01). D'après F02, $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.

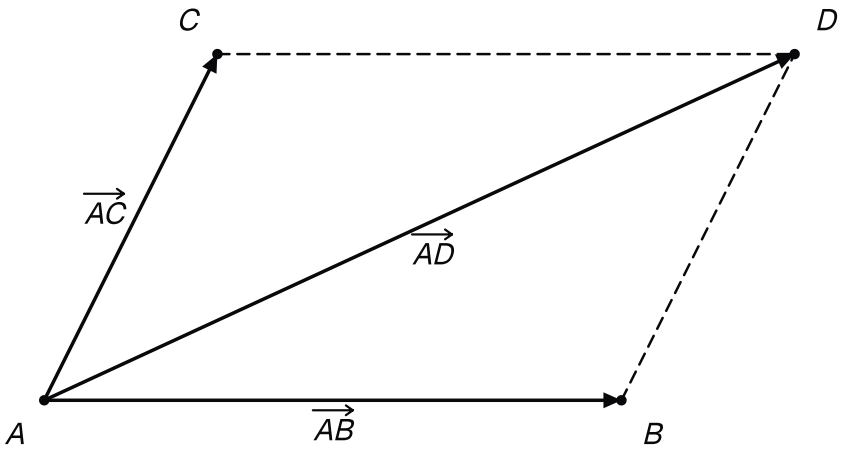
Étape 2. Soit D le point tel que $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$. D'après F01, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ signifie que $[AC]$ et $[DB]$ ont le même milieu. C'est aussi la condition de F01 pour que $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$. Donc $\vec{v}+\vec{u}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$ par F02.

Étape 3. Soit E le point tel que $\overrightarrow{CE}=\vec{w}$. Par F02, $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AE}$. De même, $\vec{v}+\vec{w}=\overrightarrow{BE}$, donc $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}$.

Étape 4. Par F02 et F01, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

La règle du parallélogramme relie une somme à une figure.

Pourquoi est-ce vrai ? On transforme l'égalité de départ, sans changer son sens, jusqu'à retrouver la définition de l'égalité de deux vecteurs.



La règle du parallélogramme : avec AB et AC issus de A, la somme AB + AC est le vecteur AD, diagonale du parallélogramme ABDC.

Propriété : Règle du parallélogramme

Pour tous points A, B, C et D de l'espace, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme, éventuellement aplati.

Démonstration

Étape 1. Si $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$, on ajoute $\overrightarrow{BA}$ aux deux membres. Par F03, $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$, donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$. Réciproquement, en ajoutant $\overrightarrow{AB}$ aux deux membres de cette égalité, on retrouve la première. Les deux égalités sont donc équivalentes.

Étape 2. Par la relation de Chasles (F02), $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$. La condition équivaut donc à $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Étape 3. D'après F01, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ signifie que $[AD]$ et $[CB]$ ont le même milieu, c'est-à-dire que $ABDC$ est un parallélogramme, éventuellement aplati.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour démontrer une égalité de vecteurs, on revient à la définition : deux segments qui ont le même milieu.

Ajouter un même vecteur aux deux membres donne une égalité équivalente.

Avec la relation de Chasles, ces deux gestes suffisent pour toutes les règles de l'addition.

Vérifie : L'étape 2 de la preuve

Dans la preuve de la règle du parallélogramme, à quelle égalité l'étape 2 ramène-t-elle la condition $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$?

A. À l'égalité $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Juste.

C'est juste. La relation de Chasles transforme $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$ en $\overrightarrow{BD}$.

B. À l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Faux.

Faux. Cette égalité est vraie aussi dans le parallélogramme $ABDC$, mais la preuve ne l'emploie pas : l'étape 2 isole $\overrightarrow{AC}$.

C. À l'égalité $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Faux.

Faux. Dans $ABDC$, $[AD]$ et $[BC]$ sont les diagonales : elles ont le même milieu, mais $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas égaux en général.

Correction

L'étape 1 ajoute $\overrightarrow{BA}$ aux deux membres. La condition devient :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}.$$

L'étape 2 applique la relation de Chasles : $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$. La condition équivaut donc à $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

L'étape 3 la traduit par les milieux.

Simplifier une somme

Méthode : Simplifier une somme de vecteurs

1. **Repère** les vecteurs dont l'un finit là où un autre commence.
2. **Range** la somme pour les mettre bout à bout : l'addition est commutative.
3. **Remplace**, si besoin, un vecteur par un vecteur égal, lu sur une face ou grâce à un milieu.
4. **Conclus** par un seul vecteur, ou par $\vec{0}$.

Rédaction attendue. « Par commutativité, … ; par la relation de Chasles, … ; donc … »

Exemple : Une somme qui se range

Simplifions $\vec{s} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}$ dans le cube.

Ranger. Par commutativité, $\vec{s} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GC}$.

Enchaîner. Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AG}$, puis $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AC}$.

Conclure. $\vec{s} = \overrightarrow{AC}$.

De même, la règle du parallélogramme donne $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{EG}$, car $EFGH$ est un parallélogramme.

À toi : Une boucle cachée

Dans le cube $ABCDEFGH$, montre que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Rédige en nommant chaque règle. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Aucun vecteur ne s'enchaîne avec $\overrightarrow{AB}$: remplace-le par un vecteur égal mieux placé.
Indice 2
On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ dans la face $ABCD$, puis $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{HG}$ dans la face $DCGH$.
Indice 3
Range ensuite la somme pour former la boucle qui part de H, passe par G et D, puis revient en H.

Réponse
Un vecteur mieux placé. Dans le carré $ABCD$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Dans le carré $DCGH$, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{HG}$. Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HG}$.

Ranger. Par commutativité, la somme vaut $\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DH}$.

Enchaîner. Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{HD}$, puis $\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{HH} = \vec{0}$.

Conclusion. Dans le cube :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}.$$

Produit d'un vecteur par un réel

Allonger un vecteur

Dans le plan, $2\overrightarrow{AB}$ va deux fois plus loin que $\overrightarrow{AB}$, dans la même direction et le même sens.

Dans l'espace, rien ne change : un seul vecteur reste porté par une droite. Multiplier par un réel non nul allonge, raccourcit ou retourne un vecteur ; sa direction, elle, ne change pas.



Sur la droite (AB) : M tel que AM = 2AB, au-delà de B, et N tel que AN = –1/2 AB, de l'autre côté de A.

Devine : Où est le point M ?

Dans le cube $ABCDEFGH$, où se trouve le point M tel que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$?

A. À la distance $2AB$ de A, dans n'importe quelle direction.

Faux.

Faux. Le produit par 2 garde la direction de $\overrightarrow{AB}$: M reste sur la droite (AB).

B. Sur la droite (AB), au-delà de B, avec $AM = 2AB$.

Juste.

C'est juste. Le point B est alors le milieu de $[AM]$.

C. Sur la droite (AB), entre les points A et B.

Faux.

Faux. Entre A et B, on aurait $AM < AB$; ici, le réel 2 double la longueur.

Correction

M est sur la droite (AB), du côté de B, et $AM = 2AB$.

En effet, la relation de Chasles donne $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$, donc $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB}$: on prolonge l'arête $[AB]$ d'une longueur égale, hors du cube.

La définition

Définition : Produit d'un vecteur par un réel

Soit $\vec{u}$ un vecteur et k un réel.

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $k = 0$, on pose $k\vec{u} = \vec{0}$.
- Sinon, on écrit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. Le vecteur $k\vec{u}$ est $\overrightarrow{AC}$, où C est le point de la droite (AB) tel que $AC = |k|\,AB$, situé sur la demi-droite $[AB)$ si $k > 0$ et sur la demi-droite opposée si $k < 0$.

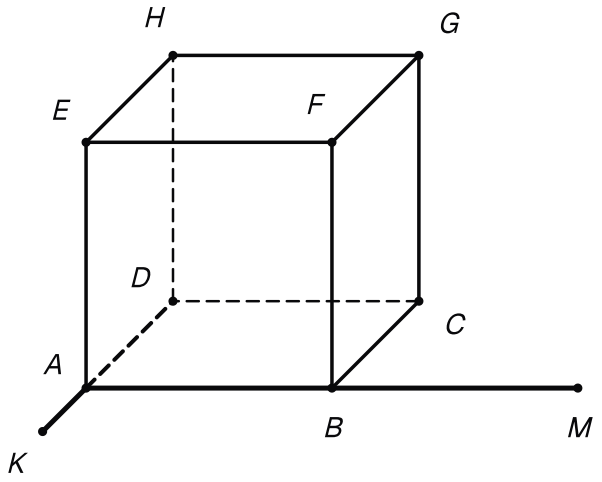
Ainsi, lorsque $k \neq 0$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$, le vecteur $k\vec{u}$ a la direction de $\vec{u}$, le même sens si $k > 0$, le sens contraire si $k < 0$, et $\|k\vec{u}\| = |k|\,\|\vec{u}\|$. Ce vecteur ne dépend pas du point A choisi.

Exemple : Un réel négatif

Soit K le point tel que $\overrightarrow{AK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

Le réel $-\frac{1}{2}$ est négatif : K est sur la droite (AD), du côté opposé à D. De plus, $AK = \frac{1}{2}AD$.

De même, $\|3\overrightarrow{AE}\| = 3AE$: ce vecteur a la direction et le sens de $\overrightarrow{AE}$, avec une norme triple.



Deux points repérés depuis A : M, tel que AM = 2AB, prolonge l'arête [AB] hors du cube ; K, tel que AK = –1/2 AD, est sur (AD), du côté opposé à D.

Règles de calcul

Propriété : Règles de calcul avec le produit par un réel

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et tous réels k et k' :

- $k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$ et $(k+k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$;
- $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$ et $1\vec{u} = \vec{u}$;
- $k\vec{u} = \vec{0}$ si et seulement si $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$.

Démonstration

Idée de la preuve. Ces règles sont celles du calcul vectoriel dans le plan, acquis au tronc commun. Pour $k(\vec{u}+\vec{v})$, on écrit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$: les points A, B et C appartiennent à un même plan, et tous les vecteurs du calcul se représentent par des points de ce plan. Pour les autres règles, un seul vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ intervient : tout se passe sur la droite (AB). Dans ce plan, ou sur cette droite,

on applique la règle du plan. Étapes omises : la vérification que les points construits par F02 et F05 restent dans ce plan, l'accord entre les vecteurs de l'espace et ceux de ce plan, et les règles du plan elles-mêmes, acquises au tronc commun.

Remarque : Ce qui est admis

La preuve de ces règles est une **esquisse**. On se place dans un plan qui contient tous les points en jeu, puis on y applique le calcul vectoriel du tronc commun.

Cette propriété du plan, appliquée dans un plan de l'espace, est **admise**. Est admis aussi que $k\vec{u}$ ne dépend pas du point A choisi pour représenter $\vec{u}$.

L'accord entre les vecteurs de l'espace et ceux de ce plan est admis lui aussi.

Vérifie : Développer

Quelle écriture est égale à $3(\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD})$?

A. $6\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AD}$

Faux.

Faux. Les coefficients sont mélangés : $\overrightarrow{AB}$ est multiplié par 3, et $\overrightarrow{AD}$ par $3 \times (-2)$.

B. $3\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AD}$

Faux.

Faux. Le signe moins a disparu : $3 \times (-2) = -6$.

C. $3\overrightarrow{AB} - 6\overrightarrow{AD}$

Juste.

C'est juste. Le réel 3 multiplie chaque terme, et $3 \times (-2) = -6$.

D. $3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD}$

Faux.

Faux. Le réel 3 multiplie aussi le second terme : $3(-2\overrightarrow{AD}) = -6\overrightarrow{AD}$.

Correction

On applique $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$, puis $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$:

$$\begin{aligned} &3(\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD}) \\ &= 3\overrightarrow{AB} + 3(-2\overrightarrow{AD}) \\ &= 3\overrightarrow{AB} - 6\overrightarrow{AD}. \end{aligned}$$

Exprimer un vecteur

Exemple : Exprimer des vecteurs du cube

Dans le cube, prenons comme **vecteurs de référence** $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$. Par la relation de Chasles, puis les faces carrées :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BH} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} \\ &= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}, \\ \overrightarrow{CE} &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} \\ &= -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}.\end{aligned}$$

Les règles de calcul permettent ensuite de regrouper :

$$\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{CE} = -2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AE}.$$

À toi : Une diagonale à exprimer

Dans le cube $ABCDEFGH$, exprime $\overrightarrow{DF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$. Déduis-en $2\overrightarrow{DF} - \overrightarrow{AG}$, sachant que $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$. Rédige chaque étape. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Va de D à F en longeant des arêtes : par exemple de D à A, puis à B, puis à F.
Indice 2
Remplace chaque arête par un vecteur de référence : $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AE}$.
Indice 3
Pour la seconde partie, distribue le réel 2, puis regroupe les coefficients de chaque vecteur de référence.

Réponse
Expression de $\overrightarrow{DF}$. Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$. Or $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AD}$, et $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AE}$ dans la face $ABFE$. Donc :

$$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}.$$

Calcul de la combinaison. On distribue le réel 2, puis on regroupe les coefficients de chaque vecteur de référence :

$$\begin{aligned}&2\overrightarrow{DF} - \overrightarrow{AG} \\ &= 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AE} \\ &\quad - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE} \\ &= \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}.\end{aligned}$$

Conclusion. $2\overrightarrow{DF} - \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.

Milieu d'un segment

Observer

Devine : Une somme vers le milieu

Soit I le milieu d'un segment $[AB]$ de l'espace, et M un point quelconque. À quoi est égale la somme $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$?

A. $\overrightarrow{MI}$

Faux.

Faux. Chacun des deux vecteurs apporte un $\overrightarrow{MI}$: il y en a deux.

B. $\overrightarrow{AB}$

Faux.

Faux. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}$: c'est une différence, pas une somme.

C. $\vec{0}$

Faux.

Faux. C'est $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}$ qui est nul, pas la somme vue depuis M.

D. $2\overrightarrow{MI}$

Juste.

C'est juste. En passant par I, les écarts de I à A et de I à B se compensent.

Correction
$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$.

On passe par I avec la relation de Chasles, et les vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$ sont opposés. La propriété ci-dessous le démontre.

Le milieu d'un segment ne dépend que des deux extrémités.

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve qui suit n'emploie que la définition de l'égalité, la relation de Chasles et les règles de calcul. Elle fonctionne donc telle quelle dans l'espace.

La propriété et sa preuve

Propriété : Milieu d'un segment

Soit A, B et I trois points de l'espace. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- I est le milieu de $[AB]$;
- $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$;
- $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$;
- $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

De plus, si I est le milieu de $[AB]$, alors pour tout point M de l'espace : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$.

Démonstration

Étape 1. D'après F01, $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ signifie que $[AB]$ et $[II]$ ont le même milieu. Le milieu de $[II]$ est I : l'égalité équivaut donc à « I est le milieu de $[AB]$ ».

Étape 2. On ajoute $\overrightarrow{AI}$ aux deux membres de $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$: par F02 et F03, on obtient $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AI}$. Réciproquement, si $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AI}$, alors $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AI} = \vec{0}$ (F02).

Étape 3. Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}$. Si $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AI}$, alors $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$ par F06, d'où $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Réciproquement, si $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$, et $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AI}$ (F03, F06).

Étape 4. Si I est le milieu de $[AB]$, la relation de Chasles, F03 et F06 donnent $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI} + (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB})$, et la parenthèse est nulle d'après l'étape 2.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour faire apparaître un milieu I, on insère I dans chaque vecteur par la relation de Chasles.

Les vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$ apparaissent alors ensemble, et leur somme est nulle.

Vérifier et appliquer

Vérifie : L'étape 1 de la preuve

Dans la preuve de la propriété du milieu, sur quel résultat repose l'étape 1, qui relie $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ à « I est le milieu de $[AB]$ » ?

A. Sur la règle du parallélogramme.

Faux.

Faux. Aucune somme n'apparaît à l'étape 1 : on y lit seulement la définition de l'égalité.

B. Sur la définition de l'égalité de deux vecteurs.

Juste.

C'est juste. L'égalité $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ dit que $[AB]$ et $[II]$ ont le même milieu, et le milieu de $[II]$ est I.

C. Sur la relation de Chasles, appliquée en I.

Faux.

Faux. La relation de Chasles sert aux étapes 2, 3 et 4, pas à l'étape 1.

Correction

L'étape 1 applique la définition de l'égalité de deux vecteurs.

L'égalité $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ signifie que $[AB]$ et $[II]$ ont le même milieu. Or le milieu de $[II]$ est I lui-même.

L'égalité équivaut donc à « I est le milieu de $[AB]$ ».

Exemple : Une somme nulle dans un tétraèdre

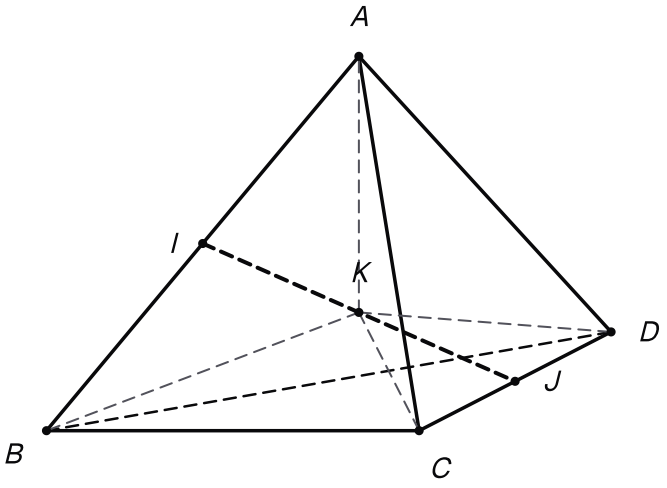
Prends un **tétraèdre** $ABCD$: quatre points non coplanaires. Trace-le : un triangle BCD au sol et un sommet A au-dessus.

Soit I le milieu de $[AB]$, J celui de $[CD]$, et K le milieu de $[IJ]$. Montrons que :

$$\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} = \vec{0}.$$

Regrouper. La propriété du milieu, avec $M = K$, donne $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} = 2\overrightarrow{KI}$ et $\overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} = 2\overrightarrow{KJ}$.

Conclure. La somme vaut $2(\overrightarrow{KI} + \overrightarrow{KJ})$. Or K est le milieu de $[IJ]$, donc $\overrightarrow{KI} + \overrightarrow{KJ} = \vec{0}$. La somme est nulle.



Le tétraèdre de l'exemple : I milieu de [AB], J milieu de [CD], et K milieu de [IJ], d'où partent les quatre vecteurs de la somme nulle.

À toi : Le centre du cube

Dans le cube $ABCDEFGH$, soit O le milieu de $[BH]$. Exprime $\overrightarrow{AO}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$. Déduis-en que O est aussi le milieu de $[AG]$. Rédige. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Applique la propriété du milieu au segment $[BH]$, avec $M = A$.
Indice 2
Tu obtiens $2\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}$. Exprime ensuite $\overrightarrow{AH}$ avec $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
Indice 3

Pour la seconde partie, écris aussi $\overrightarrow{AG}$ avec les vecteurs de référence. Puis utilise l'équivalence entre « milieu » et $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Réponse

Expression de $\overrightarrow{AO}$. O est le milieu de $[BH]$: la propriété du milieu, avec $M = A$, donne $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{AO}$. Par la relation de Chasles, puis la face $ADHE$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}.\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\ + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}.\end{aligned}$$

Comparaison avec $\overrightarrow{AG}$. De même, $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$. Donc $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG}$.

Conclusion. Par la propriété du milieu, O est aussi le milieu de $[AG]$.

Vecteurs colinéaires, droites et alignement

Rappel et prédiction

Petit rappel. Dans le plan, deux vecteurs sont colinéaires quand l'un est un multiple réel de l'autre. Trois points A, B, C sont alignés quand $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Dans l'espace, deux vecteurs tiennent toujours dans un même plan. Ces idées s'étendent donc presque sans changement.

Devine : Deux diagonales du cube

Dans le cube $ABCDEFGH$, les diagonales $[AG]$ et $[BH]$ se coupent en leur milieu commun O. Les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont-ils colinéaires ?

A. Oui, car les diagonales se coupent.

Faux.

Faux. Se couper ne rend pas colinéaire : deux droites sécantes et distinctes ont des directions différentes.

B. Oui, car elles ont la même longueur.

Faux.

Faux. Une même longueur ne dit rien de la direction : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ont la même norme sans être colinéaires.

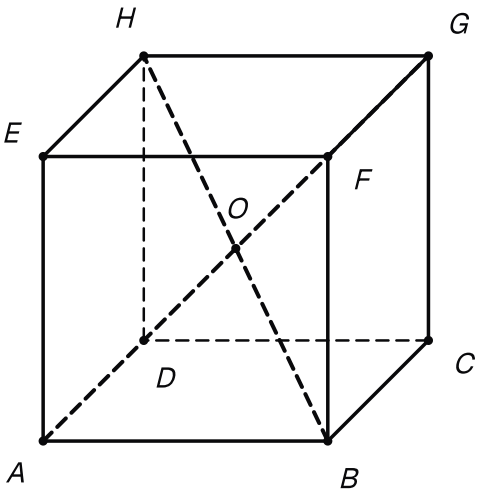
C. Non, ils ne sont pas colinéaires.

Juste.

C'est juste. Deux droites distinctes qui se coupent n'ont pas la même direction.

Correction
Non. S'ils l'étaient, les droites (AG) et (BH) auraient la même direction et le point commun O : elles seraient confondues.

Les points A, B et H seraient alors alignés. Or la droite (AB) est dans le plan de la face $ABCD$, qui ne contient pas H.



Les diagonales [AG] et [BH] du cube, qui traversent le solide et se coupent en leur milieu commun O.

Colinéarité et droites

Définition : Vecteurs colinéaires ; vecteur directeur d'une droite

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$ ou $\vec{u} = k\vec{v}$. Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Un vecteur **non nul** $\vec{u}$ est un **vecteur directeur** d'une droite D s'il existe deux points distincts A et B de D tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires.

Soit A un point et $\vec{u}$ un vecteur non nul. La droite (AB), où B est le point tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, est la **droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$** ; on la note $D(A, \vec{u})$.

Vérifie : Un vecteur directeur

Dans le cube $ABCDEFGH$, lequel de ces vecteurs est un vecteur directeur de la droite (CG) ?

A. $\vec{0}$

Faux.
Faux. Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur, mais un vecteur directeur doit être non nul.

B. $\overrightarrow{AG}$

Faux.
Faux. La diagonale (AG) coupe (CG) en G sans être confondue avec elle : elles n'ont pas la même direction.

C. $-3\overrightarrow{AE}$

Juste.
C'est juste. $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE}$, donc $-3\overrightarrow{AE} = -3\overrightarrow{CG}$: il est non nul et colinéaire à $\overrightarrow{CG}$.

D. $\overrightarrow{AC}$

Faux.
Faux. $\overrightarrow{AC}$ dirige la diagonale (AC) de la face du dessous, qui coupe (CG) en C sans être confondue avec elle.

Correction
Un vecteur directeur de (CG) est un vecteur non nul colinéaire à $\overrightarrow{CG}$.

Les faces $BCGF$ et $ABFE$ sont des carrés, donc $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AE}$. Ainsi $-3\overrightarrow{AE} = -3\overrightarrow{CG}$ convient.

Le vecteur nul est exclu par la définition.

Propriété : Caractérisation vectorielle d'une droite ; alignement

- Soit A, B et C trois points avec $A \neq B$. Les points A, B et C sont **alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
- Soit A un point et $\vec{u}$ un vecteur non nul. Un point M appartient à $D(A, \vec{u})$ si et seulement s'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$.
- Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur d'une droite D et si A est un point de D, alors $D = D(A, \vec{u})$.

Démonstration
Idée de la preuve. Trois points de l'espace appartiennent toujours à un même plan (tronc commun). Dans ce plan, le calcul vectoriel du tronc commun donne : C appartient à (AB) si et seulement si $\overrightarrow{AC}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$. Pour le deuxième point, on pose $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$: d'après le premier point, $M \in (AB)$ équivaut à $\overrightarrow{AM}$ colinéaire à $\vec{u}$, c'est-à-dire, comme $\vec{u} \neq \vec{0}$, à $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$. Le troisième point se ramène à un plan qui contient D et un représentant de $\vec{u}$ d'origine A. Étapes omises : la propriété du plan elle-même, acquise au tronc commun, et l'accord, dans ce plan, entre les vecteurs de F01 à F05 et ceux du tronc commun.

Remarque : Ce qui est admis

La preuve de cet énoncé est une **esquisse**. Trois points de l'espace sont toujours dans un même plan, et l'on y applique la propriété vue au tronc commun.

Cette propriété du plan, appliquée dans un plan de l'espace, est **admise**. L'accord entre les vecteurs de l'espace et ceux de ce plan est admis lui aussi.

Démontrer un alignement

Méthode : Démontrer que trois points sont alignés

1. **Choisis** des vecteurs de référence dans la figure, par exemple $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ dans un cube.
2. **Exprime** deux vecteurs issus de l'un des trois points, avec la relation de Chasles.
3. **Exhibe** le réel k qui relie ces deux vecteurs.
4. **Conclus** : vecteurs colinéaires, donc points alignés.

Rédaction attendue. « $\overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{IK}$ avec $k = \dots$; ces vecteurs sont colinéaires, donc I, J, K sont alignés. »

Exemple : Trois points alignés dans le cube

Soit I le milieu de $[AB]$, J celui de $[GH]$, et O le milieu de $[AG]$. Prenons $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ comme vecteurs de référence.

On sait que $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$, que $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ et que $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AB}$.

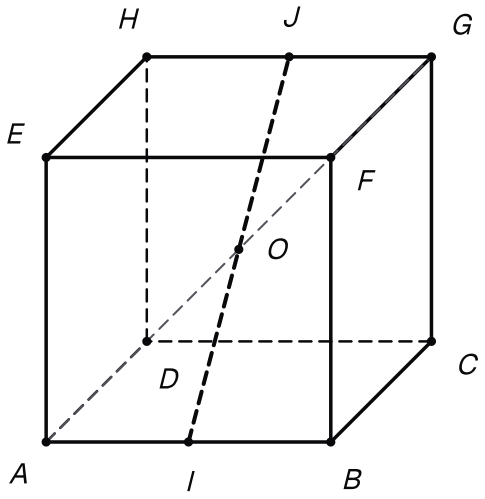
Calcul de $\overrightarrow{IO}$. Par la relation de Chasles, puis la propriété du milieu :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IO} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AO} \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AG} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}.\end{aligned}$$

Calcul de $\overrightarrow{IJ}$. De même :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HJ} \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \\ &\quad + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{IO}$, avec $k = 2$: ces vecteurs sont colinéaires, et I, O, J sont alignés.



Les trois points de l'exemple : I milieu de [AB], O milieu de [AG] et J milieu de [GH], sur une même droite qui traverse le cube.

Un piège, puis à toi

Attention : Le dessin ne prouve rien

✗ « Sur ma figure, (AC) et (BF) se coupent, donc elles sont sécantes. »

✓ « Je démontre, ou je réfute, par le calcul vectoriel. »

Sur la feuille, deux droites dessinées non parallèles se coupent toujours. Dans l'espace, (AC) et (BF) n'ont pourtant aucun point commun : (BF) coupe le plan de la face $ABCD$ en B seulement, et B n'est pas sur (AC).

Un alignement, un parallélisme ou une coplanarité se démontre ; il ne se lit jamais.

À toi : Un point défini par une somme nulle

Dans le cube $ABCDEFGH$, soit K le point tel que $\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{KE}=\vec{0}$. Montre que $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$, puis que A, K et G sont alignés. Rédige. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Fais apparaître A dans chaque vecteur : $\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AB}$, et de même pour les deux autres.
Indice 2
Tu obtiens $3\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\vec{0}$; isole ensuite $\overrightarrow{AK}$.
Indice 3
Dans le cube, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AG}$. Conclus en écrivant le réel k.

Réponse

Faire apparaître A. Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{KD} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{KE} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AE}$.

Additionner. La somme des trois vecteurs est nulle, donc :

$$3\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \vec{0}.$$

Or $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG}$. Donc $\overrightarrow{AG} = -3\overrightarrow{KA} = 3\overrightarrow{AK}$, et $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$.

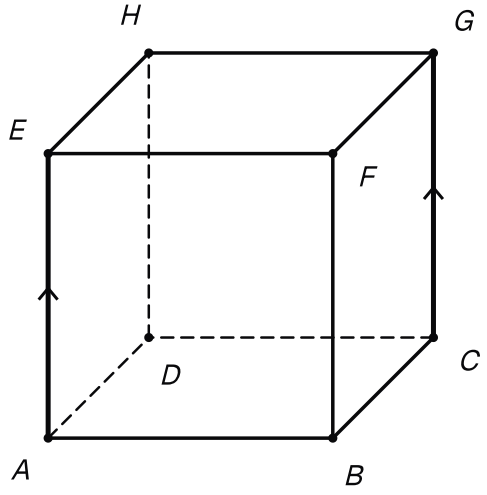
Conclusion. Les vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont colinéaires, avec $k = \frac{1}{3}$: A, K, G sont alignés.

Droites parallèles

Observer

Les arêtes $[AE]$ et $[CG]$ du cube ne se touchent pas et ont la même direction.

Au tronc commun, deux droites de l'espace sont **parallèles** si elles sont dans un même plan sans point commun, ou confondues. Les vecteurs vont permettre de le démontrer par le calcul.



Les arêtes [AE] et [CG] du cube : même direction, aucun point commun, et le chevron qui code leur parallélisme.

Devine : Les centres de deux faces

Dans le cube $ABCDEFGH$, soit P le milieu de $[AC]$ et Q le milieu de $[EG]$. La droite (PQ) est-elle parallèle à (AE) ?

A. On ne peut pas le savoir sans mesurer.

Faux.
Faux. Aucune mesure n'est utile : un calcul vectoriel suffit, comme tu vas le voir.

B. Oui, elle est parallèle à (AE).

Juste.
C'est juste. P et Q sont les centres des faces du dessous et du dessus : on monte de P à Q comme de A à E.

C. Non, car (PQ) n'est sur aucune face.

Faux.
Faux. Deux droites parallèles n'ont pas besoin d'être sur une face du cube ; il leur faut un même plan, ici celui du rectangle $ACGE$.

Correction
Oui. Par la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EQ}.$$

Or $\overrightarrow{PA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{EQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$. Donc $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AE}$: la propriété qui suit permet de conclure.

La propriété

Propriété : Droites parallèles

Soit D et D' deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$. Les droites D et D' sont **parallèles** si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires.

Démonstration
Idée de la preuve. Au tronc commun, deux droites de l'espace sont parallèles si elles sont coplanaires et sans point commun, ou confondues. Si D et D' sont parallèles, elles sont contenues dans un même plan, où la propriété du plan s'applique. Réciproquement, supposons $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ colinéaires et soit B un point de D'. D'après F09, $D' = D(B, \vec{u}')$, qui est aussi $D(B, \vec{u})$. Si $B \in D$, alors $D' = D$. Sinon, D et B déterminent un plan, et $D(B, \vec{u})$ est, dans ce plan, la parallèle à D passant par B. Étapes omises : la propriété du plan et le fait que $D(B, \vec{u})$ soit contenue dans ce plan.

Remarque : Ce qui est admis

La preuve de cet énoncé est une **esquisse**. Deux droites parallèles sont dans un même plan, où la propriété du plan s'applique.

Cette propriété du plan, appliquée dans un plan de l'espace, est **admise**. Est admis aussi qu'une droite construite dans ce plan y reste contenue.

Vérifie : Chercher une parallèle

Dans le cube $ABCDEFGH$, laquelle de ces droites est parallèle à la droite (BG) ?

A. La droite (AH).

Juste.

C'est juste. $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AH}$: les vecteurs directeurs sont égaux, donc colinéaires.

B. La droite (BH).

Faux.

Faux. (BH) et (BG) passent toutes deux par B et sont distinctes : elles sont sécantes.

C. La droite (GD).

Faux.

Faux. (GD) et (BG) ont le point G en commun et sont distinctes : elles sont sécantes.

D. La droite (CF).

Faux.

Faux. (CF) et (BG) sont les diagonales du carré $BCGF$: elles se coupent en son centre.

Correction

Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}$. Or $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ (face $ABCD$) et $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH}$ (face $DCGH$). Donc :

$$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AH}.$$

Les vecteurs directeurs sont colinéaires, avec $k = 1$: (BG) et (AH) sont parallèles.

Démontrer un parallélisme

Méthode : Démontrer que deux droites sont parallèles

1. **Prends** un vecteur directeur de chaque droite, par exemple $\overrightarrow{IJ}$ pour (IJ) et $\overrightarrow{KL}$ pour (KL).
2. **Écris** les deux avec les mêmes vecteurs de référence.
3. **Exhibe** le réel k tel que $\overrightarrow{KL} = k\overrightarrow{IJ}$.
4. **Conclus** : les droites sont parallèles. Si elles ont un point commun, elles sont confondues ; dis-le.

Rédaction attendue. « $\overrightarrow{KL} = k\overrightarrow{IJ}$ avec $k = \ldots$; les vecteurs directeurs sont colinéaires, donc (IJ) et (KL) sont parallèles. »

Exemple : Quatre milieux d'un tétraèdre

Dans un tétraèdre $ABCD$, soit I, J, K, L les milieux de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Par la relation de Chasles, puis la propriété du milieu :

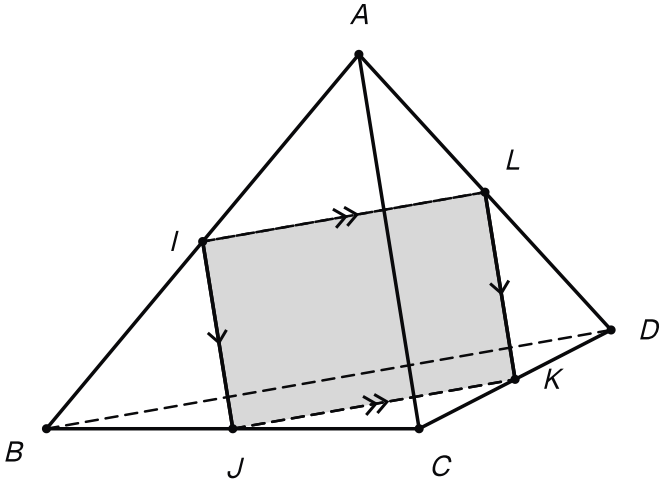
$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{LK} &= \overrightarrow{LD} + \overrightarrow{DK} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{IJ}$, avec $k = 1$: les droites (IJ) et (LK) sont parallèles.

Un parallélogramme. Plus précisément, par la définition de l'égalité, $IJKL$ est un parallélogramme, éventuellement aplati. Il n'est pas aplati : de même, $\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. Or $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ ne sont pas colinéaires, sinon (AC) et (BD) seraient parallèles et A, B, C, D coplanaires.

C'est une figure plane, bien que A, B, C, D ne soient pas dans un même plan.



Les milieux I, J, K, L de [AB], [BC], [CD], [DA] forment un parallélogramme IJKL, plan, dans un tétraèdre qui ne l'est pas.

Un piège, puis à toi

Attention : Non parallèles ne veut pas dire sécantes

X « (AD) et (BF) ne sont pas parallèles, donc elles se coupent. »

✓ « (AD) et (BF) ne sont pas parallèles et n'ont aucun point commun : elles ne sont pas coplanaires. »

Dans l'espace, deux droites non parallèles peuvent ne jamais se rencontrer. Ici, (BF) coupe le plan de la face $ABCD$ en B seulement, et B n'est pas sur (AD).

Avant d'écrire « sécantes », cherche le point commun.

À toi : Dans un parallélépipède

Soit $ABCDEFGH$ un **parallélépipède** : ses six faces sont des parallélogrammes, nommées comme celles du cube. Trace-le comme un cube penché, en gardant les mêmes lettres. Soit I le milieu de $[AE]$ et J celui de $[CG]$. Montre que les droites (IJ) et (AC) sont parallèles. Rédige. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Va de I à J en passant par A et C : $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CJ}$.
Indice 2
Exprime $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{CJ}$ avec $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{CG}$, par la propriété du milieu.
Indice 3
Les faces $BCGF$ et $ABFE$ sont des parallélogrammes : elles donnent $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AE}$.

Réponse
Chemin de I à J. Par la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CJ}.$$

Milieux. Par la propriété du milieu, $\overrightarrow{IA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CG}$.

Faces. Les faces $BCGF$ et $ABFE$ sont des parallélogrammes, donc $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AE}$. Les deux moitiés de $\overrightarrow{AE}$ s'annulent : $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AC}$.

Conclusion. Les vecteurs directeurs sont colinéaires, avec $k = 1$: (IJ) est parallèle à (AC).

Définition vectorielle d'un plan

Observer

Petit rappel. Trois points non alignés déterminent un seul plan. Une droite et un point qui n'est pas sur elle sont toujours dans un même plan.

Devine : Un point repéré depuis A

Dans le cube $ABCDEFGH$, soit M le point tel que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$. Où se trouve M ?

A. Dans le plan de la face $ABCD$, hors du carré.
Juste.

C'est juste. On ne se déplace que suivant $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$: on ne quitte jamais ce plan.

B. Sur la droite (AB), au-delà du point B.

Faux.

Faux. Le terme $-\overrightarrow{AD}$ écarte M de la droite (AB), dans la direction de (AD).

C. Hors du plan de la face $ABCD$.

Faux.

Faux. Aucun des deux vecteurs ne fait monter vers la face $EFGH$.

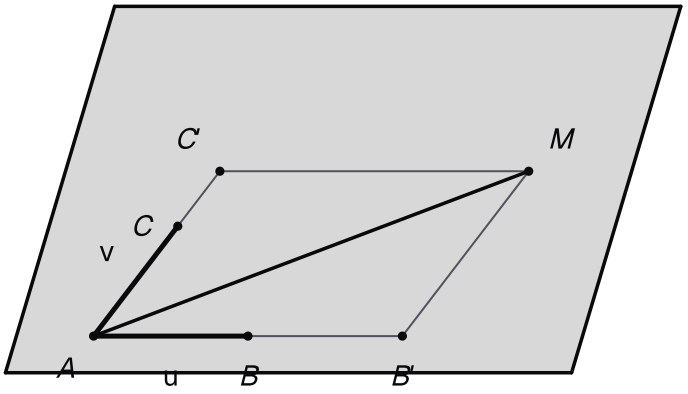
Correction

M est dans le plan (ABD), celui de la face $ABCD$.

On l'atteint depuis A en n'utilisant que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$. Le théorème qui suit dit exactement cela.

Un plan se décrit comme une droite, avec une direction de plus : un point de départ et deux directions distinctes.

Pourquoi est-ce vrai ? Dans un sens, c'est la décomposition du tronc commun. Dans l'autre, on construit M à partir de points de droites déjà contenues dans le plan.



Un plan passant par A, dirigé par u = AB et v = AC : le point M, atteint par deux fois u puis une fois et demie v, ferme le parallélogramme AB'MC'.

Le théorème

Théorème : Caractérisation vectorielle d'un plan

Soit A, B et C trois points non alignés. Un point M appartient au plan (ABC) si et seulement s'il existe deux réels x et y tels que

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}.$$

Avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, on dit que le plan (ABC) passe par A et qu'il est **dirigé** par le couple $(\vec{u}, \vec{v})$ de vecteurs non colinéaires ; on le note $P(A, \vec{u}, \vec{v})$.

Démonstration

Étape 1. Les points A, B, C ne sont pas alignés, donc $A \neq B$ et $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires (F09).

Étape 2. Si $M \in (ABC)$, le calcul vectoriel du plan (ABC) (tronc commun) donne x et y tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ (vecteurs de F01 à F05, accord admis).

Étape 3. Réciproquement, supposons cette égalité, et soit B' et C' tels que $\overrightarrow{AB'} = x\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'} = y\overrightarrow{AC}$. D'après F09, $B' \in (AB)$ et $C' \in (AC)$, droites contenues dans (ABC) (tronc commun : une droite qui a deux points dans un plan y est contenue).

Étape 4. Comme $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AM}$, F04 dit que $[AM]$ et $[B'C']$ ont le même milieu J. Si $B' = C'$, alors $J = B'$; sinon $J \in (B'C')$, contenue dans (ABC). Enfin, $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AJ}$ (F07) : $M = A$ si $J = A$, et sinon $M \in (AJ)$ (F09), droite contenue dans (ABC).

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour montrer qu'un point est dans un plan, on le relie à des droites contenues dans ce plan. Ici, la règle du parallélogramme et le milieu fabriquent ces droites.

À l'usage, retiens la conclusion : $M \in (ABC)$ dès que tu exhibes x et y.

Vérifier et appliquer

Vérifie : Le parallélogramme dans la preuve

Dans la preuve du théorème, à l'étape 4, à quoi sert la règle du parallélogramme ?

A. À montrer que A, B, C ne sont pas alignés.
Faux.
Faux. C'est une hypothèse du théorème ; l'étape 1 la traduit par une non-colinéarité.

B. À montrer que $[AM]$ et $[B'C']$ ont le même milieu.
Juste.
C'est juste. L'égalité $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AM}$ fait de $AB'MC'$ un parallélogramme, éventuellement aplati.

C. À décomposer $\overrightarrow{AM}$ suivant $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
Faux.

Faux. Dans la réciproque, cette décomposition est l'hypothèse ; dans le sens direct, elle vient du tronc commun.

Correction
À l'étape 4, on sait que $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AM}$.

La règle du parallélogramme dit alors que $AB'MC'$ est un parallélogramme, éventuellement aplati. Donc $[AM]$ et $[B'C']$ ont le même milieu J.

La suite de l'étape place J, puis M, dans le plan.

Exemple : Un sommet dans un plan diagonal

Le sommet G est-il dans le plan (ABH) ?

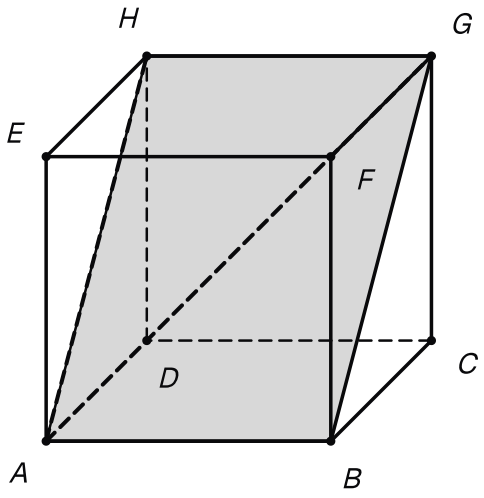
Trois points non alignés. La droite (AB) est dans le plan de la face $ABCD$, qui ne contient pas H : A, B, H ne sont pas alignés.

Décomposition. Par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}\\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH}\\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}.\end{aligned}$$

Conclusion. Donc $\overrightarrow{AG} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AH}$ avec $x = 1$ et $y = 1$. Par la caractérisation vectorielle d'un plan, $G \in (ABH)$.



Le plan (ABH) coupe le cube selon le rectangle ABGH : le sommet G est dans ce plan, comme le calcul l'établit.

Une hypothèse nécessaire

Exemple : Contre-exemple : trois points alignés

Soit I le milieu de $[AB]$. Les points A, B, I sont alignés, et $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Les points M tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AI}$ vérifient :

$$\overrightarrow{AM} = \left(x + \frac{y}{2}\right)\overrightarrow{AB}.$$

Ils décrivent seulement la droite (AB), pas un plan. D'ailleurs, une infinité de plans contiennent A, B et I.

L'hypothèse « non alignés » est donc indispensable.

À toi : Un point de la face opposée

Dans un tétraèdre $ABCD$, soit M le point tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$. Montre que M appartient au plan (BCD). Rédige. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Le plan (BCD) passe par B : cherche x et y tels que $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BC} + y\overrightarrow{BD}$.
Indice 2
Écris $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}$, puis $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$.
Indice 3
Justifie aussi que B, C, D ne sont pas alignés : sinon, le théorème ne s'applique pas.

Réponse
Trois points non alignés. Les points B, C, D ne sont pas alignés : sinon, A, B, C, D seraient dans un même plan, ce qui est exclu pour un tétraèdre.

Décomposition. Par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BM} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} \\ &= -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} \\ &= (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\ &\quad + (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}.\end{aligned}$$

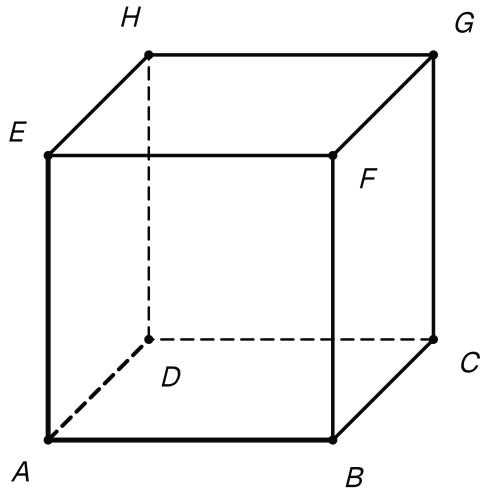
Conclusion. Donc $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BC} + y\overrightarrow{BD}$ avec $x = y = 1$. Par la caractérisation vectorielle d'un plan, $M \in (BCD)$.

Vecteurs coplanaires

Observer

Deux vecteurs tiennent toujours dans un même plan. Avec trois vecteurs, ce n'est plus vrai : les arêtes $[AB]$, $[AD]$ et $[AE]$ du cube partent dans trois directions qu'aucun plan ne contient.

Pour comparer trois vecteurs, on les fait partir d'un même point.



Trois arêtes issues de A, [AB], [AD] et [AE] : trois directions qu'aucun plan ne contient à la fois.

Devine : Trois vecteurs du cube

Dans le cube $ABCDEFGH$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont-ils coplanaires ?

A. Non, car $[EG]$ n'est pas sur la face $ABCD$.

Faux.

Faux. La coplanarité porte sur des représentants issus d'un même point, pas sur les segments dessinés.

B. Non, trois vecteurs ne sont jamais coplanaires.

Faux.

Faux. Trois vecteurs peuvent l'être ou non : c'est tout l'objet de cette section.

C. Oui, ces trois vecteurs sont coplanaires.

Juste.

C'est juste. $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$, et les points A, B, D, C sont sur la face du dessous.

Correction

Oui. On représente les trois vecteurs à partir de A : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, et $\overrightarrow{AC}$. En effet, $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

> Les points A, B, D, C sont dans le plan de la face $ABCD$. Les trois vecteurs sont donc coplanaires.

La définition

Définition : Vecteurs coplanaires ; points coplanaires

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** si, pour un point O et les points A, B et C tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$, les quatre points O, A, B et C appartiennent à un même plan. Cette propriété ne dépend pas du point O choisi.

Des points sont **coplanaires** s'ils appartiennent à un même plan.

Remarque : Ce qui est admis

Que cette propriété ne dépende pas du point O choisi est **admis**. C'est un prolongement des acquis du plan, qu'on ne démontre pas cette année.

En pratique, choisis le point le plus commode, par exemple un sommet de la figure.

Exemple : Trois arêtes non coplanaires

Avec $O = A$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont représentés par B, D et E.

Les points A, B, D ne sont pas alignés. Le seul plan qui les contient est donc celui de la face $ABCD$. Or E, sommet de la face du dessus, n'est pas dans ce plan.

Les quatre points ne sont pas coplanaires : ces trois vecteurs **ne sont pas coplanaires**. Ce fait servira dans toute la suite.

Le critère

Quand deux des vecteurs ne sont pas colinéaires, le troisième se décompose-t-il suivant eux ?

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve ramène les trois vecteurs à quatre points. Elle applique ensuite la caractérisation vectorielle d'un plan.

Théorème : Critère de coplanarité

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs **non colinéaires** et $\vec{w}$ un vecteur. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe deux réels x et y tels que

$$\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}.$$

Démonstration

Étape 1. Soit O un point, et A, B, C les points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$ (F01). Comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, $\vec{u} \neq \vec{0}$, donc $O \neq A$, et O, A, B ne sont pas alignés (F09). Par trois points non alignés passe un unique plan, (OAB) (tronc commun).

Étape 2. D'après F12, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si O, A, B, C appartiennent à un même plan. Ce plan ne peut être que (OAB) : la condition équivaut à $C \in (OAB)$.

Étape 3. D'après F11, $C \in (OAB)$ si et seulement s'il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{OC} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$, c'est-à-dire $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Vecteurs coplanaires, points coplanaires, point d'un plan : trois façons de dire la même chose.

Le critère passe de l'une à l'autre en choisissant un point O. Les réels x et y sont ceux de la caractérisation d'un plan.

Vérifier et appliquer

Vérifie : Une hypothèse du critère

Dans la preuve du critère de coplanarité, à quoi sert l'hypothèse « $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires » ?

A. Elle garantit que O, A, B déterminent un unique plan.

Juste.

C'est juste. L'étape 1 en déduit que O, A, B ne sont pas alignés.

B. Elle garantit que le vecteur $\vec{w}$ n'est pas le vecteur nul.

Faux.

Faux. Le vecteur $\vec{w}$ peut être nul : il est alors coplanaire avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$, avec $x = y = 0$.

C. Elle garantit que les réels x et y sont tous deux non nuls.

Faux.

Faux. Les réels x et y peuvent être nuls : si $\vec{w} = \vec{u}$, alors $x = 1$ et $y = 0$.

Correction

À l'étape 1 : comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, O, A, B ne sont pas alignés. Par trois points non alignés passe un unique plan, (OAB).

C'est ce plan unique qui permet, à l'étape 2, de dire que C doit lui appartenir.

Méthode : Démontrer que trois vecteurs sont coplanaires

1. **Choisis** deux des trois vecteurs, $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et justifie qu'ils ne sont pas colinéaires.

2. **Exprime** le troisième, $\vec{w}$, avec la relation de Chasles et les règles de calcul.
3. **Exhibe** x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.
4. **Conclus** par le critère de coplanarité.

Autre voie. Trouve trois réels a, b, c, dont un au moins n'est pas nul, qui annulent la somme $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$.

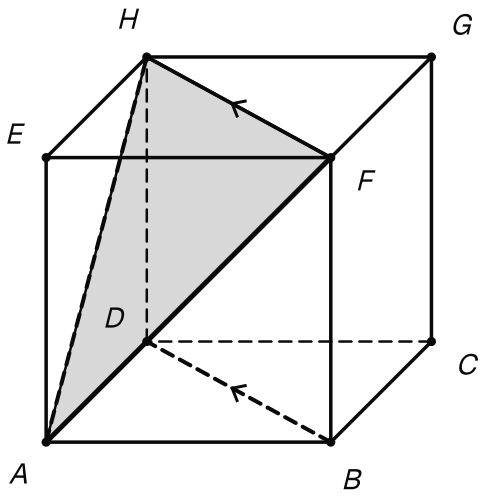
Exemple **: Trois diagonales de faces**

Montrons que $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont coplanaires.

Non-colinéarité. A, F, H ne sont pas alignés : la droite (AF) est dans le plan de la face $ABFE$, qui ne contient pas H.

Décomposition. Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$. Donc $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AF}$.

Conclusion. Avec $x = -1$ et $y = 1$, $\overrightarrow{BD} = x\overrightarrow{AF} + y\overrightarrow{AH}$: par le critère de coplanarité, les trois vecteurs sont coplanaires.



Le triangle AFH, teinté, contient AF et AH ; la diagonale [BD], parallèle à [FH], donne un troisième vecteur de la même direction de plan.

Un piège, puis à toi

Attention **: Vérifier d'abord la non-colinéarité**

X « $\overrightarrow{AE}$ ne s'écrit pas $x\overrightarrow{AB} + y(-3\overrightarrow{AB})$, donc $\overrightarrow{AB}$, $-3\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires. »

✓ « $\overrightarrow{AB}$ et $-3\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires : le critère ne s'applique pas. »

Avec $O = A$, ces trois vecteurs sont représentés par des points du plan (ABE) : ils sont coplanaires.

Le critère n'est valable que si les deux premiers vecteurs ne sont pas colinéaires.

À toi : Milieux de deux arêtes opposées

Dans un tétraèdre $ABCD$, soit I le milieu de $[AD]$ et J celui de $[BC]$. Montre que $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont coplanaires. Rédige. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Écris $\overrightarrow{IJ}$ de deux façons : en passant par A et B, puis par D et C.
Indice 2
Additionne les deux écritures : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{ID}$ et $\overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{CJ}$ sont nuls, par la propriété du milieu.
Indice 3
Pour le critère, justifie que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ne sont pas colinéaires : sinon, les droites (AB) et (DC) seraient parallèles.

Réponse
Deux chemins. Par la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ},$$
$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CJ}.$$

Additionner. Par la propriété du milieu, $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{CJ} = \vec{0}$. En additionnant, $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$, donc :

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}.$$

Non-colinéarité. Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ étaient colinéaires, (AB) et (DC) seraient parallèles, donc A, B, C, D seraient coplanaires : c'est exclu.

Conclusion. Par le critère de coplanarité, avec $x = y = \frac{1}{2}$, les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont coplanaires.

Relation linéaire et points coplanaires

Observer

Devine : Le sommet et trois milieux

Dans un tétraèdre $ABCD$, soit I, J, K les milieux de $[BC]$, $[CD]$ et $[DB]$. Les points A, I, J, K sont-ils coplanaires ?

A. Oui, quatre points sont toujours coplanaires.

Faux.

Faux. Les quatre sommets d'un tétraèdre ne le sont pas, par définition.

B. Non, ces quatre points ne sont pas coplanaires.

Juste.

C'est juste. I, J, K sont dans la face BCD, alors que A n'y est pas.

C. Oui, car I, J, K sont sur une même face.

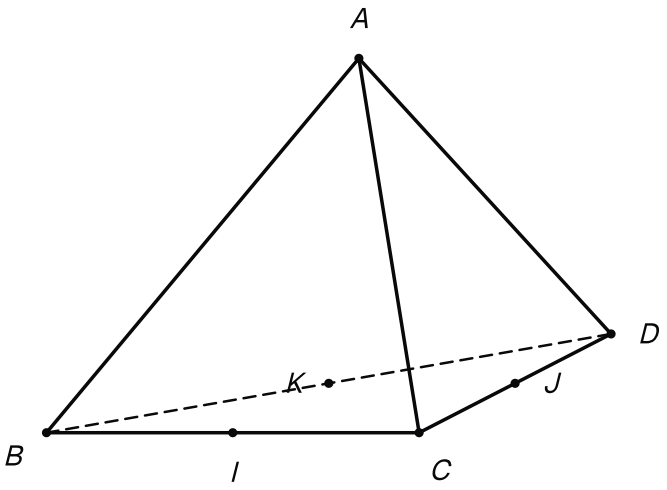
Faux.

Faux. Le plan de cette face est le seul qui contient I, J, K, et il ne contient pas A.

Correction

Non. Les points I, J, K ne sont pas alignés et sont dans le plan (BCD) : c'est le seul plan qui les contient. Or A n'appartient pas à (BCD).

Plus bas, tu le démontreras aussi par le calcul vectoriel.



Les données de la question : I, J et K, milieux de [BC], [CD] et [DB], sur la face du sol, et le sommet A au-dessus.

Trois vecteurs coplanaires sont liés : l'un s'obtient à partir des deux autres. Écrire ce lien comme une somme nulle évite de choisir lequel isoler.

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve sépare deux cas, selon que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ou non. Elle s'appuie ensuite sur le critère de coplanarité.

Les énoncés

Propriété : Coplanarité et relation linéaire

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe trois réels a, b et c, **non tous nuls**, tels que

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}.$$

Autrement dit, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont **pas** coplanaires si et seulement si, pour tous réels a, b et c, l'égalité $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ entraîne $a = b = c = 0$.

En particulier (**identification des coefficients**), si $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires et si $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = x'\vec{u} + y'\vec{v} + z'\vec{w}$, alors $x = x'$, $y = y'$ et $z = z'$.

Démonstration

Étape 1 : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires. Si $\vec{v} = k\vec{u}$, alors $k\vec{u} - \vec{v} + 0\vec{w} = \vec{0}$; si $\vec{u} = k\vec{v}$, alors $\vec{u} - k\vec{v} + 0\vec{w} = \vec{0}$. Avec les points de F12, O, A, B sont alignés (F09, ou $O = A$) : avec C, ils sont dans un même plan (tronc commun). Les deux membres sont vrais.

Étape 2 : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires. S'ils sont coplanaires, F13 donne $x\vec{u} + y\vec{v} - \vec{w} = \vec{0}$, avec $c = -1$. Réciproquement, si $c = 0$, alors $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$ avec a ou b non nul : $\vec{u} = -\dfrac{b}{a}\vec{v}$, ou $\vec{v} = \vec{0}$ si $a = 0$, ce qui contredit la non-colinéarité. Donc $c \neq 0$ et $\vec{w} = -\dfrac{a}{c}\vec{u} - \dfrac{b}{c}\vec{v}$: coplanaires par F13.

Étape 3. La deuxième phrase est la négation des deux membres de la première. Pour la dernière, la différence des deux écritures donne $(x - x')\vec{u} + (y - y')\vec{v} + (z - z')\vec{w} = \vec{0}$ (F03, F06) : ses coefficients sont nuls.

Reste à passer des vecteurs aux points.

Pourquoi est-ce vrai ? Il suffit de prendre l'un des quatre points comme origine dans la définition de vecteurs coplanaires.

Propriété : Points coplanaires

Quatre points A, B, C et D sont coplanaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

Si, de plus, A, B et C ne sont pas alignés, cela équivaut à l'existence de deux réels x et y tels que $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

Démonstration

Étape 1. On applique F12 avec $O = A$. Les points associés à $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont alors B, C et D eux-mêmes. Donc ces trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si A, B, C et D appartiennent à un même plan.

Étape 2. Si A, B et C ne sont pas alignés, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires (F09). Le critère de coplanarité (F13), appliqué à $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$, donne l'équivalence annoncée.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Une somme nulle $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ dont un coefficient n'est pas nul permet d'isoler le vecteur de ce coefficient.

Inversement, si trois vecteurs ne sont pas coplanaires, une somme nulle a tous ses coefficients nuls.

On en tire l'**identification des coefficients** de deux écritures d'un même vecteur suivant trois vecteurs non coplanaires. L'idée : la différence des deux écritures est une somme nulle, donc tous ses coefficients sont nuls. C'est la dernière phrase de la relation linéaire.

Vérifie : Un cas de la preuve

Dans la preuve de la relation linéaire, à l'étape 2, pourquoi le coefficient c ne peut-il pas être nul ?

A. Sinon, le vecteur $\vec{w}$ serait nul.

Faux.

Faux. Avec $c = 0$, le vecteur $\vec{w}$ disparaît de la relation : on n'apprend rien sur lui.

B. Sinon, les trois coefficients seraient nuls.

Faux.

Faux. Avec $c = 0$, l'un des réels a ou b reste non nul, puisque les trois ne sont pas tous nuls.

C. Sinon, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ seraient colinéaires.

Juste.

C'est juste. Avec $c = 0$, il reste $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$, avec a ou b non nul.

Correction

Si $c = 0$, la relation devient $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$, avec a ou b non nul.

- Si $a \neq 0$, alors $\vec{u} = -\dfrac{b}{a}\vec{v}$.
- Si $a = 0$, alors $b \neq 0$ et $\vec{v} = \vec{0}$.

Dans les deux cas, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, ce que l'étape 2 exclut. Donc $c \neq 0$.

Quatre points coplanaires

Méthode : Démontrer que quatre points sont coplanaires

1. **Prends** l'un des points comme origine, par exemple I, et forme les trois vecteurs qui en partent.
2. **Justifie** que I et deux des autres points ne sont pas alignés.
3. **Exhibe** x et y qui écrivent le troisième vecteur avec les deux premiers.

4. **Conclus** : les trois vecteurs sont coplanaires, donc les quatre points aussi.

Exemple : Quatre milieux coplanaires dans le cube

Soit I, J, K, L les milieux de $[AB]$, $[BC]$, $[GH]$ et $[HE]$. Par la relation de Chasles, puis la propriété du milieu :

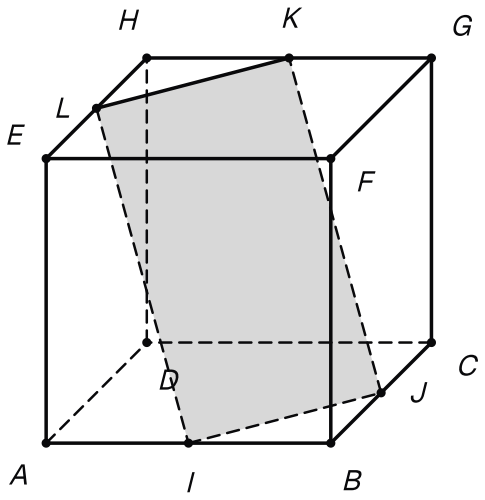
$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IK} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HK} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IL} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EL} \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}.\end{aligned}$$

Non-alignement. Comme $\overrightarrow{IJ} \neq \vec{0}$, une colinéarité s'écrirait $\overrightarrow{IK} = k\overrightarrow{IJ}$. Les coefficients de $\overrightarrow{AE}$ donneraient $1 = 0$, car $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires.

Coplanarité. $\overrightarrow{IL} = -\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IK}$, avec $x = -1$ et $y = 1$. Donc I, J, K, L sont coplanaires.



Les milieux I, J, K, L de [AB], [BC], [GH], [HE] et le quadrilatère IJKL, teinté, qui coupe le cube en biais.

Démontrer une non-coplanarité

Méthode : Démontrer que trois vecteurs ne sont pas coplanaires

1. **Pars** de trois réels quelconques a, b, c tels que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$.

2. **Récris** cette somme avec trois vecteurs de référence que tu sais non coplanaires.
3. **Identifie** : chaque coefficient obtenu est nul. Tu obtiens un système en a, b, c.
4. **Résous-le**, et conclus que $a = b = c = 0$.

Rédaction attendue. « Soit a, b, c des réels tels que … ; comme … ne sont pas coplanaires, … ; donc $a = b = c = 0$. »

Exemple : Le sommet et trois milieux, par le calcul

Reprenons le tétraèdre $ABCD$ et les milieux I, J, K de $[BC]$, $[CD]$, $[DB]$.

Vecteurs de référence. Comme A, B, C, D ne sont pas coplanaires, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ ne le sont pas. Par la propriété du milieu :

$$2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC},$$
$$2\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD},$$
$$2\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}.$$

Relation nulle. Soit a, b, c des réels tels que $a\overrightarrow{AI} + b\overrightarrow{AJ} + c\overrightarrow{AK} = \vec{0}$. En multipliant par 2 et en regroupant :

$$(a+c)\overrightarrow{AB} + (a+b)\overrightarrow{AC} + (b+c)\overrightarrow{AD} = \vec{0}.$$

Identification. Comme $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires, chaque coefficient est nul : $a + c = 0$, $a + b = 0$ et $b + c = 0$. Les deux premières égalités donnent $b = c = -a$, puis la troisième $-2a = 0$.

Conclusion. Donc $a = b = c = 0$: A, I, J, K ne sont pas coplanaires.

Un piège, puis à toi

Attention : Non tous nuls, ou tous nuls ?

✗ « Dans $2\vec{u} - \vec{v} + 0\vec{w} = \vec{0}$, le coefficient de $\vec{w}$ est nul, donc la relation ne prouve rien. »

✓ « Les coefficients $2, -1, 0$ ne sont pas tous nuls : $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires. »

Pour prouver la coplanarité, **un** coefficient non nul suffit.

À l'inverse, pour prouver la non-coplanarité, il faut obtenir que les **trois** coefficients sont nuls, à partir d'une relation quelconque.

À toi : Les diagonales d'un parallélépipède

Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède : ses sommets A, B, D, E ne sont pas coplanaires. Montre que $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{CE}$ ne sont pas coplanaires. Rédige. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Exprime d'abord chaque vecteur avec $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, comme dans le cube : les faces sont des parallélogrammes.

Indice 2

Tu dois trouver $\overrightarrow{BH} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$. Pars ensuite de $a\overrightarrow{AG} + b\overrightarrow{BH} + c\overrightarrow{CE} = \vec{0}$.

Indice 3

Le système obtenu se résout en soustrayant les équations deux à deux.

Réponse

Vecteurs de référence. Comme A, B, D, E ne sont pas coplanaires, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ ne le sont pas. Les faces sont des parallélogrammes, donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AE}$.

Décompositions. Par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}\\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{BH}\\ &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH}\\ &= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{CE}\\ &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}\\ &= -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}.\end{aligned}$$

Relation nulle. Soit a, b, c des réels tels que $a\overrightarrow{AG} + b\overrightarrow{BH} + c\overrightarrow{CE} = \vec{0}$. En regroupant :

$$\begin{aligned}&(a - b - c)\overrightarrow{AB}\\ &\quad + (a + b - c)\overrightarrow{AD}\\ &\quad + (a + b + c)\overrightarrow{AE} = \vec{0}.\end{aligned}$$

Identification. Comme $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires, chaque coefficient est nul : $a - b - c = 0$, $a + b - c = 0$ et $a + b + c = 0$. La différence des deux premières égalités donne $2b = 0$, celle des deux dernières $2c = 0$. Donc $b = c = 0$, puis $a = 0$.

Conclusion. Les vecteurs $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{CE}$ ne sont pas coplanaires.

Droite parallèle à un plan, plans parallèles

Observer

Devine : Une diagonale du dessus

Dans le cube $ABCDEFGH$, la droite (FH) est-elle parallèle au plan (ABD) de la face du dessous ?

A. Oui, elle est parallèle à ce plan.

Juste.
C'est juste. $\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{BD}$, et la droite (BD) est contenue dans le plan (ABD).

B. Non, car elle n'est pas contenue dans ce plan.

Faux.
Faux. Une droite parallèle à un plan n'est pas forcément contenue dans ce plan ; elle peut lui être extérieure.

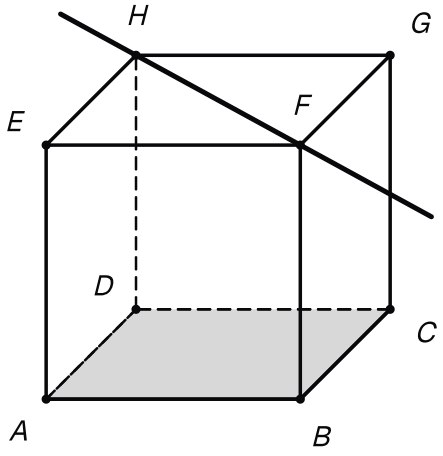
C. Non, car elle n'est parallèle à aucune arête de $ABCD$.

Faux.
Faux. Il suffit qu'elle soit parallèle à une droite du plan, pas forcément à une arête : ici, la diagonale (BD).

Correction
Oui. Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DH}$.

Or $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{BF}$, donc $\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{DH} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{BD}$.

La droite (FH) est parallèle à la droite (BD) du plan (ABD), donc à ce plan.



Les données de la question : la diagonale (FH) de la face du dessus et le plan (ABD) de la face du dessous, teinté.

Une droite est parallèle à un plan quand sa direction « tient » dans ce plan. En vecteurs : son vecteur directeur s'écrit avec deux vecteurs qui dirigent le plan.

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve traduit en vecteurs le critère du tronc commun : être parallèle à l'une des droites du plan.

Les énoncés

Propriété : Droite parallèle à un plan

Soit $P = P(A, \vec{u}, \vec{v})$ un plan et D une droite de vecteur directeur $\vec{w}$. La droite D est parallèle au plan P si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, c'est-à-dire s'il existe deux réels x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

Démonstration

On emploie le résultat du tronc commun : une droite est parallèle à un plan si et seulement si elle est parallèle à une droite de ce plan.

Étape 1. Supposons $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ coplanaires : F13 donne $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$. Soit $\Delta = D(A, \vec{w})$ et $M \in \Delta$. Par F09, $\overrightarrow{AM} = t\vec{w} = (tx)\vec{u} + (ty)\vec{v}$ (F06), donc $M \in P$ (F11) : Δ est contenue dans P. Elle est parallèle à D (F10) : D est parallèle à P.

Étape 2. Réciproquement, soit Δ une droite de P parallèle à D, et B, C deux points distincts de Δ. Par F11, $\overrightarrow{AB} = x\vec{u} + y\vec{v}$ et $\overrightarrow{AC} = x'\vec{u} + y'\vec{v}$. Donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = (x' - x)\vec{u} + (y' - y)\vec{v}$ (F03, F06). Par F10, $\vec{w} = k\overrightarrow{BC}$ pour un réel k, car ces deux vecteurs sont non nuls et colinéaires. On conclut par F13.

Pour deux plans, on applique cette propriété à deux droites sécantes du second plan.

Pourquoi est-ce vrai ? Le tronc commun dit que deux plans sont parallèles dès que l'un contient deux droites sécantes parallèles à l'autre.

Propriété : Plans parallèles

Soit $P = P(A, \vec{u}, \vec{v})$ et $P' = P(A', \vec{u}', \vec{v}')$ deux plans. Les plans P et P' sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}'$ sont coplanaires et les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{v}'$ sont coplanaires.

Démonstration

On emploie deux résultats du tronc commun : deux plans sont parallèles si et seulement si l'un contient deux droites sécantes parallèles à l'autre ; si deux plans sont parallèles, toute droite de l'un est parallèle à l'autre.

Étape 1. Les droites $D(A', \vec{u}')$ et $D(A', \vec{v}')$ sont contenues dans P' (F09, F11). Elles passent par A' et ne sont pas parallèles, car $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ ne sont pas colinéaires (F10) : elles sont sécantes en A'.

Étape 2. Si les deux triplets sont coplanaires, ces deux droites sont parallèles à P (F16). Le plan P' contient donc deux droites sécantes parallèles à P : P et P' sont parallèles.

Étape 3. Réciproquement, si P et P' sont parallèles, ces deux droites de P' sont parallèles à P, et F16 donne les deux coplanarités.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Tout parallélisme avec un plan se ramène à une coplanarité de vecteurs.

Le vecteur directeur de la droite s'écrit avec les deux vecteurs qui dirigent le plan. Pour un second plan, chacun de ses deux vecteurs s'écrit de même.

Vérifie : Le résultat appliqué à chaque droite

Dans la preuve sur les plans parallèles, quel résultat l'étape 2 applique-t-elle à chacune des deux droites ?

A. La règle du parallélogramme, deux fois.

Faux.

Faux. Aucune somme de vecteurs n'est traduite par un parallélogramme dans cette preuve.

B. Le résultat sur une droite parallèle à un plan.

Juste.

C'est juste. Chacune des droites $D(A', \vec{u}')$ et $D(A', \vec{v}')$ est parallèle à P grâce à elle.

C. La caractérisation vectorielle d'une droite.

Faux.

Faux. Elle sert à l'étape 1, pour placer les deux droites dans P', pas à l'étape 2.

Correction

L'étape 2 suppose les deux triplets coplanaires. Le résultat sur une droite parallèle à un plan, appliqué deux fois, donne : $D(A', \vec{u}')$ est parallèle à P, et $D(A', \vec{v}')$ aussi.

Ces deux droites sont sécantes en A' et contenues dans P'. Le critère du tronc commun conclut.

Appliquer

Méthode : Démontrer un parallélisme avec un plan

1. **Nomme** un couple $(\vec{u}, \vec{v})$ de vecteurs non colinéaires qui dirige le plan.
2. **Pour une droite** : exprime son vecteur directeur $\vec{w}$ avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
3. **Pour un second plan** : exprime de même chacun des deux vecteurs qui le dirigent.
4. **Conclus** par la coplanarité obtenue : droite parallèle au plan, ou plans parallèles.

Exemple : Deux plans parallèles dans le cube

Montrons que les plans (BDE) et (CFH) sont parallèles.

Directions de (BDE). B, D, E ne sont pas alignés : E n'est pas dans le plan de la face $ABCD$, qui contient (BD). Donc $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$ dirigent (BDE).

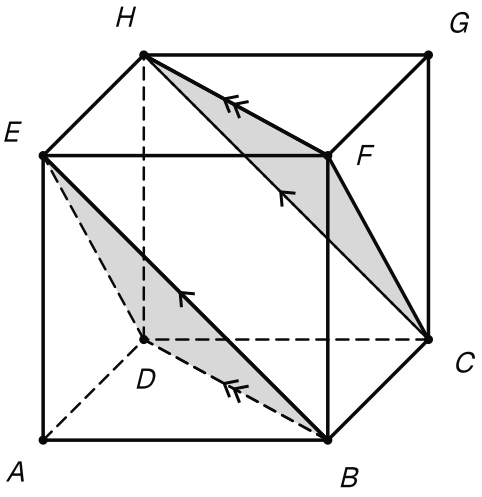
Directions de (CFH). De même, C, F, H ne sont pas alignés : H n'est pas dans le plan de la face $BCGF$, qui contient (CF). Donc $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{CH}$ dirigent (CFH).

Calcul. On a $\overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CH} &= \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DH} \\ &= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BE},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CF} &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BF} \\ &= -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \\ &= \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BD}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{CF} = -\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{CH} = 0\overrightarrow{BD} + 1\overrightarrow{BE}$. Par la propriété des plans parallèles, les plans (BDE) et (CFH) sont parallèles.



Les triangles BDE et CFH, teintés, représentent deux plans parallèles qui découpent le cube en biais.

À toi, puis le coin devoir

À toi : Un plan de milieux

Dans un tétraèdre $ABCD$, soit I, J, K les milieux de $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$. Montre que les plans (IJK) et (BCD) sont parallèles. Rédige. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Le plan (BCD) est dirigé par $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$, qui ne sont pas colinéaires : justifie-le.

Indice 2

Calcule $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ}$ avec la propriété du milieu ; fais de même pour $\overrightarrow{IK}$.

Indice 3

Vérifie aussi que $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ ne sont pas colinéaires, pour que (IJK) soit bien un plan.

Réponse

Directions de (BCD). Les points B, C, D ne sont pas alignés, car $ABCD$ est un tétraèdre : $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ dirigent (BCD).

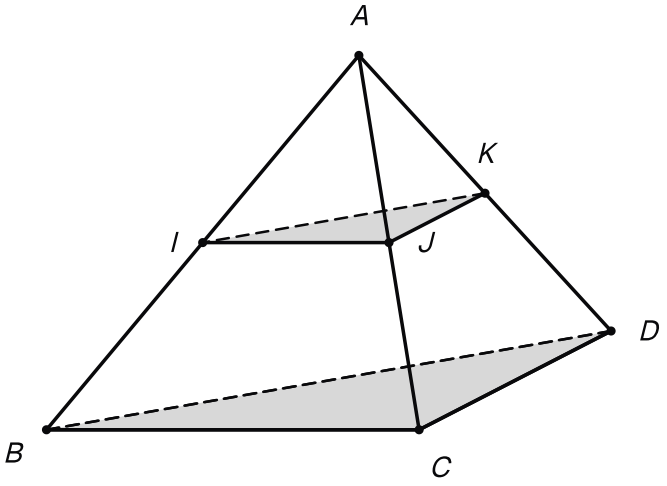
Directions de (IJK). Avec la relation de Chasles et les milieux :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.\end{aligned}$$

De même, $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. Comme $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ ne sont pas colinéaires, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ ne le sont pas non plus : ils dirigent (IJK).

Coplanarités. On a $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + 0\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{IK} = 0\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

Conclusion. Par la propriété des plans parallèles, les plans (IJK) et (BCD) sont parallèles.



Les données de l'exercice : I, J, K milieux de [AB], [AC], [AD], le triangle IJK et la face BCD du tétraèdre.

Remarque : Coin devoir : « Montrer qu'une droite est parallèle à un plan »

En devoir surveillé, la question peut prendre cette forme : « Dans le cube $ABCDEFGH$, montrer que la droite (DE) est parallèle au plan (BCG). »

Voici une rédaction attendue.

« Les points B, C, G ne sont pas alignés : G n'est pas dans le plan de la face $ABCD$, qui contient (BC). Donc $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BG}$ dirigent le plan (BCG).

Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$. Or $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.

Donc $\overrightarrow{DE} = -2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BG}$: ces trois vecteurs sont coplanaires, par le critère de coplanarité.

Le vecteur directeur de (DE) s'écrit avec ceux qui dirigent le plan : par le critère de parallélisme d'une droite et d'un plan, (DE) est parallèle au plan (BCG). »

Chaque règle est nommée, et les réels sont écrits.

Ce que tu sais faire et démontrer

À retenir

Dans l'espace, trois outils suffisent : la relation de Chasles, les règles de calcul et la décomposition suivant des vecteurs de référence.

- **Alignement, droites parallèles** : exhibe le réel k.
- **Point d'un plan, vecteurs ou points coplanaires** : exhibe x et y.
- **Non-coplanarité** : pars de $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ et obtiens $a = b = c = 0$.
- **Parallélisme avec un plan** : ramène-le à une coplanarité.

Et aucune propriété ne se lit sur la figure.

Le mot du prof. Tu sais maintenant calculer avec des vecteurs qui sortent du plan. Surtout, tu sais démontrer sans croire un dessin.

Le prochain chapitre, la géométrie analytique de l'espace, repérera chaque point par trois nombres. Tes décompositions suivant trois vecteurs non coplanaires en seront le point de départ. À l'examen de 2BAC SM, la géométrie de l'espace reposera encore sur ces outils.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Vecteurs de l'espace » (1bac · sciences-mathematiques · mathematiques)