BURHAN

Résumé : Suites numériques (généralités)

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/suites-numeriques/resume

Chapitre	Semestre
Suites numériques (généralités)	Semestre 1

Suite, termes et modes de définition

À retenir : Le réflexe : lire l'indice

Une suite range des réels dans un ordre : u_0, puis u_1, puis u_2… Pour lire u_{n+1}, remplace n par $n+1$ dans toute l'expression. Avec $u_n = 2^n - n$, on obtient $u_{n+1} = 2^{n+1} - n - 1$ et $u_{2n} = 4^n - 2n$.

Définition : Suite numérique

Soit n_0 un entier naturel. Une **suite numérique** $(u_n)_{n \geq n_0}$ associe à chaque entier naturel $n \geq n_0$ un réel unique, noté u_n.

- Le réel u_n est le **terme d'indice** n, ou **terme général**, de la suite ; u_{n_0} est son **premier terme**.
- Lorsque le rang n_0 est clair, la suite se note simplement (u_n).

Définition : Suite définie explicitement ; suite définie par récurrence

Soit n_0 un entier naturel.

- Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est **définie explicitement** lorsque $u_n = f(n)$ pour tout entier $n \geq n_0$, où f est une fonction définie en chaque entier $n \geq n_0$.
- Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est **définie par récurrence** par la donnée de son premier terme u_{n_0} et d'une relation $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier $n \geq n_0$, où f est une fonction : chaque terme se calcule à partir du précédent.

Méthode : calculer des termes

1. **Formule en n** : remplace n par l'indice demandé, puis calcule.
2. **Relation de récurrence** : pars du premier terme ; chaque terme sert à calculer le suivant.
3. **Contrôle** : un terme d'une suite récurrente demande tous les termes qui le précèdent.

Exemple

Formule explicite. Soit $u_n = 2^n - n$ pour $n \geq 0$. Alors $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 5$ et $u_{10} = 1024 - 10 = 1014$, sans calculer les termes intermédiaires.

Relation de récurrence. Soit $v_0 = -1$ et $v_{n+1} = v_n^2 + 1$. Alors $v_1 = 2$, $v_2 = 5$, puis $v_3 = 26$. Pour obtenir v_4, il faut d'abord v_3.

Attention : Le terme suivant n'est pas le terme plus un

Avec $u_n = 2^n - n$: $u_3 = 5$, alors que $u_2 + 1 = 3$. Le terme suivant n'est donc pas le terme augmenté de 1. De même, $u_4 = 12$, alors que $2u_2 = 4$: u_{2n} n'est pas $2u_n$.

Propriété : Une suite définie par récurrence est bien définie

Soit I un intervalle et f une fonction définie sur I telle que $f(x) \in I$ pour tout $x \in I$. Soit n_0 un entier naturel et $a \in I$.

Alors les relations $u_{n_0} = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier $n \geq n_0$ définissent une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$, et $u_n \in I$ pour tout entier $n \geq n_0$.

Exemple

Énoncé. Soit $w_0 = \dfrac{1}{3}$ et $w_{n+1} = w_n(2 - w_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Justifie que tous les termes sont dans $[0, 1]$.

Intervalle stable. Soit $x \in [0, 1]$. On a

$$x(2 - x) = 1 - (1 - x)^2.$$

Or $0 \leq 1 - x \leq 1$, donc $0 \leq (1 - x)^2 \leq 1$, et $x(2 - x) \in [0, 1]$.

Conclusion. Comme $w_0 \in [0, 1]$, FO3 (suite récurrente bien définie) donne $w_n \in [0, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par exemple, $w_1 = \dfrac{5}{9}$ et $w_2 = \dfrac{65}{81}$.

Remarque

Sans intervalle stable, la suite peut s'arrêter. Avec $t_0 = 3$ et $t_{n+1} = \sqrt{t_n - 2}$, on trouve $t_1 = 1$. Mais $t_1 - 2 = -1 < 0$: le terme t_2 n'existe pas.

Le symbole Σ

Définition : Somme de termes consécutifs ; symbole Σ

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite numérique, et p, n deux entiers tels que $n_0 \leq p \leq n$. La somme des termes consécutifs de u_p à u_n se note

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n.$$

Elle compte $n - p + 1$ termes. L'indice k est **muet** : $\sum_{k=p}^{n} u_k = \sum_{j=p}^{n} u_j$.

Exemple

Développer.

$$\begin{aligned}&\sum_{k=3}^{7}(2k+1)\\&= 7 + 9 + 11 + 13 + 15\\&= 55.\end{aligned}$$

Cette somme compte $7 - 3 + 1 = 5$ termes.

Indice muet. $\sum_{j=3}^{7}(2j+1)$ désigne la même somme.

Écrire avec Σ. Pour $n \geq 1$,

$$1 + 4 + 9 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2.$$

Cette somme compte n termes.

À retenir : Calculer avec Σ

Linéarité. On regroupe les termes :

$$\begin{aligned}&\sum_{k=p}^{n}(a_k + b_k)\\&= \sum_{k=p}^{n} a_k + \sum_{k=p}^{n} b_k,\end{aligned}$$

$$\sum_{k=p}^{n} c\,a_k = c\sum_{k=p}^{n} a_k.$$

Somme constante.

$$\sum_{k=p}^{n} c = (n - p + 1)c.$$

Somme télescopique.

$$\sum_{k=p}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_p.$$

Les termes d'indices $p + 1$ à n s'éliminent.

Attention : N'oublie pas le plus un

De u_4 à u_{20}, il y a $20 - 4 + 1 = 17$ termes, et non 16. Vérifie sur un petit cas : de u_4 à u_5, il y a bien deux termes, et $5 - 4 + 1 = 2$.

Suites majorées, minorées, bornées

Définition : Suite majorée, minorée, bornée

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite numérique.

- (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que $u_n \leq M$ pour tout entier $n \geq n_0$: $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \geq n_0,\ u_n \leq M$. Le réel M est un **majorant** de la suite.
- (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que $u_n \geq m$ pour tout entier $n \geq n_0$: $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall n \geq n_0,\ u_n \geq m$. Le réel m est un **minorant** de la suite.
- (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Attention : Un majorant ne dépend pas de n

Dans la définition, le réel M est choisi **avant** n. Avec $u_n = n$, l'inégalité $u_n \leq n$ est vraie pour tout n, mais n n'est pas un majorant. Un majorant est un nombre fixé, comme 7 ou $\frac{5}{2}$.

Propriété : Suite bornée et valeur absolue

Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est bornée si et seulement s'il existe un réel $A \geq 0$ tel que $|u_n| \leq A$ pour tout entier $n \geq n_0$.

Méthode : majorer, minorer, borner

1. **Annonce** le réel M ou m visé : il ne contient pas n.
2. **Formule explicite** : encadre n, puis enchaîne des inégalités ; ou étudie le signe de $u_n - M$.
3. **Relation de récurrence** : démontre l'inégalité par récurrence, avec initialisation, hérédité et conclusion.
4. **Conclus** avec le quantificateur : « pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n \leq M$ ».

Non majorée : $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n \geq n_0,\ u_n > M$. L'indice n se choisit après M.

Exemple

Énoncé. Soit $w_n = \dfrac{4n + 7}{n + 1}$ pour $n \geq 0$. Montre que la suite est bornée.

Écriture utile. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 4 + \dfrac{3}{n+1}$.

Encadrement. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $n+1 \geq 1$, on a

$$0 < \frac{3}{n+1} \leq 3,$$

donc $4 < w_n \leq 7$.

Conclusion. La suite est minorée par 4 et majorée par 7 : elle est bornée, et $|w_n| \leq 7$.

Sens de variation d'une suite

Définition : Suite croissante, décroissante, monotone

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite numérique.

- (u_n) est **croissante** si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout entier $n \geq n_0$, et **strictement croissante** si $u_{n+1} > u_n$ pour tout entier $n \geq n_0$.
- (u_n) est **décroissante** si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout entier $n \geq n_0$, et **strictement décroissante** si $u_{n+1} < u_n$ pour tout entier $n \geq n_0$.
- (u_n) est **constante** si $u_{n+1} = u_n$ pour tout entier $n \geq n_0$.
- (u_n) est **monotone** si elle est croissante ou décroissante, et **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Méthode : sens de variation

1. **Différence** : calcule $u_{n+1} - u_n$, factorise, puis étudie son signe pour tout $n \geq n_0$.
2. **Quotient** : si tous les termes sont strictement positifs, compare $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 (F09 : monotonie par le quotient). C'est le bon outil devant des puissances.
3. **Récurrence** : pour une relation $u_{n+1} = f(u_n)$, démontre $u_n \leq u_{n+1}$ par récurrence.
4. **Conclus** avec les mots de F07 (monotonie).

Exemple

Énoncé. Soit $u_n = n^2 - 5n$ pour $n \geq 0$.

Différence. Soit $n \geq 0$.

$$\begin{aligned} &u_{n+1} - u_n \\ &= (n+1)^2 - 5(n+1) \\ &\quad - n^2 + 5n \\ &= 2n - 4. \end{aligned}$$

Signe. Pour tout $n \geq 2$, $2n - 4 \geq 0$: la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est croissante.

Depuis le rang 0. $u_1 - u_0 = -4 < 0$ et $u_4 - u_3 = 2 > 0$: la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ n'est pas monotone.

Attention : Ni croissante ni décroissante, c'est possible

« Pas croissante » ne veut pas dire « décroissante ». Pour montrer qu'une suite n'est pas monotone, exhibe deux comparaisons de sens contraires, comme $u_1 < u_0$ et $u_4 > u_3$ ci-dessus.

Propriété : Comparaison des termes d'une suite monotone

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique, et p, n deux entiers tels que $n_0 \leq p \leq n$.

- Si (u_n) est croissante, alors $u_p \leq u_n$. En particulier, une suite croissante est minorée par son premier terme u_{n_0}.
- Si (u_n) est décroissante, alors $u_p \geq u_n$. En particulier, une suite décroissante est majorée par son premier terme u_{n_0}.

Propriété : Monotonie d'une suite à termes strictement positifs

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite telle que $u_n > 0$ pour tout entier $n \geq n_0$.

- (u_n) est croissante si et seulement si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ pour tout entier $n \geq n_0$.
- (u_n) est décroissante si et seulement si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ pour tout entier $n \geq n_0$.

Les mêmes équivalences valent avec les inégalités strictes, pour la stricte monotonie.

Exemple

Énoncé. Soit $u_n = \dfrac{3^n}{n+1}$ pour $n \geq 0$. Tous ses termes sont strictement positifs.

Quotient. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{3^{n+1}}{n+2} \times \frac{n+1}{3^n} \\ &= \frac{3n+3}{n+2}.\end{aligned}$$

Comparaison. $(3n+3) - (n+2) = 2n+1 > 0$ et $n+2 > 0$, donc le quotient dépasse 1.

Conclusion. D'après F09 (monotonie par le quotient), la suite est strictement croissante. D'après F08 (comparaison des termes), elle est minorée par $u_0 = 1$.

Suites arithmétiques

Définition : Suite arithmétique

Soit r un réel. Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **arithmétique de raison** r si $u_{n+1} = u_n + r$ pour tout entier $n \geq n_0$.

Autrement dit, une suite est arithmétique lorsque la différence $u_{n+1} - u_n$ ne dépend pas de n ; cette différence constante est sa raison.

Propriété : Terme général et sens de variation d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite arithmétique de raison r.

- Pour tous entiers $n \geq n_0$ et $p \geq n_0$: $u_n = u_p + (n-p)r$. En particulier, $u_n = u_{n_0} + (n-n_0)r$.
- Si $r > 0$, la suite est strictement croissante ; si $r < 0$, elle est strictement décroissante ; si $r = 0$, elle est constante.

Propriété : Trois termes consécutifs d'une suite arithmétique

Soit a, b, c trois réels. Il existe un réel r tel que $b = a + r$ et $c = b + r$, c'est-à-dire que a, b, c sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, si et seulement si $a + c = 2b$.

Propriété : Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite arithmétique, et p, n deux entiers tels que $n_0 \leq p \leq n$. Alors

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1) \times \frac{u_p + u_n}{2}.$$

Autrement dit, la somme vaut le nombre de termes multiplié par la demi-somme du premier et du dernier terme. En particulier, $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ pour tout entier $n \geq 1$.

Définition

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Terme général

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

Trois termes consécutifs

$$a + c = 2b$$

Somme de termes consécutifs

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1) \times \frac{u_p + u_n}{2}$$

Somme des premiers entiers

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exemple

Énoncé. Une suite arithmétique vérifie $u_3 = 10$ et $u_8 = 25$. Trouve sa raison, son terme général et $\sum_{k=0}^{19} u_k$.

Raison. D'après F11 (terme général arithmétique), $u_8 = u_3 + 5r$, donc $5r = 15$ et $r = 3$.

Terme général. $u_0 = u_3 - 3r = 1$, donc $u_n = 1 + 3n$ pour tout $n \geq 0$. Comme $r > 0$, la suite est strictement croissante.

Somme. Elle compte 20 termes, de $u_0 = 1$ à $u_{19} = 58$. D'après F13 (somme arithmétique), elle vaut

$$20 \times \frac{1 + 58}{2} = 590.$$

Attention : Quelques termes ne prouvent pas la nature

Trois termes en progression ne suffisent pas. Pour $u_n = 2n + n(n-1)(n-2)$, on a $u_0 = 0$, $u_1 = 2$, $u_2 = 4$, mais $u_3 = 12$. Il faut prouver que $u_{n+1} - u_n$ est le même réel pour **tout** n. Une seule différence qui change suffit pour réfuter.

Suites géométriques

Définition : Suite géométrique

Soit q un réel. Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est **géométrique de raison** q si $u_{n+1} = q\,u_n$ pour tout entier $n \geq n_0$.

Lorsqu'aucun terme n'est nul, la raison d'une suite géométrique est le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, qui ne dépend donc pas de n. Réciproquement, si ce quotient vaut un même réel q pour tout entier $n \geq n_0$, alors $u_{n+1} = q\,u_n$: la suite est géométrique de raison q.

Propriété : Terme général et sens de variation d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite géométrique de raison q.

- Pour tous entiers n et p tels que $n \geq p \geq n_0$: $u_n = u_p\,q^{n-p}$, avec la convention $q^0 = 1$. En particulier, $u_n = u_{n_0}\,q^{n-n_0}$.
- Si $u_{n_0} > 0$ et $q > 1$, la suite est strictement croissante ; si $u_{n_0} > 0$ et $0 < q < 1$, elle est strictement décroissante ; si $q = 1$, elle est constante.

Propriété : Trois termes consécutifs d'une suite géométrique

Soit a, b, c trois réels.

- S'il existe un réel q tel que $b = qa$ et $c = qb$, c'est-à-dire si a, b, c sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique, alors $b^2 = ac$.

- Réciproquement, si $a \neq 0$ et $b^2 = ac$, alors a, b, c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique, de raison $q = \dfrac{b}{a}$.

Propriété : Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Soit q un réel différent de 1. Pour tout entier naturel m :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^m = \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q}.$$

Plus généralement, si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et si p, n sont deux entiers tels que $n_0 \leq p \leq n$, alors

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}.$$

Si $q = 1$, cette somme vaut $(n - p + 1)\, u_p$.

Définition

$$u_{n+1} = q\, u_n$$

Terme général (n ≥ p)

$$u_n = u_p\, q^{n-p}$$

Trois termes consécutifs

$$b^2 = ac$$

Somme des puissances, q différent de 1

$$1 + q + \cdots + q^m = \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q}$$

Somme de termes consécutifs, q différent de 1

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

Exemple

Énoncé. Une suite géométrique vérifie $u_2 = 12$ et $u_5 = 96$. Trouve sa raison, u_0 et $\sum_{k=0}^{9} u_k$.

Raison. D'après F15 (terme général géométrique), $u_5 = u_2\, q^3$, donc $q^3 = 8$. Le seul réel dont le cube vaut 8 est 2 : $q = 2$.

Premier terme. $u_2 = u_0\, q^2$, donc $u_0 = \dfrac{12}{4} = 3$ et $u_n = 3 \times 2^n$.

Somme. D'après F17 (somme géométrique),

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{9} u_k &= 3 \times \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} \\ &= 3 \times 1023 = 3069. \end{aligned}$$

Attention : Regarde aussi le signe du premier terme

Une raison $q > 1$ ne suffit pas. Avec $u_0 = -1$ et $q = 3$, on a $u_1 = -3 < u_0$: la suite est strictement décroissante. Si $q < 0$ et $u_0 \neq 0$, les termes changent de signe à chaque rang : la suite n'est pas monotone.

Une suite auxiliaire pour une relation affine

Méthode : passer par une suite auxiliaire

Pour $u_{n+1} = a\,u_n + b$, avec $a \neq 1$:

1. **Cherche** le réel α tel que $\alpha = a\alpha + b$.
2. **Pose** $v_n = u_n - \alpha$ et vérifie que $v_{n+1} = a\,v_n$: la suite (v_n) est géométrique de raison a.
3. **Écris** $v_n = v_{n_0}\,a^{n-n_0}$ (soit $v_n = v_0\,a^n$ si $n_0 = 0$), puis $u_n = v_n + \alpha$.
4. **Exploite** cette formule : sens de variation, bornes, sommes.

Exemple

Énoncé. Soit $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Constante. $\alpha = 2\alpha - 3$ donne $\alpha = 3$. Posons $v_n = u_n - 3$.

Suite géométrique. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 2u_n - 3 - 3 \\ &= 2(u_n - 3) = 2v_n. \end{aligned}$$

Raison 2, et $v_0 = 1$.

Terme général. $v_n = 2^n$, donc $u_n = 3 + 2^n$. Alors $u_{n+1} - u_n = 2^n > 0$: la suite est strictement croissante.

Somme. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = 3(n+1) + 2^{n+1} - 1.$$

À retenir : Rédiger une récurrence sur une suite

Nomme la propriété $P(n)$ et le rang de départ. Écris trois parties titrées. **Initialisation** : vérifie $P(n_0)$ par un calcul. **Hérédité** : « Soit $n \geq n_0$ tel que $P(n)$ soit vraie » ; dis où tu utilises $P(n)$. **Conclusion** : par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Quelle méthode pour quelle question ?

Méthode : Quelle méthode pour quelle question ?

Repère la question posée, puis choisis l'outil.

Question posée	Méthode	Appui
calculer un terme	remplacer n, ou appliquer la relation de proche en proche	F02 (modes de définition)
la suite est-elle bien définie ?	un intervalle I avec $f(x) \in I$ pour tout $x \in I$, et $u_{n_0} \in I$	F03 (suite récurrente bien définie)
écrire ou calculer une somme	symbole Σ, nombre de termes $n - p + 1$	F04 (symbole Σ)
majorée, minorée, bornée	inégalités enchaînées, ou récurrence	F05 (majorée, minorée, bornée), F06 (bornée et valeur absolue)
sens de variation	différence, quotient si termes strictement positifs, ou récurrence	F07 (monotonie), F09 (monotonie par le quotient)
nature arithmétique	$u_{n+1} - u_n$ constant ; réfuter par trois termes	F10 (suite arithmétique), F12 (trois termes arithmétiques)
nature géométrique	$u_{n+1} = q\,u_n$; réfuter par trois termes	F14 (suite géométrique), F16 (trois termes géométriques)
terme général	formule de F11 (terme général arithmétique) ou de F15 (terme général géométrique)	F11, F15
somme de termes consécutifs	nature, premier terme, nombre de termes	F13 (somme arithmétique), F17 (somme géométrique)
relation $u_{n+1} = a\,u_n + b$	suite auxiliaire géométrique	F14, F15
montrer qu'une suite n'est pas majorée	pour tout réel M, trouver un indice n tel que $u_n > M$	F05
montrer qu'une suite n'est pas monotone	deux comparaisons de sens contraires, comme $u_1 < u_0$ et $u_4 > u_3$	F07
montrer qu'une suite n'est pas arithmétique ou géométrique	trois termes consécutifs qui ne vérifient pas $a + c = 2b$, ou $b^2 = ac$	F12, F16
somme télescopique	$\sum_{k=p}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_p$	F04

À retenir : Rédiger en devoir

Introduis chaque objet avant de t'en servir : « Soit $n \in \mathbb{N}$ ». Un majorant s'annonce avant n. Cite le résultat employé et vérifie ses hypothèses, comme le signe des termes avant un quotient. Termine par une phrase qui reprend la question.