BURHAN

Suites numériques (généralités) : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/suites-numeriques/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Suites numériques (généralités)	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Une suite définie par un quotient et sa suite auxiliaire

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 5}.$$

1. 0,5 pts

Calculer u_1 et u_2.

2. 1 pts

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est défini et $0 \leq u_n < 2$.

INDICE

Pour l'hérédité, calcule $u_{n+1} - 2$ et réduis au même dénominateur.

3. 1 pts

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(2 + u_n)}{u_n + 5}.$$

En déduire le sens de variation de (u_n).

INDICE

Réduis au même dénominateur : le numérateur se simplifie en une différence de deux carrés.

4. 1 pts

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 2}$. Justifier que v_n est défini, puis montrer que (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{3}{7}$.

INDICE

Calcule séparément $u_{n+1} - 2$ (déjà fait en 2.) et $u_{n+1} + 2$, puis forme leur quotient.

5. 1,5 pts

En déduire v_n en fonction de n, puis montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{2(7^n - 3^n)}{7^n + 3^n} \\ &= 2 - \frac{4 \times 3^n}{7^n + 3^n}. \end{aligned}$$

Retrouver la valeur de u_2.

INDICE

De $v_n(u_n + 2) = u_n - 2$, isole u_n ; vérifie que le facteur par lequel tu divises n'est pas nul. Pour la seconde écriture, écris $2(7^n - 3^n) = 2(7^n + 3^n) - 4 \times 3^n$.

Exercice 2 5 pts

Une relation de récurrence avec un terme en n

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = 3u_n - 2n + 1.$$

1. 0,5 pts

Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. 1 pts

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - n$. Démontrer que (v_n) est géométrique, puis donner sa raison et v_0.

INDICE

Écris $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1)$ et remplace u_{n+1} par la relation de récurrence.

3. 0,5 pts

En déduire que $u_n = 3^n + n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. 0,5 pts

Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

INDICE

Calcule $u_{n+1} - u_n$ avec le terme général, en écrivant $3^{n+1} = 3 \times 3^n$.

5. a) 0,75 pts

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^n \geq 2n + 1$.

INDICE

Dans l'hérédité, écris $3^{n+1} = 3 \times 3^n$ et utilise l'hypothèse de récurrence, puis compare $6n + 3$ et $2n + 3$.

5. b) 0,75 pts

En déduire que $u_n \geq 3n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis que la suite (u_n) n'est pas majorée.

INDICE

Pour la seconde partie, raisonne par l'absurde : suppose qu'un réel M majore la suite, puis choisis un entier N plus grand que $|M|$.

6. 1 pts

Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n, puis en déduire S_4.

INDICE

Sépare la somme en $\sum_{k=0}^{n} 3^k$ et $\sum_{k=0}^{n} k$.

Exercice 3 5 pts

Des différences successives en progression arithmétique

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n + 4n + 1.$$

1. 0,5 pts

Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. 0,75 pts

Étudier le sens de variation de (u_n). En déduire que la suite est minorée, et donner un minorant.

INDICE

La relation de récurrence donne directement $u_{n+1} - u_n$.

3. 0,75 pts

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $d_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que (d_n) est arithmétique ; préciser sa raison et son premier terme.

INDICE

Exprime d_n en fonction de n, puis calcule $d_{n+1} - d_n$.

4. 1 pts

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n^2 - n + 2$.

INDICE

Dans l'hérédité, développe $2(n+1)^2 - (n+1) + 2$ et compare avec $u_n + 4n + 1$.

5. 1 pts

Calculer u_{22} et u_{23}. En déduire le plus petit entier n tel que $u_n > 1000$.

INDICE

Utilise la croissance de la suite pour les rangs inférieurs à 22.

6. 1 pts

Soit $n \geq 1$ un entier. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} d_k$ de deux façons : avec la question 3., puis en écrivant $d_k = u_{k+1} - u_k$. Vérifier que les deux résultats concordent.

INDICE

Dans la seconde écriture, reconnais la somme télescopique du cours.

Exercice 4 5 pts

Une relation à coefficient variable et des termes consécutifs

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{n+2}{2(n+1)}\, u_n.$$

1. 0,5 pts

Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. 0,5 pts

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

INDICE

Pour l'hérédité, étudie le signe du coefficient $\dfrac{n+2}{2(n+1)}$.

3. 1 pts

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = -\frac{n}{2(n+1)}.$$

En déduire le sens de variation de (u_n), puis que $0 < u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

INDICE

Les termes sont strictement positifs (question 2) : compare le quotient à 1. Pour l'encadrement, quelle propriété relie une suite décroissante et son premier terme ?

4. 0,75 pts

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{u_n}{n+1}$. Montrer que (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et v_0.

INDICE

Écris $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{n+2}$ et remplace u_{n+1} par la relation de récurrence.

5. 0,5 pts

En déduire que $u_n = \dfrac{n+1}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis retrouver u_3.

INDICE

Exprime d'abord v_n avec F15 (terme général géométrique).

6. a) 0,75 pts

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que u_n, u_{n+1}, u_{n+2} ne sont pas, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

INDICE

Raisonne par l'absurde avec F16 (trois termes géométriques) : compare u_{n+1}^2 et $u_n\, u_{n+2}$ à l'aide du terme général.

6. b)

1 pts

Déterminer les entiers naturels n pour lesquels il existe une suite arithmétique dont u_n, u_{n+1}, u_{n+2} sont trois termes successifs, pris dans cet ordre. Préciser alors ces trois termes et la raison.

INDICE

D'après F12 (trois termes arithmétiques), la condition s'écrit $u_n + u_{n+2} = 2u_{n+1}$; multiplie les deux membres par 2^{n+2}.

Exercice 5 5 pts

Deux suites liées par leur somme et leur différence

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 7$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} + 1,$$
$$v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} + 1.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $s_n = u_n + v_n$ et $w_n = v_n - u_n$.

1. 0,5 pts

Calculer u_1, v_1, u_2 et v_2.

2. 0,75 pts

Montrer que la suite (s_n) est arithmétique ; préciser sa raison et s_0. En déduire s_n en fonction de n.

INDICE

Additionne membre à membre les deux relations de récurrence.

3. 1 pts

Montrer que la suite (w_n) est géométrique ; préciser sa raison et w_0. En déduire w_n en fonction de n, puis que $u_n < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

INDICE

Soustrais membre à membre : les deux constantes 1 s'éliminent.

4. 0,75 pts

En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = n + 4 - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

et

$$v_n = n + 4 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Retrouver u_2 et v_2.

INDICE

Exprime u_n et v_n à l'aide de s_n et de w_n.

5. 0,75 pts

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = 1 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

En déduire le sens de variation de (u_n) et un minorant de cette suite.

INDICE

Pars de la relation de récurrence : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{v_n - u_n}{3} + 1$.

6. 1,25 pts

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} - v_n = 1 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

La suite (v_n) est-elle monotone ? Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante, puis que $v_n \geq 6$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

INDICE

Pour $n \geq 1$, compare $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ à $\frac{1}{3}$. Dans la dernière inégalité, n'oublie pas le terme v_0.