BURHAN

Suites numériques (généralités) : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/suites-numeriques/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Suites numériques (généralités)	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Une suite définie par un quotient et sa suite auxiliaire

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 5}.$$

1. 0,5 pts

Calculer u_1 et u_2.

CORRIGÉ

$$u_1 = \frac{0 + 4}{0 + 5} = \frac{4}{5}$$

$$u_2 = \frac{5 \times \dfrac{4}{5} + 4}{\dfrac{4}{5} + 5} = \frac{8}{\dfrac{29}{5}} = \frac{40}{29}$$

Conclusion. $u_1 = \dfrac{4}{5}$ et $u_2 = \dfrac{40}{29}$.

2. 1 pts

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est défini et $0 \leq u_n < 2$.

INDICE

Pour l'hérédité, calcule $u_{n+1} - 2$ et réduis au même dénominateur.

CORRIGÉ

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$: « u_n est défini et $0 \leq u_n < 2$ ».

Initialisation. $u_0 = 0$ et $0 \leq 0 < 2$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. Comme $u_n \geq 0$, on a $u_n + 5 \geq 5 > 0$: u_{n+1} est défini. Le numérateur $5u_n + 4$ est strictement positif, donc $u_{n+1} > 0$.

Pour la majoration, on réduit au même dénominateur :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 2 &= \frac{5u_n + 4 - 2u_n - 10}{u_n + 5} \\ &= \frac{3(u_n - 2)}{u_n + 5} \end{aligned}$$

Comme $u_n < 2$, le numérateur est strictement négatif, et le dénominateur est strictement positif : $u_{n+1} < 2$. Ainsi $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est défini et $0 \leq u_n < 2$.

3. 1 pts

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(2-u_n)(2+u_n)}{u_n+5}.$$

En déduire le sens de variation de (u_n).

INDICE

Réduis au même dénominateur : le numérateur se simplifie en une différence de deux carrés.

CORRIGÉ

Calcul de la différence. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 2., $u_n + 5 > 0$, et :

$$\begin{aligned} & u_{n+1} - u_n \\ &= \frac{5u_n + 4 - u_n(u_n+5)}{u_n+5} \\ &= \frac{4 - u_n^2}{u_n+5} \\ &= \frac{(2-u_n)(2+u_n)}{u_n+5} \end{aligned}$$

Signe. D'après la question 2., $0 \leq u_n < 2$: les trois facteurs $2-u_n$, $2+u_n$ et u_n+5 sont strictement positifs. Donc $u_{n+1} - u_n > 0$.

Conclusion. L'égalité est démontrée pour tout $n \in \mathbb{N}$ et, d'après F07 (monotonie), la suite (u_n) est strictement croissante.

4. 1 pts

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 2}$. Justifier que v_n est défini, puis montrer que (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{3}{7}$.

INDICE

Calcule séparément $u_{n+1} - 2$ (déjà fait en 2.) et $u_{n+1} + 2$, puis forme leur quotient.

CORRIGÉ

Définition de v_n. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 2., $u_n \geq 0$, donc $u_n + 2 \geq 2 > 0$: v_n est défini.

Calcul de $u_{n+1} + 2$. D'après le calcul de la question 2., $u_{n+1} - 2 = \dfrac{3(u_n - 2)}{u_n + 5}$. De même :

$$\begin{aligned} u_{n+1} + 2 &= \frac{5u_n + 4 + 2u_n + 10}{u_n + 5} \\ &= \frac{7(u_n + 2)}{u_n + 5} \end{aligned}$$

Quotient. En divisant, le facteur $u_n + 5$ se simplifie :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 2} \\ &= \frac{3(u_n - 2)}{7(u_n + 2)} \\ &= \frac{3}{7}\, v_n \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n est défini et $v_{n+1} = \dfrac{3}{7}\, v_n$: d'après F14 (suite géométrique), (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{3}{7}$, de premier terme $v_0 = \dfrac{0 - 2}{0 + 2} = -1$.

5. 1,5 pts

En déduire v_n en fonction de n, puis montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{2(7^n - 3^n)}{7^n + 3^n} \\ &= 2 - \frac{4 \times 3^n}{7^n + 3^n}. \end{aligned}$$

Retrouver la valeur de u_2.

INDICE

De $v_n(u_n + 2) = u_n - 2$, isole u_n ; vérifie que le facteur par lequel tu divises n'est pas nul. Pour la seconde écriture, écris $2(7^n - 3^n) = 2(7^n + 3^n) - 4 \times 3^n$.

CORRIGÉ

Expression de v_n. D'après F15 (terme général géométrique), pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = -\left(\frac{3}{7}\right)^n = -\frac{3^n}{7^n}$$

Expression de u_n. Soit $n \in \mathbb{N}$. De $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 2}$, on tire $v_n(u_n + 2) = u_n - 2$, soit :

$$u_n(1 - v_n) = 2(1 + v_n)$$

Comme $v_n < 0$, on a $1 - v_n > 0$, et l'on peut diviser par $1 - v_n$:

$$u_n = \frac{2(1 + v_n)}{1 - v_n}$$

Première écriture. On remplace v_n, puis on multiplie le numérateur et le dénominateur par 7^n :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{2\left(1 - \dfrac{3^n}{7^n}\right)}{1 + \dfrac{3^n}{7^n}} \\ &= \frac{2(7^n - 3^n)}{7^n + 3^n} \end{aligned}$$

Seconde écriture. Comme $2(7^n - 3^n) = 2(7^n + 3^n) - 4 \times 3^n$:

$$u_n = 2 - \frac{4 \times 3^n}{7^n + 3^n}$$

Valeur de u_2.

$$\begin{aligned} u_2 &= 2 - \frac{4 \times 9}{49 + 9} = 2 - \frac{36}{58} \\ &= 2 - \frac{18}{29} = \frac{40}{29} \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -\left(\dfrac{3}{7}\right)^n$, et u_n admet les deux écritures annoncées ; on retrouve $u_2 = \dfrac{40}{29}$, comme à la question 1.

Exercice 2 5 pts

Une relation de récurrence avec un terme en n

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = 3u_n - 2n + 1.$$

1. 0,5 pts

Calculer u_1, u_2 et u_3.

CORRIGÉ

On calcule de proche en proche avec la relation de récurrence :

$$\begin{aligned} u_1 &= 3 \times 1 - 0 + 1 = 4 \\ u_2 &= 3 \times 4 - 2 + 1 = 11 \\ u_3 &= 3 \times 11 - 4 + 1 = 30 \end{aligned}$$

Conclusion. $u_1 = 4$, $u_2 = 11$ et $u_3 = 30$.

2. 1 pts

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - n$. Démontrer que (v_n) est géométrique, puis donner sa raison et v_0.

INDICE

Écris $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1)$ et remplace u_{n+1} par la relation de récurrence.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$. On remplace u_{n+1} par la relation de récurrence :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - (n+1) \\ &= 3u_n - 2n + 1 - n - 1 \\ &= 3u_n - 3n \\ &= 3(u_n - n) = 3v_n \end{aligned}$$

Le premier terme vaut $v_0 = u_0 - 0 = 1$.

Conclusion. D'après F14 (suite géométrique), (v_n) est géométrique de raison 3, et $v_0 = 1$.

3. 0,5 pts

En déduire que $u_n = 3^n + n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

CORRIGÉ

D'après F15 (terme général géométrique), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 3^n = 3^n$. Comme $v_n = u_n - n$:

$$u_n = v_n + n = 3^n + n$$

Contrôle : $u_3 = 27 + 3 = 30$, comme à la question 1.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n + n$.

4. 0,5 pts

Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

INDICE

Calcule $u_{n+1} - u_n$ avec le terme général, en écrivant $3^{n+1} = 3 \times 3^n$.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$. Avec le terme général de la question 3. et $3^{n+1} = 3 \times 3^n$:

$$\begin{aligned} & u_{n+1} - u_n \\ & = 3^{n+1} + n + 1 - 3^n - n \\ & = 2 \times 3^n + 1 \end{aligned}$$

Comme $3^n > 0$, cette différence est strictement positive.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$: d'après F07 (monotonie), la suite (u_n) est strictement croissante.

5. a) 0,75 pts

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^n \geq 2n + 1$.

INDICE

Dans l'hérédité, écris $3^{n+1} = 3 \times 3^n$ et utilise l'hypothèse de récurrence, puis compare $6n + 3$ et $2n + 3$.

CORRIGÉ

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$: « $3^n \geq 2n + 1$ ».

Initialisation. $3^0 = 1$ et $2 \times 0 + 1 = 1$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. Par hypothèse de récurrence, $3^n \geq 2n + 1$; en multipliant par $3 > 0$:

$$\begin{aligned} 3^{n+1} & = 3 \times 3^n \\ & \geq 3(2n + 1) = 6n + 3 \end{aligned}$$

Or $6n + 3 - (2n + 3) = 4n \geq 0$, donc $6n + 3 \geq 2n + 3$. Ainsi :

$$\begin{aligned} 3^{n+1} & \geq 2n + 3 \\ & = 2(n + 1) + 1 \end{aligned}$$

et $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, $3^n \geq 2n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. b) 0,75 pts

En déduire que $u_n \geq 3n+1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis que la suite (u_n) n'est pas majorée.

INDICE

Pour la seconde partie, raisonne par l'absurde : suppose qu'un réel M majore la suite, puis choisis un entier N plus grand que $|M|$.

CORRIGÉ

Minoration. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après les questions 3. et 5. a) :

$$\begin{aligned} u_n &= 3^n + n \\ &\geq 2n + 1 + n = 3n + 1 \end{aligned}$$

Suite non majorée. Supposons par l'absurde que la suite soit majorée : il existe un réel M tel que $u_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit N un entier naturel tel que $N > |M|$. Alors :

$$\begin{aligned} u_N &\geq 3N + 1 > N \\ &> |M| \geq M, \end{aligned}$$

ce qui contredit $u_N \leq M$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 3n+1$, et la suite (u_n) n'est pas majorée.

6. 1 pts

Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n, puis en déduire S_4.

INDICE

Sépare la somme en $\sum_{k=0}^{n} 3^k$ et $\sum_{k=0}^{n} k$.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$. Avec $u_k = 3^k + k$, on sépare la somme en deux :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} 3^k + \sum_{k=0}^{n} k$$

Somme géométrique. D'après F17 (somme géométrique), avec $q = 3 \neq 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} 3^k &= \frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} \\ &= \frac{3^{n+1} - 1}{2} \end{aligned}$$

Somme arithmétique. D'après F13 (somme arithmétique) :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Valeur de S_4. Avec $n = 4$:

$$\begin{aligned} S_4 &= \frac{3^5 - 1 + 4 \times 5}{2} \\ &= \frac{243 - 1 + 20}{2} = 131 \end{aligned}$$

Contrôle : $u_4 = 81 + 4 = 85$, et $1 + 4 + 11 + 30 + 85 = 131$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \frac{3^{n+1} - 1 + n(n+1)}{2},$$

et $S_4 = 131$.

Exercice 3 5 pts

Des différences successives en progression arithmétique

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n + 4n + 1.$$

1. 0,5 pts

Calculer u_1, u_2 et u_3.

CORRIGÉ

On calcule de proche en proche avec la relation de récurrence :

$$u_1 = 2 + 4 \times 0 + 1 = 3$$
$$u_2 = 3 + 4 \times 1 + 1 = 8$$
$$u_3 = 8 + 4 \times 2 + 1 = 17$$

Conclusion. $u_1 = 3$, $u_2 = 8$ et $u_3 = 17$.

2. 0,75 pts

Étudier le sens de variation de (u_n). En déduire que la suite est minorée, et donner un minorant.

INDICE

La relation de récurrence donne directement $u_{n+1} - u_n$.

CORRIGÉ

Sens de variation. Soit $n \in \mathbb{N}$. La relation de récurrence donne $u_{n+1} - u_n = 4n + 1 \geq 1 > 0$. D'après F07 (monotonie), la suite (u_n) est strictement croissante.

Minorant. D'après F08 (comparaison des termes), une suite croissante est minorée par son premier terme : $u_n \geq u_0 = 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Conclusion. La suite (u_n) est strictement croissante, et elle est minorée par 2.

3. 0,75 pts

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $d_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que (d_n) est arithmétique ; préciser sa raison et son premier terme.

INDICE

Exprime d_n en fonction de n, puis calcule $d_{n+1} - d_n$.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la relation de récurrence, $d_n = 4n + 1$. Donc :

$$\begin{aligned} & d_{n+1} - d_n \\ & = 4(n+1) + 1 - (4n + 1) \\ & = 4 \end{aligned}$$

Cette différence ne dépend pas de n, et $d_0 = 4 \times 0 + 1 = 1$.

Conclusion. D'après F10 (suite arithmétique), (d_n) est arithmétique de raison 4 et de premier terme $d_0 = 1$.

4. 1 pts

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n^2 - n + 2$.

INDICE

Dans l'hérédité, développe $2(n+1)^2 - (n+1) + 2$ et compare avec $u_n + 4n + 1$.

CORRIGÉ

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$: « $u_n = 2n^2 - n + 2$ ».

Initialisation. $2 \times 0^2 - 0 + 2 = 2 = u_0$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. Par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + 4n + 1 \\ &= 2n^2 - n + 2 + 4n + 1 \\ &= 2n^2 + 3n + 3 \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} & 2(n+1)^2 - (n+1) + 2 \\ & = 2n^2 + 4n + 2 - n - 1 + 2 \\ & = 2n^2 + 3n + 3 \end{aligned}$$

Les deux expressions sont égales : $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n^2 - n + 2$.

5. 1 pts

Calculer u_{22} et u_{23}. En déduire le plus petit entier n tel que $u_n > 1000$.

INDICE

Utilise la croissance de la suite pour les rangs inférieurs à 22.

CORRIGÉ

Valeurs. D'après la question 4. :

$$\begin{aligned} u_{22} &= 2 \times 484 - 22 + 2 \\ &= 948 \\ u_{23} &= 2 \times 529 - 23 + 2 \\ &= 1037 \end{aligned}$$

Rangs inférieurs ou égaux à 22. Soit $n \leq 22$ un entier naturel. La suite est croissante (question 2.) ; d'après F08 (comparaison des termes), comme $n \leq 22$, $u_n \leq u_{22} = 948$, et $948 \leq 1000$. Aucun de ces entiers ne convient.

Rang 23. $u_{23} = 1037 > 1000$.

Conclusion. Le plus petit entier n tel que $u_n > 1000$ est $n = 23$.

6. 1 pts

Soit $n \geq 1$ un entier. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} d_k$ de deux façons : avec la question 3., puis en écrivant $d_k = u_{k+1} - u_k$. Vérifier que les deux résultats concordent.

INDICE

Dans la seconde écriture, reconnais la somme télescopique du cours.

CORRIGÉ

Avec F13 (somme arithmétique). D'après la question 3., la suite (d_k) est arithmétique. La somme compte n termes, de $d_0 = 1$ à $d_{n-1} = 4n - 3$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} d_k &= n \times \frac{1 + 4n - 3}{2} \\ &= n(2n - 1) \end{aligned}$$

Par élimination. On écrit $d_k = u_{k+1} - u_k$, puis on pose $j = k + 1$ dans la première somme :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} d_k &= \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} u_k \\ &= \sum_{j=1}^{n} u_j - \sum_{k=0}^{n-1} u_k \end{aligned}$$

Les termes d'indices 1 à $n - 1$ figurent dans les deux sommes et s'éliminent : il reste $u_n - u_0$.

Concordance. D'après la question 4., $u_n - u_0 = 2n^2 - n + 2 - 2 = n(2n - 1)$.

Conclusion. Les deux calculs donnent $\sum_{k=0}^{n-1} d_k = n(2n - 1)$: ils concordent.

Exercice 4 5 pts

Une relation à coefficient variable et des termes consécutifs

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{n+2}{2(n+1)}\, u_n.$$

1. 0,5 pts

Calculer u_1, u_2 et u_3.

CORRIGÉ

On applique la relation avec $n = 0, 1$ puis 2 :

$$u_1 = \frac{2}{2} \times 1 = 1$$
$$u_2 = \frac{3}{4} \times 1 = \frac{3}{4}$$
$$u_3 = \frac{4}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

Conclusion. $u_1 = 1$, $u_2 = \dfrac{3}{4}$ et $u_3 = \dfrac{1}{2}$.

2. 0,5 pts

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

INDICE

Pour l'hérédité, étudie le signe du coefficient $\dfrac{n+2}{2(n+1)}$.

CORRIGÉ

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$: « $u_n > 0$ ».

Initialisation. $u_0 = 1 > 0$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. Comme $n + 2 > 0$ et $2(n+1) > 0$, le coefficient $\dfrac{n+2}{2(n+1)}$ est strictement positif.

Par hypothèse de récurrence, $u_n > 0$. Le produit de deux réels strictement positifs est strictement positif, donc $u_{n+1} > 0$: $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. 1 pts

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = -\frac{n}{2(n+1)}.$$

En déduire le sens de variation de (u_n), puis que $0 < u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

INDICE

Les termes sont strictement positifs (question 2) : compare le quotient à 1. Pour l'encadrement, quelle propriété relie une suite décroissante et son premier terme ?

CORRIGÉ

Calcul. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 2., $u_n > 0$: le quotient est défini, et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+2}{2(n+1)}$. Donc :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 &= \frac{n+2-2(n+1)}{2(n+1)} \\ &= -\frac{n}{2(n+1)}\end{aligned}$$

Sens de variation. Comme $n \geq 0$, ce réel est négatif ou nul : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$. Les termes étant strictement positifs, d'après F09 (monotonie par le quotient), la suite (u_n) est décroissante.

Pour $n \geq 1$, l'écart est strictement négatif : la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante, alors que $u_1 = u_0 = 1$.

Encadrement. D'après F08 (comparaison des termes), une suite décroissante est majorée par son premier terme : $u_n \leq u_0 = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Avec la question 2., on obtient $0 < u_n \leq 1$.

Conclusion. La suite (u_n) est décroissante, strictement à partir du rang 1, et $0 < u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: elle est bornée.

4. 0,75 pts

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{u_n}{n+1}$. Montrer que (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et v_0.

INDICE

Écris $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n+2}$ et remplace u_{n+1} par la relation de récurrence.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $n+2 \neq 0$, on remplace u_{n+1} par la relation de récurrence :

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{n+2} \\ &= \frac{1}{n+2} \times \frac{n+2}{2(n+1)}\, u_n \\ &= \frac{u_n}{2(n+1)} = \frac{1}{2}\, v_n\end{aligned}$$

Le premier terme vaut $v_0 = \frac{u_0}{1} = 1$.

Conclusion. D'après F14 (suite géométrique), (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$, et $v_0 = 1$.

5. 0,5 pts

En déduire que $u_n = \dfrac{n+1}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis retrouver u_3.

INDICE

Exprime d'abord v_n avec F15 (terme général géométrique).

CORRIGÉ

D'après F15 (terme général géométrique), pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$$

Comme $v_n = \dfrac{u_n}{n+1}$:

$$u_n = (n+1)\, v_n = \frac{n+1}{2^n}$$

Contrôle : pour $n = 3$, $u_3 = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$, comme à la question 1.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{n+1}{2^n}$, et l'on retrouve $u_3 = \dfrac{1}{2}$.

6. a) 0,75 pts

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que u_n, u_{n+1}, u_{n+2} ne sont pas, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

INDICE

Raisonne par l'absurde avec F16 (trois termes géométriques) : compare u_{n+1}^2 et $u_n\,u_{n+2}$ à l'aide du terme général.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons par l'absurde qu'il existe une suite géométrique dont u_n, u_{n+1}, u_{n+2} soient trois termes successifs, pris dans cet ordre. D'après F16 (trois termes géométriques), on aurait $u_{n+1}^2 = u_n\,u_{n+2}$.

Calcul des deux membres. D'après la question 5. :

$$u_{n+1}^2 = \frac{(n+2)^2}{2^{2n+2}}$$

$$\begin{aligned} u_n\,u_{n+2} &= \frac{n+1}{2^n} \times \frac{n+3}{2^{n+2}} \\ &= \frac{(n+1)(n+3)}{2^{2n+2}} \end{aligned}$$

Différence. Les numérateurs diffèrent de :

$$\begin{aligned} &(n+2)^2 - (n+1)(n+3) \\ &= n^2 + 4n + 4 \\ &\quad - (n^2 + 4n + 3) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} &u_{n+1}^2 - u_n\,u_{n+2} \\ &= \frac{1}{2^{2n+2}} \neq 0, \end{aligned}$$

ce qui contredit l'égalité précédente.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n, u_{n+1}, u_{n+2} ne sont pas trois termes consécutifs d'une suite géométrique ; en particulier, la suite (u_n) n'est pas géométrique.

6. b) 1 pts

Déterminer les entiers naturels n pour lesquels il existe une suite arithmétique dont u_n, u_{n+1}, u_{n+2} sont trois termes successifs, pris dans cet ordre. Préciser alors ces trois termes et la raison.

INDICE

D'après F12 (trois termes arithmétiques), la condition s'écrit $u_n + u_{n+2} = 2u_{n+1}$; multiplie les deux membres par 2^{n+2}.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après F12 (trois termes arithmétiques), une telle suite existe si et seulement si $u_n + u_{n+2} = 2u_{n+1}$.

Réduction. D'après la question 5. :

$$\begin{aligned} 2^{n+2}u_n &= 4(n+1) \\ 2^{n+2}u_{n+2} &= n+3 \\ 2^{n+2} \times 2u_{n+1} &= 4(n+2) \end{aligned}$$

Comme $2^{n+2} > 0$, on peut multiplier la condition $u_n + u_{n+2} = 2u_{n+1}$ par 2^{n+2} ; elle équivaut à :

$$\begin{aligned} &4(n+1) + n + 3 \\ &= 4(n+2) \\ &\Leftrightarrow 5n + 7 = 4n + 8 \\ &\Leftrightarrow n = 1 \end{aligned}$$

Les trois termes. Pour $n = 1$, ce sont $u_1 = 1$, $u_2 = \dfrac{3}{4}$ et $u_3 = \dfrac{1}{2}$ (question 1.). La raison vaut $r = u_2 - u_1 = -\dfrac{1}{4}$, et l'on vérifie $u_3 - u_2 = -\dfrac{1}{4}$.

Conclusion. Seul l'entier $n = 1$ convient : les trois termes sont 1, $\dfrac{3}{4}$ et $\dfrac{1}{2}$, et la raison vaut $-\dfrac{1}{4}$.

Exercice 5 5 pts

Deux suites liées par leur somme et leur différence

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 7$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} + 1,$$
$$v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} + 1.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $s_n = u_n + v_n$ et $w_n = v_n - u_n$.

1. 0,5 pts

Calculer u_1, v_1, u_2 et v_2.

CORRIGÉ

On calcule d'abord u_1 et v_1, qui servent au calcul de u_2 et v_2 :

$$u_1 = \frac{2+7}{3} + 1 = 4$$
$$v_1 = \frac{1+14}{3} + 1 = 6$$
$$u_2 = \frac{8+6}{3} + 1 = \frac{17}{3}$$
$$v_2 = \frac{4+12}{3} + 1 = \frac{19}{3}$$

Conclusion. $u_1 = 4$, $v_1 = 6$, $u_2 = \dfrac{17}{3}$ et $v_2 = \dfrac{19}{3}$.

2. 0,75 pts

Montrer que la suite (s_n) est arithmétique ; préciser sa raison et s_0. En déduire s_n en fonction de n.

INDICE

Additionne membre à membre les deux relations de récurrence.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$. En additionnant les deux relations de récurrence :

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= \frac{3u_n + 3v_n}{3} + 2 \\ &= u_n + v_n + 2 \\ &= s_n + 2 \end{aligned}$$

Le premier terme vaut $s_0 = 1 + 7 = 8$.

Conclusion. D'après F10 (suite arithmétique), (s_n) est arithmétique de raison 2, de premier terme $s_0 = 8$. D'après F11 (terme général arithmétique), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = 8 + 2n$.

3. 1 pts

Montrer que la suite (w_n) est géométrique ; préciser sa raison et w_0. En déduire w_n en fonction de n, puis que $u_n < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

INDICE

Soustrais membre à membre : les deux constantes 1 s'éliminent.

CORRIGÉ

Nature de (w_n). Soit $n \in \mathbb{N}$. En soustrayant les deux relations, les constantes 1 s'éliminent :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= v_{n+1} - u_{n+1} \\ &= \frac{u_n + 2v_n - 2u_n - v_n}{3} \\ &= \frac{v_n - u_n}{3} = \frac{1}{3}\, w_n \end{aligned}$$

D'après F14 (suite géométrique), (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$, de premier terme $w_0 = 7 - 1 = 6$.

Terme général. D'après F15 (terme général géométrique), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 6\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

Comparaison de u_n et v_n. Comme $6 > 0$ et $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n > 0$, on a $w_n > 0$, c'est-à-dire $v_n - u_n > 0$.

Conclusion. La suite (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$, avec $w_0 = 6$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < v_n$.

4. 0,75 pts

En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = n + 4 - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

et

$$v_n = n + 4 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Retrouver u_2 et v_2.

INDICE

Exprime u_n et v_n à l'aide de s_n et de w_n.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $s_n - w_n = 2u_n$ et $s_n + w_n = 2v_n$. Avec les questions 2. et 3. :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{s_n - w_n}{2} \\ &= \frac{2n + 8 - 6\left(\frac{1}{3}\right)^n}{2} \\ &= n + 4 - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{s_n + w_n}{2} \\ &= \frac{2n + 8 + 6\left(\frac{1}{3}\right)^n}{2} \\ &= n + 4 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

Contrôle. Pour $n = 2$, $3\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$, donc $u_2 = 6 - \frac{1}{3} = \frac{17}{3}$ et $v_2 = 6 + \frac{1}{3} = \frac{19}{3}$, comme à la question 1.

Conclusion. Les deux expressions annoncées sont vraies pour tout $n \in \mathbb{N}$, et l'on retrouve $u_2 = \frac{17}{3}$ et $v_2 = \frac{19}{3}$.

5. `0,75 pts`

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = 1 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

En déduire le sens de variation de (u_n) et un minorant de cette suite.

INDICE

Pars de la relation de récurrence : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{v_n - u_n}{3} + 1$.

CORRIGÉ

Calcul de la différence. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la relation de récurrence et la question 3. :

$$\begin{aligned} & u_{n+1} - u_n \\ &= \frac{2u_n + v_n - 3u_n}{3} + 1 \\ &= \frac{w_n}{3} + 1 \\ &= 1 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

Sens de variation. Cette différence est strictement positive. D'après F07 (monotonie), la suite (u_n) est strictement croissante.

Minorant. D'après F08 (comparaison des termes), une suite croissante est minorée par son premier terme : $u_n \geq u_0 = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Conclusion. La suite (u_n) est strictement croissante, et 1 en est un minorant.

6. 1,25 pts

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} - v_n = 1 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

La suite (v_n) est-elle monotone ? Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante, puis que $v_n \geq 6$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

INDICE

Pour $n \geq 1$, compare $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ à $\frac{1}{3}$. Dans la dernière inégalité, n'oublie pas le terme v_0.

CORRIGÉ

Calcul de la différence. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme à la question 5. :

$$\begin{aligned} & v_{n+1} - v_n \\ &= \frac{u_n + 2v_n - 3v_n}{3} + 1 \\ &= 1 - \frac{w_n}{3} \\ &= 1 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

Monotonie. Pour $n = 0$: $v_1 - v_0 = 1 - 2 = -1 < 0$. Pour $n = 1$: $v_2 - v_1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} > 0$. La suite (v_n) n'est donc ni croissante ni décroissante.

À partir du rang 1. La suite de terme général $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ est géométrique, de premier terme $1 > 0$ et de raison $\frac{1}{3}$, avec $0 < \frac{1}{3} < 1$: d'après F15 (terme général géométrique), elle est strictement décroissante.

Soit $n \geq 1$ un entier. D'après F08 (comparaison des termes), $\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq \frac{1}{3}$, donc :

$$v_{n+1} - v_n \geq 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} > 0$$

D'après F07 (monotonie), la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante.

Minorant. D'après F08, appliquée à la suite croissante $(v_n)_{n\geq 1}$, on a $v_n \geq v_1 = 6$ pour tout entier $n \geq 1$. De plus, $v_0 = 7 \geq 6$.

Conclusion. La suite (v_n) n'est pas monotone, la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante, et $v_n \geq 6$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: $6 = v_1$ est le plus petit terme de la suite.