BURHAN

Suites numériques (généralités) : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/suites-numeriques/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Suites numériques (généralités)	Entraînement	8

Exercice 1

Bornes et sens de variation d'une suite définie par un quotient

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{4u_n + 2}{u_n + 3}.$$

1.

Calculer u_1 et u_2.

INDICE

Calcule de proche en proche ; pour u_2, écris $4 \times \frac{3}{2} + 2$ et $\frac{3}{2} + 3$ séparément.

2.

Soit x un réel tel que $1 \leq x < 2$. Montrer que :

$$\frac{4x + 2}{x + 3} - 1 = \frac{3x - 1}{x + 3}$$

et

$$\frac{4x + 2}{x + 3} - 2 = \frac{2(x - 2)}{x + 3}.$$

En déduire par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est défini et $1 \leq u_n < 2$.

INDICE

Réduis au même dénominateur, qui est strictement positif. Dans l'hérédité, applique ces deux égalités à $x = u_n$.

3.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(u_n + 1)}{u_n + 3}.$$

En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

INDICE

Réduis au même dénominateur, puis développe $(2 - u_n)(u_n + 1)$ pour comparer. Pour le signe, utilise l'encadrement de la question 2.

Exercice 2

Intervalle stable et croissance par récurrence

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 3}{4}.$$

1.

Calculer u_1 et u_2.

INDICE

Calcule u_1^2 avant d'ajouter 3.

2.

Montrer que, pour tout réel $x \in [0, 1]$, le réel $\dfrac{x^2 + 3}{4}$ appartient à $[0, 1]$. En déduire que $u_n \in [0, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

INDICE

Encadre d'abord x^2 pour $x \in [0, 1]$, puis ajoute 3 et divise par 4. Pour la déduction, cite F03 (suite récurrente bien définie).

3.

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$. Conclure.

INDICE

Pour l'hérédité, pars de $0 \leq u_n \leq u_{n+1}$: deux réels positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés. Écris ensuite u_{n+2} à l'aide de u_{n+1}.

4.

Retrouver ce résultat en montrant que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)(u_n - 3)}{4}.$$

INDICE

Développe $(u_n - 1)(u_n - 3)$ et compare avec $u_n^2 + 3 - 4u_n$. Le signe de chaque facteur se lit sur l'encadrement de la question 2.

Exercice 3

Quotient de termes consécutifs et rang de départ

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie, pour tout entier $n \geq 1$, par $u_n = \dfrac{2^n}{n^2}$.

1.

Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est-elle monotone ?

INDICE

Range les cinq valeurs, puis cherche deux comparaisons de sens contraires.

2.

Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n^2}{(n+1)^2},$$

puis que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ équivaut à $(n-1)^2 > 2$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 3}$ est strictement croissante.

INDICE

Les termes sont strictement positifs. Compare $2n^2$ à $(n+1)^2$ en développant, puis fais apparaître $(n-1)^2$.

3.

En déduire que $u_n \geq \dfrac{8}{9}$ pour tout entier $n \geq 1$. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est-elle minorée ?

INDICE

Sépare les rangs $n \geq 3$, où F08 (comparaison des termes) s'applique à partir de u_3, et les deux premiers rangs, calculés à la question 1.

Exercice 4

Trois termes consécutifs : arithmétiques ou géométriques

Dans cet exercice, x désigne un réel.

1.

Déterminer x pour que $x-1$, $2x+1$ et $4x+1$ soient, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique. Donner ces trois termes et la raison.

INDICE

D'après F12 (trois termes arithmétiques), la condition est $a+c=2b$: écris-la, puis résous.

2.

Déterminer les valeurs de x pour lesquelles la liste x, $x+4$, $9x$ est formée de trois termes successifs d'une suite géométrique. Préciser chaque fois la raison.

INDICE

La condition $b^2=ac$ s'écrit $(x+4)^2=(3x)^2$. Une différence de deux carrés se factorise.

3.

Existe-t-il un réel x pour lequel x, $x+4$ et $9x$ sont à la fois trois termes consécutifs d'une suite arithmétique et d'une suite géométrique ?

INDICE

Cherche d'abord la seule valeur qui convient pour la suite arithmétique, puis compare avec la question 2.

Exercice 5

Les premiers termes ne suffisent pas

On considère les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies, pour tout entier $n \geq 1$, par :

$$\begin{aligned} u_n &= 4n \\ &\quad + (n-1)(n-2)(n-3), \\ v_n &= 3^{n-1} \\ &\quad + (n-1)(n-2)(n-3), \end{aligned}$$

ainsi que la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $w_n = 5 \times 3^n - 2$.

1.

Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. Les trois premiers termes sont-ils en progression arithmétique ? La suite (u_n) est-elle arithmétique ?

INDICE

Le produit $(n-1)(n-2)(n-3)$ est nul pour $n = 1$, 2 et 3. Teste F12 (trois termes arithmétiques) sur deux triplets.

2.

Même question pour (v_n) avec une suite géométrique.

INDICE

Calcule v_1 à v_4, puis teste F16 (trois termes géométriques) sur les triplets (v_1, v_2, v_3) et (v_2, v_3, v_4).

3.

Montrer que (w_n) n'est pas géométrique, mais que la suite (t_n) définie par $t_n = w_n + 2$ l'est.

INDICE

Calcule w_0, w_1, w_2 pour réfuter. Pour (t_n), écris t_{n+1} en fonction de t_n.

Exercice 6

Des sommes à reconnaître

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1.

Calculer $S = 7 + 12 + 17 + \cdots + 302$.

INDICE

On ajoute 5 d'un terme au suivant. Écris le terme d'indice k sous la forme $7 + 5k$ et trouve l'indice du dernier terme.

2.

Calculer $T_n = \sum_{k=1}^{n} (4k - 1)$ en fonction de n.

INDICE

La suite de terme général $4k - 1$ est arithmétique de raison 4. Repère le premier et le dernier terme.

3.

Calculer $U_n = \sum_{k=0}^{n} (k + 2^k)$ en fonction de n.

INDICE

Sépare la somme en deux : $\sum_{k=0}^{n} k$ et $\sum_{k=0}^{n} 2^k$. Chacune relève d'une formule du cours.

Exercice 7

Une suite auxiliaire arithmétique

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + 3u_n}.$$

1.

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est défini et $u_n > 0$. Calculer u_1 et u_2.

INDICE

Si $u_n > 0$, que dire de $1 + 3u_n$? Pense à la propriété « u_n est défini et $u_n > 0$ ».

2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n}$. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Donner v_0.

INDICE

v_n est défini car $u_n \neq 0$. Écris v_{n+1} comme l'inverse de u_{n+1}, puis sépare la fraction en deux.

3.

En déduire v_n, puis u_n, en fonction de n.

INDICE

Applique F11 (terme général arithmétique) à (v_n), puis reviens à u_n par l'inverse.

Exercice 8

Une suite auxiliaire géométrique de raison négative

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 11$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = 4 - \frac{u_n}{3}.$$

1.

Calculer u_1 et u_2. La suite (u_n) est-elle monotone ?

INDICE

Calcule de proche en proche, puis compare les termes consécutifs.

2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - 3$. Établir une relation entre v_{n+1} et v_n, puis en déduire la nature de (v_n) et la valeur de v_0.

INDICE

Exprime v_{n+1} à l'aide de u_n, puis fais apparaître $u_n - 3$.

3.

En déduire u_n en fonction de n.

INDICE

F15 (terme général géométrique) donne v_n ; reviens ensuite à $u_n = v_n + 3$.

4.

Montrer que $-5 \leq u_n \leq 11$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

INDICE

Calcule $|v_n|$ et majore-le par un réel indépendant de n.